Teoria dell'impresa

L. Balletta S. Modica 2018

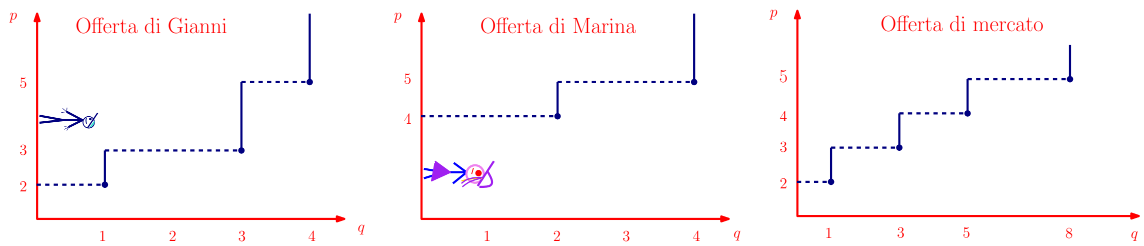
Indice

In questo capitolo studieremo le scelte dell'impresa, e vedremo innanzitutto che la funzione di offerta dell'impresa competitiva è *sempre* crescente nel prezzo del bene (non ci sono "patologie" analoghe ai beni di Giffen). Andremo più a fondo nello studio dell'impresa che nel caso del consumatore perché terremo conto del fatto che alcune sono scelte "di breve periodo" - per una panetteria, quanta farina devo comprare questo mese - e altre sono più "di lungo periodo" nel senso che vengono riviste a intervalli più lunghi - quanti metri quadri deve essere l'impianto, quante impastatrici devo installare. Studieremo poi le imprese che possono alzare il prezzo senza perdere tutto il mercato, cioè imprese che fronteggiano una curva di domanda non perfettamente elastica, che devono quindi decidere fra le alternative possibili di coppie prezzo-quantità, in particolare l'impresa monopolistica. E vedremo che il risultato di efficienza dell'equilibrio di mercato in quel contesto fallisce, e perché.

1 Da dove viene la funzione di offerta di Marina?

Per l'impresa partiamo esattamente come per il consumatore. Ti ricordi della figura 1.1 qui sotto, con Gianni e Marina al mercato delle arance, all'asta con prezzo crescente? Gianni per esempio a prezzo inferiore a 2 non offriva niente, fino a quando a $p = 2$ si impegnava a vendere 1 unità; Marina entrava a $p = 4$ offrendo 2 unità; eccetera. Che conti facevano per arrivare a queste scelte?

Figura 1.1: Offerte individuali e offerta di mercato



Nel caso del consumatore abbiamo visto che le scelte di domanda scaturivano dall'obiettivo della massimizzazione dell'utilità sul vincolo di bilancio. Qual è l'obiettivo nel caso dell'impresa? Credo che Gianni o Marina risponderebbero più o meno così: «Il lavoro è lavoro, e in tutta sincerità il mio obiettivo principale in azienda è fare soldi, più soldi possibile.» Già. Probabilmente si preoccuperanno anche della parità dei sessi in azienda e della responsabilità sociale dell'impresa nel mondo moderno. Sono cose importanti, ma per non complicare le cose assumeremo che *l'obiettivo primario dell'impresa è massimizzare il profitto.* Su questo ci concentreremo. Il profitto è quello che conosci dalle scuole elementari:

$$\textbf{\textit{Profitto}} = \textbf{\textit{Ricavi}} - \textbf{\textit{Costi.}}$$

1.1 La funzione di produzione

Come fa un'impresa a fare profitti? Producendo e vendendo beni. In generale le imprese producono tutto un ventaglio di beni, ma noi *ci limiteremo al caso in cui l'impresa produce soltanto il bene di cui stiamo parlando.* Come un consumatore è definito dalla sua utilità

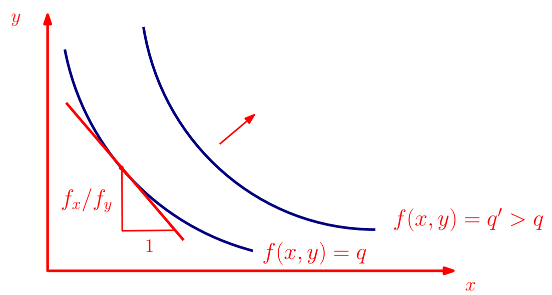
$x \in \mathbb{R}^n_+ \mapsto u(x) \in \mathbb{R}$, un'impresa è definita dalla sua capacità di trasformare fattori produttivi in quantità prodotte del bene in questione - *dalla sua capacità tecnologica, o "creativa"* se vuoi. E questa è rappresentata dalla quantità di prodotto $f(x) \in \mathbb{R}_+$ che l'impresa è capace di produrre con la combinazione $x \in \mathbb{R}^n_+$ di fattori produttivi (lavoro, capitale eccetera). In altre parole *l'impresa è definita da una **funzione di produzione** $x \in \mathbb{R}^n_+ \mapsto f(x) \in \mathbb{R}_+$.* La differenza fondamentale fra u ed f è che lo stesso consumatore rappresentato da u è rappresentato anche da $10u$ mentre un'impresa rappresentata da $10f$ è ben più capace di quella rappresentata da f - che se ci pensi è ovvio. Nota anche che la quantità prodotta - che indicheremo con la lettera q - non può essere negativa: $q = f(x) \geq 0$ per ogni x; e assumeremo $f(0) = 0$.

È bene osservare che la produzione è un *flusso*, nel senso che la quantità prodotta è misurata *per unità di tempo*. Se ci pensi è ovvio: un panificio, con un'impastatrice, i metri quadri di laboratorio, il forno e il personale impiegato produce un tot di chili di pane *al giorno* - o al mese o come vuoi, ma sempre per unità di tempo.[1]

Come per le funzioni di utilità la forma di f si vede dalle curve di livello. Queste si chiamano *isoquanti,* per indicare che sono luoghi di punti (combinazioni di fattori) che producono la stessa quantità. Per il resto la f è praticamente come u: oltre che derivabile, la assumiamo crescente in ogni argomento - se impieghi quantità maggiori di un fattore produci di più. Nota che (come per l'utilità) nel caso di due fattori questo implica che le curve di livello di f sono decrescenti. In termini di derivate parziali f_i la crescenza di f ammonta ad assumerle positive, $f_i(x) > 0$ per ogni x, i. Le derivate parziali rappresentano *produttività marginali,* perché f_i è l'incremento di prodotto che ottieni se utilizzi una unità in più di x_i (approssimativamente, cioè sul piano tangente). Per inciso, per le funzioni di produzione ha senso anche parlare di *produttività media.* Quando si dice che in Italia la produttività del lavoro ristagna si parla di questo. La produttività media del fattore i nella combinazione x è il prodotto per unità di fattore: $f(x)/x_i$.

In generale assumeremo che le produttività marginali descrescano al crescere della quantità del fattore: se x_i sale f_i scende. Nel caso di due fattori x, y questo implica che la pendenza f_x/f_y degli isoquanti sia decrescente cioè che gli isoquanti siano convessi (perché sono decrescenti quindi se x sale y scende). Una mappa delle curve di livello di una tipica funzione di produzione appare dunque come in figura 1.2.

Figura 1.2: Mappa delle curve di livello di una funzione di produzione



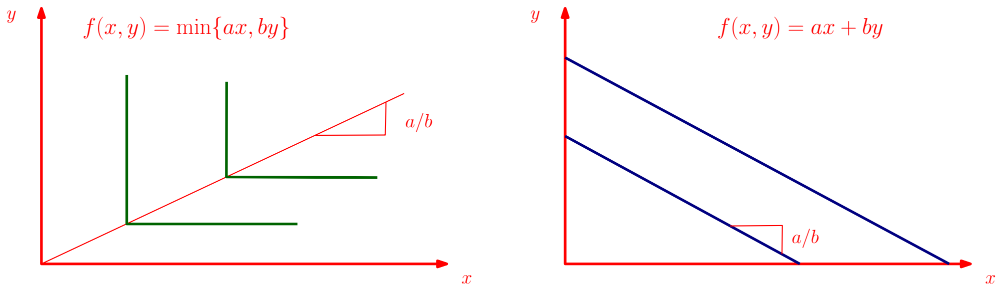
Curve più lontane dall'origine corrispondono a livelli di produzione più alti. Come nel caso della funzione di utilità, le curve di livello hanno pendenza negativa ma, al fine di interpretarla, ne prendiamo il valore assoluto f_x/f_y. Il significato è analogo a quello visto per u: *la pendenza*

[1] Se te lo stai chiedendo sì, anche l'utilità è un flusso.

di un isoquanto in un punto è il valore di x (in termini di y) nell'impresa f. Potremmo anche dire soggettivo, perché f definisce il soggetto "impresa di Marina" esattamente come u definisce i gusti di Roby. Valore nella produzione perché se per esempio è $f_x/f_y = 3$ se ti offrono una unità addizionale di x sei disposto a cederne 3 di y - perché con questo scambio puoi continuare a produrre la stessa quantità. Il nome comunemente usato per f_x/f_y è *saggio marginale di sostituzione tecnica.*

Esempio (I due casi estremi: Lineare e Leontief). Come per il consumatore e le sue funzioni di utilità, anche qui i casi limite degli isoquanti convessi sono: più convessi possibile e meno possibile. Massimo possibile è isoquanti a forma di L, minimo possibile sono rette. Vedi figura 1.3.

Figura 1.3: Produzione Leontief e Lineare



Nel caso Leontief, tipo produzione di un composto chimico oppure la ricetta della tua pietanza preferita, i due fattori sono perfetti complementi. Questo significa che i due fattori devono necessariamente essere utilizzati insieme ed in proporzioni fisse. Un'implicazione di questo è che è "difficile" sostituire un fattore con un altro mantenendo la stessa produzione, anzi impossibile. Ad esempio, se per fare un buon piatto di pasta con le sarde sono necessari 150g di bucatini e 200g di sarde (rapporto 3/4), per farne due saranno necessari 300 e 400 grammi, rispettivamente (rapporto sempre 3/4). Se provi a sostituire 100g di sarde con 100g di bucatini (il rapporto diventa 5/2) non avrai prodotto più un buon piatto di sarde! Al contrario, nel caso lineare è possibile, ad esempio, sostituire una unità del fattore x con a/b unità del fattore y e produrre esattamente quanto si produceva prima. Quindi, in effetti, è "facile" sostituire un input con un altro: i due fattori dicono perfetti sostituti.

Esempio (La funzione Cobb-Douglas). Anche nel caso della produzione la funzione più utilizzata è la funzione Cobb-Douglas. Cominciamo subito ad interpretare i due fattori come capitale K e lavoro L. Ovviamente in realtà - oltre alle materie prime, che tralasciamo per adesso - le imprese utilizzano diverse tipi di capitale e lavoro, ma per semplificare li pensiamo come aggregati K ed L, quindi abbiamo una $f(K, L)$. La funzione Cobb-Douglas è

$$f(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

dove A è un parametro che impareremo più in là ad interpretare, e che spesso porremo uguale ad 1. Possiamo però subito interpretare i parametri α e β, che sono le elasticità di nei due fattori. Precisamente, puoi facilmente verificare che

$$\frac{\partial f}{\partial K}\frac{K}{f} = \alpha \qquad \frac{\partial f}{\partial L}\frac{L}{f} = \beta.$$

1.2 Ricavi

I ricavi sono anche loro quelli che sappiamo da scuola: *Ricavo = Prezzo × Quantità.* La quantità è la quantità prodotta q, e il prezzo è il prezzo di domanda p. Come abbiamo visto nel primo capitolo per l'impresa competitiva il prezzo di domanda è indipendente da q; l'impresa non competitiva ha invece di fronte una domanda decrescente (assumendo che stiamo parlando di un bene normale), cioè un prezzo $p(q)$ decrescente in q.

L'impresa che influenza il prezzo: $p = p(q)$

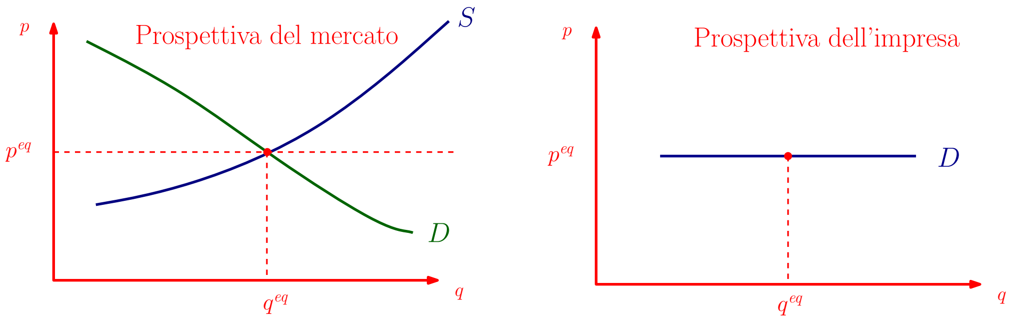
L'impresa può trovarsi di fronte un prezzo di domanda decrescente: Vuoi vendere di più? Sì, ma devi ridurre il prezzo. Vuoi vendere a un prezzo più alto? Puoi, ma devi vendere di meno. In questo caso il prezzo al quale l'impresa può vendere dipende dalla sua decisione sulla quantità da immettere sul mercato. Pensando a noi stessi che quotidianamente qualcosa contrattiamo ci verrebbe di concludere che è sempre così, ma il contesto che dobbiamo avere in mente non è quello di uno scambio bilaterale; dobbiamo piuttosto immaginare scambi "anonimi" in un mercato di vaste dimensioni. Anche in tale contesto comunque, l'impresa che ha di fronte un prezzo di domanda decrescente è piuttosto comune. Il caso limite si verifica quando l'impresa in questione è l'unica che vende quel prodotto sul mercato - lì la domanda che ha di fronte l'impresa è la domanda di mercato, che è di certo decrescente. *Nel caso di domanda dell'impresa decrescente il ricavo è $r(q) = p(q)q$.* Lo studieremo nella sezione 4.

L'impresa competitiva: p indipendente da q

L'impresa competitiva è per l'appunto in competizione con molte altre imprese simili. La situazione in questo caso è del tutto diversa: Vuoi vendere a un prezzo più alto? Scordatelo, c'è sempre un'altra impresa pronta a vendere al prezzo di mercato. D'altra parte: vuoi vendere di più? Nessun problema, al prezzo di mercato puoi vendere quello che vuoi. Qui l'idea è che la scala di operazione dell'impresa è di un ordine di grandezza inferiore a quello necessario a far muovere il prezzo - quindi in positivo puoi vendere quanto vuoi al prezzo di mercato - ma d'altra parte hai competitori che fungono da perfetti sostituti se cerchi di tirare sul prezzo: il potenziale compratore rifiuterà e si rivolgerà a loro. In questo caso l'impresa percepisce una domanda perfettamente elastica; è quella che abbiamo chiamato appunto perfettamente concorrenziale, riguarda la figura 1.4, già vista parlando di domanda e offerta.

Per l'impresa competitiva il ricavo è $r(q) = pq$. È lineare in q, perché per l'impresa competitiva (come per il consumatore competitivo) p è un parametro esogeno. Nota bene che il ricavo marginale è $r'(q) = p$. Questo è ovvio: per ogni q se vendi un'unità in più ricavi p. Dunque *per l'impresa competitiva il ricavo marginale è uguale al prezzo.* Cominceremo con questo caso nella sezione 1.5.

Figura 1.4: Concorrenza perfetta



Unità di misura

Sarà banale ma è meglio precisarlo: dobbiamo stare attenti alle unità di misura. Il ricavo è misurato in unità di conto, diciamo Euro per fissare le idee. Perché il risultato della moltiplicazione prezzo per quantità dia Euro, se la quantità è misurata poniamo in Kg (chilogrammi) il prezzo deve essere *prezzo al* Kg. Così viene

$$\frac{€}{Kg} \cdot Kg = €$$

Se per qualche ragione cambiamo unità di misura della quantità (ci capiterà di farlo più avanti) e la misuriamo in tonnellate T (migliaia di Kg) dobbiamo prima convertirla in Kg. Se p è prezzo al Kg e Q sono tonnellate il ricavo non è pQ ma è $p \cdot 1000Q$. Oppure convertiamo il prezzo in prezzo per tonnellata, $P = 1000p$ e allora il ricavo è PQ. In questo caso di nuovo abbiamo Euro: $€ = (€/T) \cdot T$.

1.3 Costi

Il costo di produrre q è il costo dei fattori usati per produrla; su questo non ci piove. Se i prezzi dei fattori sono $w = (w_1, \ldots, w_n)$ e hai usato la combinazione x paghi $wx = \sum_i w_i x_i$. Ovviamente se hai diversi x che ti permettono di avere la stessa q scegli quello con costo minimo.[2] Quindi il costo di produrre q, diciamo $c(q)$, è definito come il costo *minimo* di produrre q. In altre parole $c(q)$ è il wx minimo che si può ottenere producendo $f(x) = q$. Formalmente, sia $x(q)$ soluzione del problema della minimizzazione del costo di produrre q:

$$\min wx \quad \text{sull'insieme } \{x \in \mathbb{R}^n_+ : f(x) = q\}; \tag{MinC}$$

il costo $c(q)$ è il costo di questa combinazione:[3]

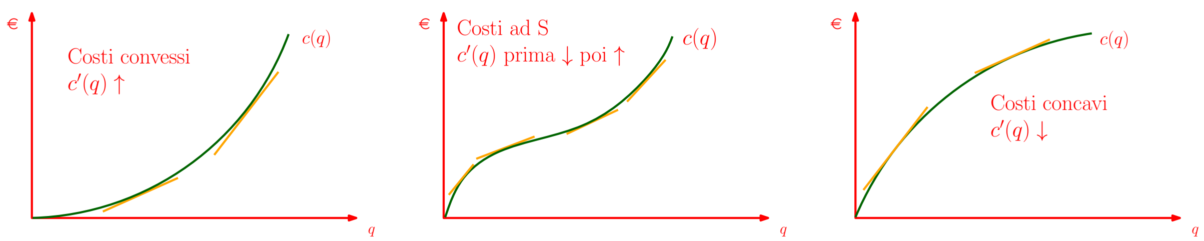
$$c(q) = wx(q) \tag{Cq}$$

[2] Accettiamo questa affermazione come ovvia per adesso, la giustificheremo nella sezione 2.

[3] Per essere precisi i parametri del problema includono anche w, quindi in realtà sarebbe $x(q) = x(q; w), c(q) = c(q; w)$; ometteremo la dipendenza da w finché non serve. Per inciso, il vincolo $f(x) = q$ è equivalente ad $f(x) \geq q$ perché una x con $f(x) > q$ non può essere di minimo costo per produrre almeno q perché puoi ridurre qualche x_i e soddisfare lo stesso il vincolo (perché la f è continua).

Osserviamo innanzitutto che $c(0) = 0$: perché $f(0) = 0$ quindi puoi produrre zero con $x = 0$ spendendo zero. Inoltre, dalla monotonia di f segue che $c(q)$ è crescente: perché una $q' < q$ può essere prodotta con quantità di fattori inferiori a quelle usate nella x tale che $wx = c(q)$, quindi $c(q') < c(q)$. Ma crescente quanto, come? Dipende dalla derivata $c'(q)$ *- il costo marginale.* Il costo marginale è (approssimativamente) l'incremento di costo da sostenere per ottenere un $\Delta q = 1$. Che fa questo al crescere di q? Può essere che produrre diventi più difficile man mano che q cresce, cioè che il costo marginale cresca con q. Pensa per esempio di voler incrementare la produzione di arance in un dato ettaro di terra con quantità crescenti di lavoro, concimi eccetera. I primi incrementi di produzione dell'aranceto sono i più facili da ottenere - si curano meglio gli alberi, si aumenta il concime. Ma man mano che la produzione cresce aumentarla diventa più duro - per ottenere altri incrementi devi andare a sfruttare gli alberi più difficili, cose del genere. In questo caso $c'(q)$ è crescente, cioè c è convessa, come nel pannello sinistro della figura 1.5. Il primo esempio opposto famoso lo fece Adam Smith nel 1776: in una fabbrica di spilli un lavoratore da solo può produrre se gli va bene uno spillo al giorno, ma se ne devi produrre tanti puoi dividere le mansioni specializzate fra i diversi operai e produrre molto di più (Smith sosteneva che in tal modo dieci operai possono produrre 48000 spilli al giorno, cioè 4800 l'uno). Questo è il caso di costi marginali decrescenti, cioè c concavo (pannello destro in figura). In effetti il caso tipico sta nel mezzo (anche nella figura): per piccole quantità il costo marginale scende, ma inevitabilmente per q grande abbastanza comincerà a salire (abbiamo di fatto argomentato in tema di offerta che tenderà a infinito per q finito, e dopotutto ci sono sul pianeta quantità finite di fattori). I casi di concavità o convessità sono i due casi semplici che si studiano perché da lì si ricavano le informazioni essenziali da applicare al caso generale.

Figura 1.5: Funzioni costo



Esempio. Un esempio di funzione per il caso intermedio, come puoi verificare, è il seguente:

$$c(q) = \begin{cases} \sqrt{q} & 0 \leq q \leq 1/4 \\ \frac{1}{2} + (q - \frac{1}{4})^2 & q \geq 1/4 \end{cases}$$

Vedremo nella sezione 3 che questa forma di curva dei costi emerge molto più naturalmente in presenza di costi fissi (cioè indipendenti da q).[4]

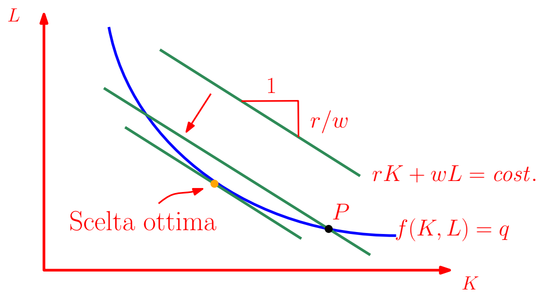
[4]Questa funzione non è esattamente come la figura perché in $q = 1/4$ non è derivabile come puoi verificare, ma non importa.

Ricavare il costo di produrre q

Guardiamo un po' il problema (MinC) perché è speculare al problema del consumatore che abbiamo studiato. In quel caso c'era un vincolo lineare fisso $px = m$, e rispettando questo si voleva finire sulla curva $u = cost.$ più alta. Qui abbiamo un vincolo convesso fisso $f(x) = q$, e si vuole finire sulla retta $wx = cost.$ di "isocosto" più bassa possibile. Lo facciamo nel caso di due soli fattori, perché è l'unico caso che possiamo visualizzare. Li interpretiamo come capitale K e lavoro L. I loro prezzi sono rispettivamente il tasso di interesse r e il salario w, che sono prezzi *per unità di tempo* dei servizi di capitale e lavoro utilizzati dall'impresa per produrre il flusso f. I proprietari del capitale sono le famiglie cui l'impresa appartiene e l'impresa ne affitta i servizi, e il suo prezzo è il tasso di interesse che è il rendimento che le famiglie avrebbero se invece di investire in capitale prestassero i loro soldi. Anche per il lavoro: l'impresa affitta i servizi lavorativi dai loro proprietari/lavoratori. In pratica, prendendo come unità di tempo per esempio l'anno, con la combinazione (K, L) spendendo $rK + wL$ l'anno l'impresa produce $f(K, L)$ l'anno.

Facciamo per ora il caso di soluzione interna, i dettagli negli altri casi li vedremo nella sezione 1.3. Il problema è illustrato nella figura 1.6: si indovina, e si dimostra (di nuovo usando il fatto che le funzioni convesse stanno sopra la tangente) che la soluzione ottima è nel punto in cui obiettivo e vincolo sono tangenti.

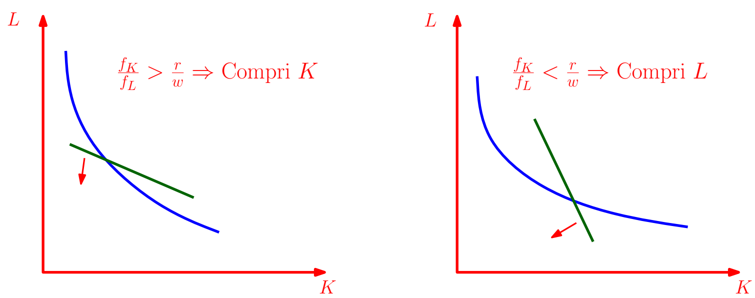
Figura 1.6: Minimizzazione del costo di produrre q



La scelta ottima è $(K(q), L(q))$, e $c(q) = rK(q) + wL(q)$.

Le osservazioni su valore soggettivo e prezzo di mercato che abbiamo fatto per il consumatore sono valide anche qui. Per esempio nel punto indicato con P nella figura il valore locale di K nella produzione f_K/f_L è inferiore al suo prezzo di mercato r/w (il valore che a K danno gli altri), quindi conviene ridurne l'utilizzo sostituendolo con L. Vedi figura 1.7.

Figura 1.7: Valore soggettivo diverso dal prezzo

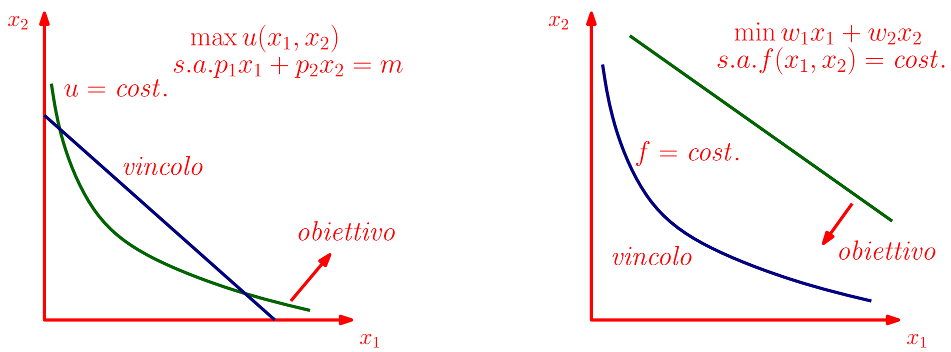


Al solito, questo processo continua finché ci sono margini di miglioramento. E come nel caso del consumatore, per trovare il punto di tangenza sul vincolo - due variabili - usiamo le due equazioni di tangenza e appartenenza al vincolo:

$$\begin{cases} \frac{f_K(K,L)}{f_L(K,L)} = \frac{r}{w} & \text{(TG)} \\ f(K,L) = q & \text{(Vincolo)} \end{cases}$$

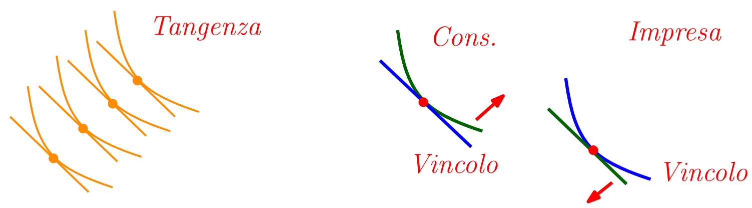
Il problema è simile alla massimizzazione dell'utilità ma algebricamente può essere più lungo perché il vincolo in generale non è lineare. Il parallelismo fra i due problemi è illustrato nella figura 1.8: nel caso del consumatore abbiamo un obiettivo convesso soggetto a un vincolo lineare, nel caso dell'impresa l'obiettivo è lineare e il vincolo convesso.

Figura 1.8: Consumatore e Produttore



E la soluzione dei due problemi è analoga: l'equazione della tangenza dice che curva e retta devono avere la stessa pendenza, ed è soddisfatta in infiniti punti (uno per ogni curva di livello); l'equazione del vincolo seleziona l'ottimo. Vedi figura 1.9:

Figura 1.9: Geometria del problema Tangenza-Vincolo



Esempio (Produzione Cobb-Douglas nei fattori capitale e lavoro). Troviamo la funzione costo per l'impresa Cobb-Douglas $f(K,L) = AK^\alpha L^\beta$. Più avanti impareremo ad interpretare la costante A come "produttività totale dei fattori". Le due equazioni di sopra diventano

$$\begin{cases} \frac{f_K}{f_L} = \frac{r}{w} \\ f(K,L) = q \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\alpha L}{\beta K} = \frac{r}{w} \\ AK^\alpha L^\beta = q \end{cases}$$

Dalla prima $K = \frac{\alpha w}{\beta r} L$, sostituendo nella seconda troviamo $q = A(\frac{\alpha w}{\beta r})^\alpha L^{\alpha+\beta}$ da cui

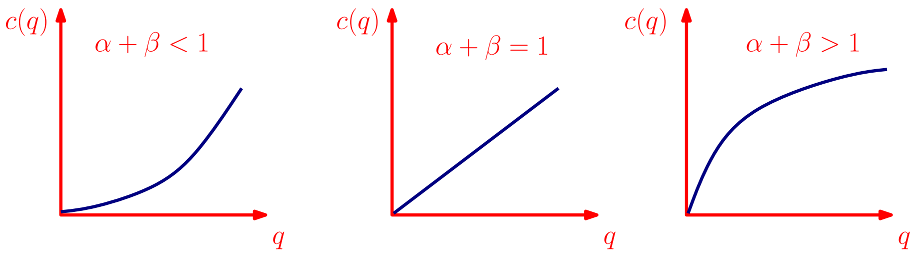
$$L(q) = (A^{-1/\alpha} \frac{\beta r}{\alpha w})^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \quad K(q) = (A^{-1/\beta} \frac{\alpha w}{\beta r})^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Nota che K ed L sono funzioni potenza di q; che più grande è A meno ti serve per produrre q; e che se il prezzo w/r di L in termini di K aumenta allora L viene sostituito con K. Da queste possiamo ricavare il costo $c(q)$:

$$c(q) = rK(q) + wL(q) = \ldots = \gamma(r, w) \cdot q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

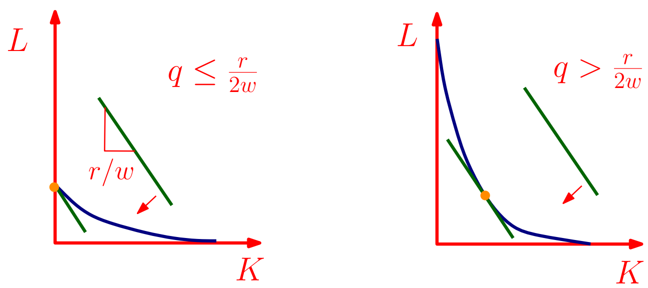
dove $\gamma(r, w) = A^{-\frac{1}{\alpha+\beta}}(\alpha + \beta)\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\left(\frac{w}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$, come dovresti verificare.[5] Al solito sarebbe $c(q; r, w)$, con $K = K(q; r, w)$, $L = L(q; r, w)$. Ma la cosa importante da notare è la concavità di $c(q)$, che è descritta nella Figura 1.10.[6] Vedremo nella sezione 1.4 che il valore di $\alpha + \beta$ è legato ai cosiddetti *rendimenti di scala.*

Figura 1.10: Costo Cobb-Douglas



Esempio. Data la funzione di produzione $f = K + \sqrt{L}$ deriviamo la domanda di lavoro dell'impresa in funzione del suo prezzo relativo w/r e della quantità da produrre q.

Dobbiamo trovare la scelta di L nella combinazione efficiente per produrre q. La pendenza dell'isoquanto - valore locale di K nella produzione - è $f_K/f_L = 2\sqrt{L}$. Osserviamo che il valore di L è $f_L/f_K = 1/2\sqrt{L}$ che per $L \to 0$ tende a infinito, quindi per L piccolo sarà maggiore di w/r e dunque $L(q) > 0$ per ogni q. Resta da vedere se anche $K(q)$ è sempre positivo. Se produciamo q con $K = 0$ abbiamo $q = \sqrt{L}$ dunque $f_K/f_L = 2q$; quindi se $2q \leq r/w$ cioè $q \leq r/2w$ sarà $K(q) = 0$ (perché aumentando K e riducendo L il valore di K che è $2\sqrt{L}$ scende ed è sicuramente minore di r/w) e quindi $L(q) = q^2$. Se invece $q > r/2w$ a $K = 0$ il valore di K è maggiore del suo prezzo r/w e quindi anche $K(q) > 0$. Vedi la figura qui sotto.



In quest'ultimo caso l'ottimo è interno, e la tangenza $f_K/f_L = r/w$ dà $2\sqrt{L} = r/w$ cioè $L(q, w) = (r/2w)^2$ indipendentemente da q. Nota che per $q > r/2w$ produci quantità crescenti

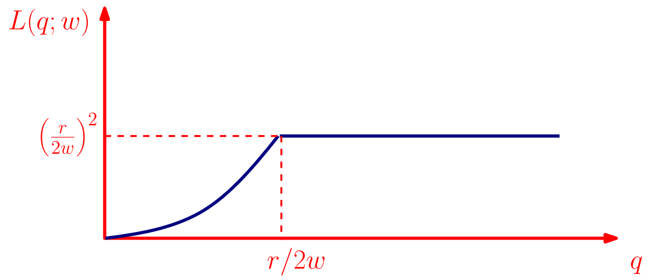
[5] L'esponente di A e q è chiaro. Per il resto abbiamo $w^1 \cdot w^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} = w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$ e $\beta^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} = \beta \cdot \beta^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$, e procedendo analogamente arriviamo alla espressione nel testo.

[6] Che cambia a seconda che l'esponente sia maggior o minore di 1 come dovresti ricordare da Matematica.

di q aumentando solo K, linearmente: $K(q,w) = q - \sqrt{L} = q - r/2w$. Sulla domanda di lavoro abbiamo concluso che

$$L(q,w) = \begin{cases} q^2 & q \leq r/2w \\ (r/2w)^2 & q > r/2w \end{cases}$$

Qui sotto la funzione è disegnata come funzione di q, dato w:



Esempio (Produzione Lineare). Considera adesso la funzione $f(K,L) = aK + bL$. Gli isoquanti sono rette $aK + bL = q$ quindi puoi produrre q sia utilizzando soltanto q/a unità di K sia soltanto q/b unità di L. Capitale e lavoro sono qui perfettamente sostituibili. La minimizzazione del costo di produrre q - se disegni lo vedi subito perché sia l'obiettivo $rK + wL$ da minimizzare sia il vincolo $ax + by = q$ sono rette - conduce ad una soluzione di angolo: se $r/w > a/b$ cioè $r/a > w/b$ utilizzi solo L, se $r/w < a/b$ solo K, se $r/w = a/b$ tutte le combinazioni sul vincolo hanno lo stesso costo. Quindi se $r/a > w/b$ abbiamo $K(q) = 0, L(q) = q/b$ e il costo è $wL = (w/b)q$, analogamente se $r/a < w/b$ il costo è $rK = (r/a)q$; nel caso di uguaglianza il costo è $(r/a)q = (w/b)q$. Conclusione, il costo è lineare:

$$c(q) = \min\left\{\frac{r}{a}, \frac{w}{b}\right\} \cdot q$$

Esempio (Produzione Leontief). Se $f(K,L) = \min\{aK, bL\}$ chiaramente produci con la combinazione all'angolo, quindi $q = aK = bL$ cioè $K(q) = q/a, L(q) = q/b$ da cui ricaviamo un'altra funzione lineare:

$$c(q) = \left(\frac{r}{a} + \frac{w}{b}\right) \cdot q$$

Esempio (Tre fattori produttivi). Consideriamo la funzione $f(L,K,M) = L^\alpha K^{1-\alpha} + M$, con $0 < \alpha < 1$ e $w = r = m = 1$. In questo problema con tangenze e vincolo non si va da nessuna parte, e possiamo argomentare come segue. Poiché $f(L,0,M) = f(0,K,M) = f(0,0,M)$, siccome L e K non sono gratis o nella combinazione efficiente sono entrambi positivi o sono entrambi nulli. Se sono entrambi positivi le rispettive produttività marginali della spesa devono essere uguali. La condizione in questo caso diventa $f_L = f_K$ che è $\alpha K = (1-\alpha)L$. Ma in tal caso

$$f_L = \alpha L^{\alpha-1} K^{1-\alpha} = \alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha} < 1 = f_M \ \forall M \geq 0$$

che è impossibile in una combinazione efficiente (trasferendo spesa da L ad M puoi mantenere f costante e risparmiare). Conclusione: la combinazione efficiente è $L(q) = K(q) = 0, \ M(q) = q$, e il costo $c(q) = q$.

Questa soluzione merita qualche parola in più perché è contro-intuitiva: se K o L tende a zero la sua produttività tende a infinito, e nella combinazione efficiente ne utilizzo zero di entrambi? L'intuizione suggerisce di provare a fissare $K > 0$ e impiegare L finché $f_L = 1 = f_M$. Ma non funziona. Perché

$$f_L = 1 \iff \frac{L}{K} = \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} \iff \frac{L}{K} < \frac{\alpha}{1-\alpha} \iff f_K < f_L$$

(nota che $\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} < \frac{\alpha}{1-\alpha} \iff \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} < \frac{1}{1-\alpha}$ che è vero perché $\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} < 1 < \frac{1}{1-\alpha}$). Dunque: $K > 0$ ed $f_L = 1$ implicano $f_K < 1$; ma allora devi ridurre K, e così facendo si riduce anche f_L, che devi allora diminuire finché di nuovo $f_L = 1$, ma lì si ripresenta il problema e si deve tornare a ridurre K, e poi L ecc. ecc. - fino ad $(L, K) = (0, 0)$.

Rendimento marginale della spesa

Possiamo reinterpretare la condizione di tangenza in termini di rendimento marginale della spesa? Certamente. In questo caso parleremo di "produttività" marginale della spesa. Allora: f_i è l'incremento di produzione che si ottiene aggiungendo una unità di x_i, cioè w_i unità di spesa; spendendo una unità - $\frac{1}{w_i} w_i$ - si ottiene quindi $\frac{1}{w_i} f_i$, che è per l'appunto la produttività marginale della spesa. La condizione di tangenza nel caso di (K, L) non è altro che

$$\frac{f_K}{r} = \frac{f_L}{w}$$

che dice che il rendimento marginale della spesa deve essere uguale su K ed L - altrimenti ti conviene spostarti. Riguardando la figura 1.7, nota che $f_K/f_L > r/w \iff f_K/r > f_L/w$.

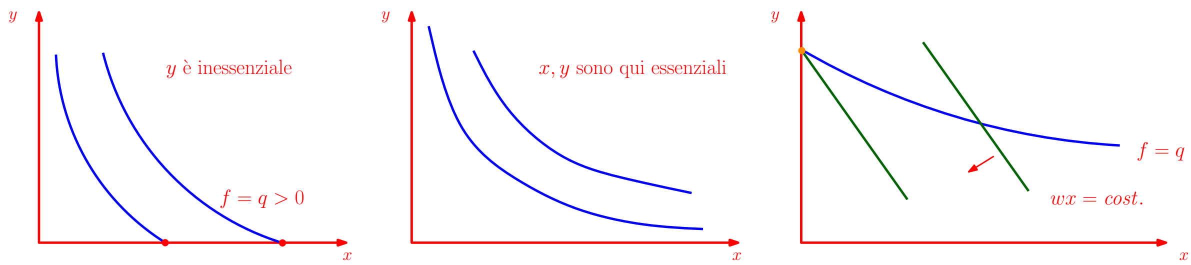
Come puoi ben indovinare il principio vale nel caso generale di n fattori: se il rendimento marginale della spesa su un fattore è maggiore che su un altro ti conviene trasferire spesa su questo, e viceversa. In un minimo interno il rendimento marginale della spesa deve essere uguale su tutti i fattori:

$$\frac{f_i}{w_i} = \frac{f_j}{w_j}.$$

Angoli e fattori essenziali

Quello che abbiamo appena detto vale per il caso di isoquanti convessi e *fattori produttivi essenziali*. L'idea, in tutto analoga al caso dei beni di consumo, è che i è un fattore essenziale quando non ne puoi fare a meno, cioè se $f(x) > 0$ implica $x_i > 0$. La figura 1.11 illustra.

Figura 1.11: Fattori essenziali e inessenziali



Nel caso di fattori essenziali non ci può essere soluzione d'angolo semplicemente perché il vincolo non contiene punti sugli assi, e con curve convesse la dimostrazione che la soluzione è caratterizzata dalla tangenza è uguale a quella già fatta per il consumatore. Nel caso ci siano fattori inessenziali ci possono essere soluzioni d'angolo come illustrato nel pannello destro della figura, dove x è inessenziale e costa di più di quanto vale, e nella soluzione ottima $x = 0$. Anche per il caso di curve concave puoi adattare la strategia usata per la massimizzazione dell'utilità.

1.4 Costi e rendimenti di scala

Come abbiamo già accennato la funzione di produzione è diversa dalla funzione di utilità nel senso che se una u rappresenta delle preferenze lo fa anche per esempio $10u$, ma per una funzione di produzione un'impresa con tecnologia $10f$ è ben più potente dell'impresa f. In gergo si dice che u è ordinale mentre f è cardinale.

Parlando delle funzioni costo abbiamo intuito che in qualche modo quelle concave, con costi medi e marginali decrescenti, rappresentano tecnologie con "economie di scala" mentre quelle convesse fanno pensare a "rendimenti decrescenti". Il concetto di *rendimenti di scala* si può esprimere in modo chiaro, e la definizione è la seguente:

$$\textit{f ha rendimenti di scala} \quad \begin{array}{c} \textit{crescenti} \\ \textit{costanti} \\ \textit{decrescenti} \end{array} \quad \textit{se } \forall t > 1 \quad f(tx) \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} tf(x)\,.$$

Dunque: rendimenti di scala crescenti se per esempio raddoppiando tutti i fattori il prodotto più che raddoppia. Analogamente per gli altri casi. [7] Nell'esempio canonico della funzione Cobb-Douglas $f(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$ abbiamo

$$f(tK, tL) = t^{\alpha+\beta} f(K, L)$$

quindi la funzione ha rendimenti di scala crescenti se $\alpha + \beta > 1$, ecc. Ricorda che per questa funzione abbiamo ricavato $c(q) = \gamma q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$ con γ una costante (pagina 9). Dunque confermiamo che la funzione costo della Cobb-Douglas è convessa se i rendimenti di scala sono decrescenti e viceversa; se $\alpha + \beta = 1$ - rendimenti costanti - è lineare.

La relazione fra rendimenti di scala e costi medi è la seguente:

Proposizione 1. *Vale la seguente implicazione:*

$$\textit{se f ha rendimenti} \quad \begin{array}{c} \textit{crescenti} \\ \textit{costanti} \\ \textit{decrescenti} \end{array} \quad \textit{allora} \quad AC \textit{ è} \quad \begin{array}{c} \textit{decrescente} \\ \textit{costante} \\ \textit{crescente} \end{array}$$

Dimostrazione. (per i curiosi) Poni $\Gamma(x) = wx$ e tieni presente che è una funzione lineare, $\Gamma(tx) = t\Gamma(x)$. Rendimenti costanti: da dimostrare che $c(q)/q = \textit{costante}$, e prendendo $q = 1$ vediamo che la costante è $c(1)$ dunque da dimostrare che $c(q) = q \cdot c(1)$. Basta dimostrare che la combinazione ottima di fattori è $x(q) = q \cdot x(1)$, perché in tal caso $c(q) = \Gamma(x(q)) = q \cdot \Gamma(x(1)) =$

[7] Nel caso di rendimenti costanti la $f(tx) = tf(x)$ vale per ogni $t > 0$ (*dimostrazione:* se $0 < t < 1$ abbiamo $f(x) = f(\frac{1}{t}tx) = \frac{1}{t}f(tx)$ perché $1/t > 1$).

$q \cdot c(1)$. Che $x(q) = q \cdot x(1)$ è facile per contraddizione: se così non fosse esisterebbe x tale che $f(x) = q$ e $\Gamma(x) < \Gamma(q \cdot x(1)) = q\Gamma(x(1))$; ma in tal caso $f(\frac{1}{q}x) = 1$ e $\Gamma(\frac{1}{q}x) = \frac{1}{q}\Gamma(x) < \Gamma(x(1))$, che contraddice l'ottimalità di $x(1)$.

Rendimenti decrescenti: basta dimostrare che $\forall q, \forall t > 1$ si ha $c(tq) > tc(q)$, perché $q' > q \iff q' = tq$ con $t = q'/q > 1$; dunque basta dimostrare che $f(x) = tq$ implica $\Gamma(x) > tc(q)$; ma $f(x) = tq$ implica $f(\frac{1}{t}x) > q$ (perché $f(\frac{1}{t}x) \leq q \Rightarrow f(x) = f(t\frac{1}{t}x) < tf(\frac{1}{t}x) \leq tq$), quindi $\Gamma(\frac{1}{t}x) = \frac{1}{t}\Gamma(x) > c(q)$. L'altro caso è analogo. □

Per la Cobb-Douglas abbiamo $AC(q) = \gamma q^{\frac{1}{\alpha+\beta}-1}$ quindi è immediato verificare la proprietà espressa nella proposizione appena dimostrata. Ma osserva anche l'implicazione più generale: se i rendimenti di scala sono crescenti per piccole quantità e poi decrescenti la curva dei costi medi avrà forma di U.

1.5 Massimizzare il profitto

Per l'impresa competitiva come sappiamo il prezzo è dato quindi i ricavi sono pq; i costi sono $c(q)$, quindi il profitto è $\pi(q) = pq - c(q)$, ricavi meno costi. Il problema della massimizzazione del profitto è dunque

$$\max_{q \geq 0} \pi(q) = \max_{q \geq 0} \; pq - c(q).$$

La soluzione dipende da p, e la indicheremo con $q(p)$.

Cosa fare in pratica? Principio generale

Cosa deve fare in pratica Marina nella sua impresa per massimizzare il profitto? Nota che la funzione profitto è del tipo *benefici meno costi*, due piatti della bilancia, un tipo di funzione che si incontra a ogni angolo di strada. Per esempio: per quante ore posso andare avanti nel bosco sapendo che per sera devo essere a casa? In pratica, in certi punti ci si ferma e ci si chiede "Allora ragazzi che facciamo, continuiamo *ancora* o torniamo?" Si guardano gli orologi, le borracce, le nuvole, e sull'altro piatto della bilancia la voglia di vedere cosa c'è più in là, la voglia di avventura. Sono sempre due piatti della bilancia, e per decidere si guarda agli incrementi marginali: "Continuiamo *un altro po'* o torniamo indietro?" O nel caso di Marina: "Aumentiamo q di un po' o riduciamo?" Si devono soppesare gli incrementi di valore e quelli di costo, e il principio generale è questo: *se il beneficio marginale è maggiore del costo marginale devi aumentare di un poco q, x o quello che è; se è minore devi ridurla.* Formalmente, per una generale funzione valore $V(x)$ abbiamo (come sappiamo da Matematica Generale):

Proposizione 2. *Considera una funzione $V(x)$, e fissa $x \in \mathbb{R}$. Per $\Delta x > 0$ sufficientemente piccolo: se il valore marginale $V'(x) > 0$ allora $V(x - \Delta x) < V(x) < V(x + \Delta x)$; se $V'(x) < 0$ al contrario $V(x - \Delta x) > V(x) > V(x + \Delta x)$.*

Dimostrazione. Poni $\phi(h) = V(x+h) - V(x) - hV'(x)$, con h non necessariamente positivo. La definizione di $V'(x) = \lim_{h\to 0}[V(x+h) - V(x)]/h$ implica $\lim_{h\to 0} \phi(h)/h = 0$. Ora osserva che $\Delta V \equiv V(x+h) - V(x) = hV'(x) + \phi(h) = h[V'(x) + \frac{\phi(h)}{h}]$. Per il teorema della permanenza del segno, per h sufficientemente piccolo $V'(x) + \frac{\phi(h)}{h}$ ha lo stesso segno di $V'(x)$; quindi se

$V'(x) > 0$ per h piccolo ΔV ha il segno di h; se $V'(x) < 0$ al contrario ΔV ha segno opposto ad h. □

Quindi: se $V'(x) > 0$ devi aumentare x di un po', se $V'(x) < 0$ devi ridurlo. *Nella classe che a noi interessa, in cui $V(x) = B(x) - C(x)$* con B beneficio e C costo, abbiamo $V'(x) = B'(x) - C'(x)$, sicché la condizione $V'(x) > 0$ è che il beneficio marginale sia maggiore del costo marginale. Da qui il principio sopra enunciato: partendo da x, se $B'(x) > C'(x)$ ti devi spostare su un vicino $x' > x$; se $B'(x) < C'(x)$ ti conviene spostarti su un $x' < x$. Il contenuto operativo di questa indicazione sta nel fatto che dal valore V' che è un limite per $\Delta x \to 0$ si deduce come spostarsi di un $\Delta x > 0$ - piccolo, ma non zero!

Tornando al profitto, questo dunque possiamo dire a Marina: cerca Δq piccolo nella cui direzione l'incremento di ricavo è maggiore dell'incremento di costo, e spingiti di un po' in quella direzione; ricomincia, e spostati finché trovi valore marginale netto positivo. Così, procedendo a tentoni, andrai nella direzione in cui π sale e alla fine troverai il massimo.

Condizioni per un massimo

Restiamo con una generica funzione $V(x)$. Da matematica sappiamo che la massimizzazione di V dipende dal comportamento del valore marginale V': per un massimo locale $x^\star$ è necessario che $V'(x^\star) = 0$, e sufficiente che $V''(x^\star) < 0$. Vogliamo ritrovare queste condizioni pensando alla scelta di Marina che ci sta sotto, alla luce del nostro principio generale espresso dalla proposizione 2. La prima condizione non caratterizza la scelta perché anche in minimo o in un flesso c'è derivata nulla. La condizione più sostanziosa è $V''(x^\star) < 0$, perché dà informazioni sul comportamento di V' in tutto un intorno di $x^\star$ e implica che localmente conviene avvicinarsi ad $x^\star$ sia da valori minori che da valori maggiori.

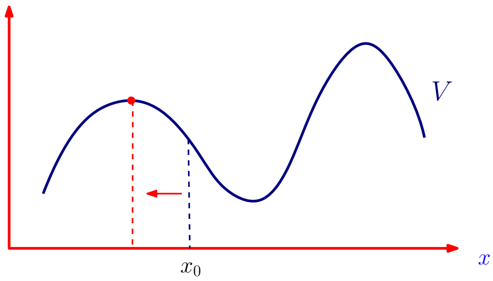
Proposizione 3. *(i) Se $x^\star$ è massimo locale $V'(x^\star) = 0$; (ii) se $V'(x^\star) = 0$ e $V''(x^\star) < 0$ $x^\star$ è massimo locale.*

Dimostrazione. (i): In un massimo non ti deve convenire spostarti, e se fosse $V'(x) \neq 0$ ti converrebbe (per la proposizione precedente). (ii): la proposizione applicata a V' dice che per Δx piccolo, essendo la sua derivata $V''(x^\star) < 0$ allora $\Delta V'$ avrà segno opposto a Δx. Cioè: vicino ad $x^\star$, per $x < x^\star$ il valore marginale $V'(x) > V'(x^\star) = 0$; per $x > x^\star$ è $V'(x) < V'(x^\star) = 0$. Cioè ancora (dalla proposizione applicata a V): per $x < x^\star$ conviene avvicinarsi ad $x^\star$, e per $x > x^\star$ pure. Quindi $x^\star$ è un massimo. □

Nota l'implicazione pratica: *se $V' = 0$ e $V'' < 0$ in $x^\star$, se parti da vicino cercando la direzione di miglioramento ti sposti verso $x^\star$ e quando ci arrivi ti fermi* (perché a sinistra di $x^\star$ hai V' positivo e a destra negativo). Nel caso che ci interessa in particolare, $V(x) = B(x) - C(x)$, la condizione necessaria è $B'(x^\star) = C'(x^\star)$ cioè beneficio marginale uguale costo marginale. La condizione sufficiente $V'' < 0$ è che vicino ad $x^\star$, per $x < x^\star$ sia $B'(x^\star) > C'(x^\star)$, e per $x > x^\star$ sia $B'(x^\star) < C'(x^\star)$.

Però... c'è un però

La qualificazione "se parti da vicino" non è da poco - se parti da troppo lontano seguendo la direzione di miglioramento puoi non arrivare al massimo della funzione. Per esempio con la funzione gobba di cammello come nella figura qui sotto se parti vicino alla gobba più bassa arrivi lì, e non sei al massimo globale.



La morale qui è che spostarsi su incrementi marginali non sempre basta - a volte ci vuole il coraggio di avventurarsi su strade poco conosciute, sperimentare idee nuove. Chissà se il programma di AI che ha vinto a *Go* non abbia fatto una cosa del genere quando ha fatto mosse che gli stessi programmatori non potevano prevedere che facesse...

Valore marginale e *sunk costs*

C'è un insegnamento del "pensare al margine" che si rivela cruciale in diverse situazioni. Letteralmente *sunk* vuol dire affondato, capirai il senso fra un attimo. Sei a cinema, e il film non ti piace; te ne andresti, ma pensi "Cavolo una volta che ho pagato il biglietto che fa me ne vado a metà?". Devi restare? No! Se il beneficio marginale di restare è negativo, restando accumuli perdita di valore (integrale della derivata...). Una volta che il biglietto è pagato il suo costo lo devi detrarre dal valore totale *comunque*, quindi il fatto che hai pagato il biglietto non deve avere alcun peso sulla decisione di restare o meno.

Un esempio meno banale riguarda il comportamento sui mercati azionari. Hai comprato un titolo a 6€ e oggi vale 4. È purtroppo comunissimo cadere nell'errore del cinema. Non vendi perché pensi che almeno devi aspettare di recuperare la perdita. Sbagliatissimo! Quello che ti deve guidare nella decisione sono le prospettive di reddito *futuro* del titolo: Se pensi che da oggi in poi prenderà più valore degli altri titoli che conosci okay, tienilo - ma se c'è un titolo che ha prospettive migliori devi vendere e comprare quello.

Se la vuoi mettere sul piano formale, supponi di avere comprato un titolo V a $t = 0$ e che la tua vita finisce a $t = T$. Il profitto sul titolo è $V(T) - V(0)$. Ma se a $t_0 \in (0, T)$ c'è un altro titolo W tale che $W(T) - W(t_0) > V(T) - V(t_0)$ devi vendere V e comprare W perché questa strategia ti dà

$$V(t_0) - V(0) + W(T) - W(t_0) > V(t_0) - V(0) + V(T) - V(t_0) = V(T) - V(0)$$

Che c'entrano gli incrementi marginali? Beh, l'espressione di sopra non è altro che

$$\int_0^{t_0} V' + \int_{t_0}^{T} W' > \int_0^{t_0} V' + \int_{t_0}^{T} V'$$

che fa vedere bene che quello che conta al tempo t_0 sono soltanto gli incrementi *futuri* di valore.

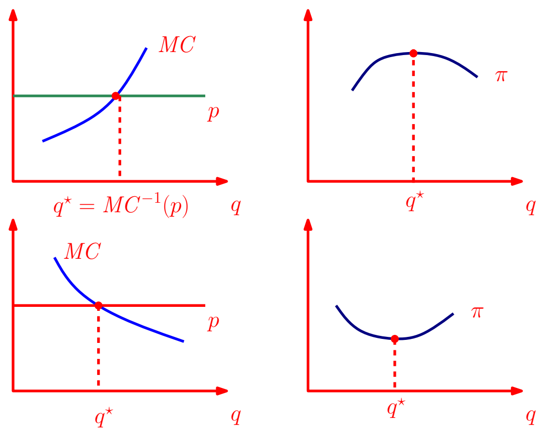
1.6 Verso la funzione di offerta

Torniamo alla massimizzazione del profitto. Ricorda che la soluzione dipende da p. La quantità scelta a prezzo p sarà l'offerta dell'impresa, $q_j^S(p)$ per l'impresa j. Il nostro valore è $\pi(q) = pq - c(q)$, dove il beneficio è il ricavo $r(q) = pq$, e $q^\star$ è massimo se $\pi'(q^\star) = 0$ e $\pi''(q^\star) < 0$. Ora $\pi'(q) = p - c'(q)$ e $\pi''(q) = -c''(q)$, quindi le condizioni per un massimo sono:

$$p = c'(q^\star), \;\; c''(q^\star) > 0.$$

Prezzo uguale costo marginale è condizione necessaria perché $p = r'(q)$ è il ricavo marginale, quindi se $p > c'(q)$ ti conviene aumentare q, se $p < c'(q)$ devi ridurla. La condizione $c''(q^\star) > 0$ per quanto abbiamo visto implica che *il costo marginale è crescente in $q^\star$.* Quindi per $q < q^\star$ è $c'(q) < p$ - ti conviene $q \uparrow$; per $q > q^\star$ è $c'(q) > p$ - ti conviene $q \downarrow$. Cioè, ti conviene sempre andare verso $q^\star$. Ovviamente se $c' = 0$ e $c'' < 0$ siamo in un punto di profitto minimo. La situazione è illustrata nella figura 1.12, dove c' viene indicato con MC - marginal cost - come faremo spesso d'ora in poi.

Figura 1.12: Condizioni per un massimo o minimo

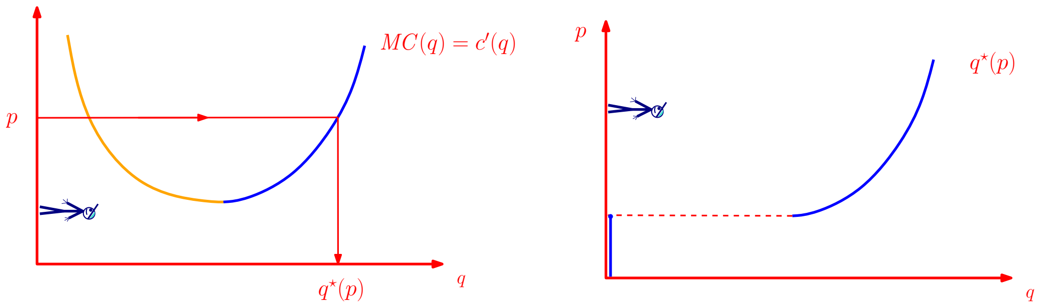


Assumendo MC crescente, nota che la condizione $p = MC(q^\star)$ dice - per definizione - che $q^\star = MC^{-1}(p)$. Vediamo dunque la situazione nei casi tipici di curve dei costi della figura 1.5. Al caso di costo marginale sempre decrescente ci pensiamo dopo. Nel caso di costi marginali crescenti abbiamo appena visto che la quantità che massimizza il profitto a prezzo p è $MC^{-1}(p)$. Vediamo il caso di costi marginali prima decrescenti e poi crescenti come nella figura 1.13.

Facciamo crescere p e vediamo qual è la $q^\star(p)$. Per $p < \min MC$ abbiamo $p < c'(q)$ per ogni $q > 0$, quindi ti conviene far scendere q, fino a zero. Dunque per tali p abbiamo $q^\star(p) = 0$. Anche per $p = \min MC$ è $q^\star(p) = 0$.[8] Per $p > \min MC$ l'uguaglianza $p = MC(q)$ è verificata in due punti, ma dove MC è decrescente c'è un minimo; la $q^\star(p)$ è come nella figura, nella parte crescente di MC. Per $p > \min MC$ possiamo dunque affermare che $q^\star(p)$ *è l'inversa della*

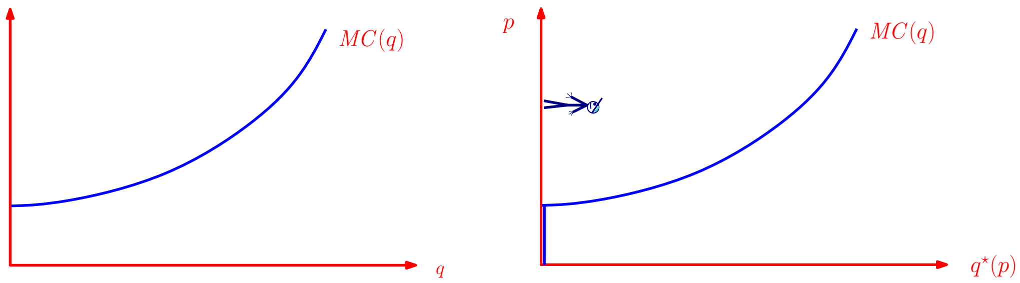
[8]Per chi ha un po' di dimestichezza con lo studio di funzioni: se il costo marginale è a forma di U e $p = \min MC$ la funzione π è sempre decrescente, con un flesso orizzontale dove MC è minimo. Quindi π è massimo per $q = 0$.

Figura 1.13: $q^\star(p)$

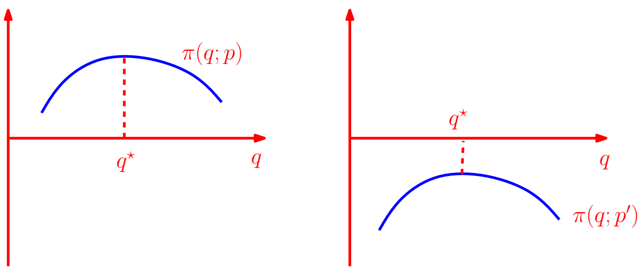


parte crescente di MC. In conclusione, la $q^\star(p)$ che massimizza il profitto è quella disegnata nel pannello destro della figura 1.13.

Nota che è venuta fuori una funzione con una discontinuità; ma la causa è la parte decrescente di MC. Se il costo marginale è sempre crescente la $q^\star(p)$ è zero fino a $p = MC(0)$ e poi uguale all'inversa di MC. Vedi figura qui sotto. Nota che $q^\star(p)$ *non è mai decrescente.*



La quantità $q^\star(p)$ che massimizza il profitto è la funzione di offerta $q_j^S(p)$? No, per la semplice ragione che puoi indovinare dalla figura qui sotto: il profitto massimo può essere negativo. Se così è meglio starsene a casa con $q = 0$. Intuitivamente questo succede per prezzi troppo bassi, cosa che confermeremo nella sezione (1.7).



Possiamo però subito concludere questo: *$q_j^S(p)$ è la scelta che massimizza il profitto, purché questo non sia negativo.* Cioè

$$q_j^S(p) = \begin{cases} q^\star(p) & \text{se } \pi(q^\star(p)) \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quand'è che $\pi(q^\star(p))$ è positivo o negativo? Non sapendo come si comporta $\pi(q^\star(p))$ non possiamo stabilire nemmeno se $q_j^S(p)$ è crescente come l'abbiamo immaginata parlando dell'offerta di Marina e Gianni all'asta delle arance. Sarà sempre crescente o troveremo eccezioni tipo beni di Giffen che la possano rendere decrescente? Per rispondere dobbiamo studiare la struttura dei costi.

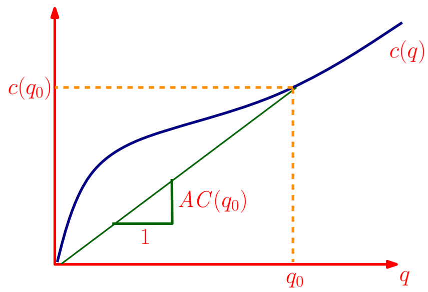
Nota che se i profitti sono nulli stiamo assumendo che l'impresa produce. Ripetiamo che questa scelta ha senso perché nei costi sono inclusi i costi impliciti uguali alla remunerazione dell'imprenditore nella sua migliore attività alternativa. Quindi profitto zero vuol dire che sei indifferente fra produrre nell'impresa e andare a fare qualcos'altro.

1.7 Struttura dei costi e funzione di offerta

Allora, quand'è che $\pi(q^\star(p)) \geq 0$? Scrivendo il profitto come quantità per profitto unitario, dato che $q \geq 0$ ricaviamo

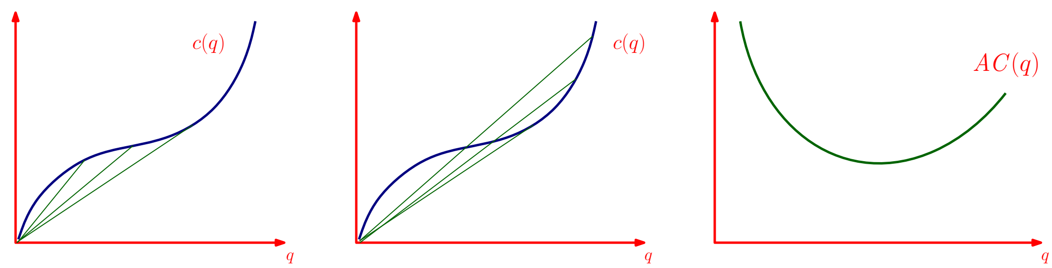
$$\pi \geq 0 \iff pq - c(q) = q[p - \frac{c(q)}{q}] \geq 0 \iff p \geq \frac{c(q)}{q} \equiv AC(q)$$

La quantità a destra è il costo per unità di prodotto - il *costo medio.* Si denota con AC, che sta per "average cost". La disuguaglianza di sopra è banale: il profitto è positivo se il profitto unitario lo è; ma insieme all'uguaglianza $p = MC$ riuscirà utile. Geometricamente, poiché $c(0) = 0$ il valore di AC è la pendenza della secante per l'origine e il punto $(q, c(q))$, vedi figura:



La curva $c(q)$ prima concava poi convessa dà luogo quindi a costi medi a forma di U, vedi figura 1.14: la pendenza della secante decresce fino a quando diventa tangente - e uguale al costo marginale - e poi cresce. [9]

Figura 1.14: Costi medi a forma di U

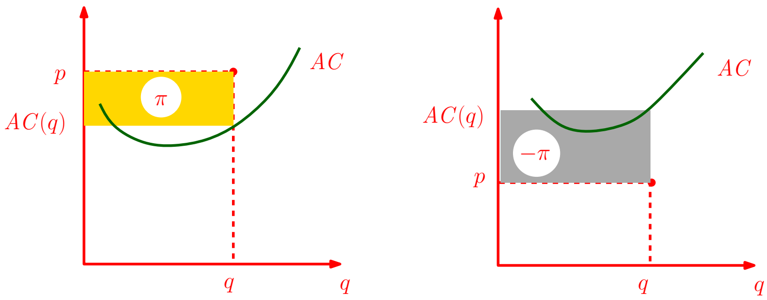


La curva del costo medio aiuta a visualizzare il profitto in un punto qualunque: $\pi = q[p - AC(q)]$ è l'area del rettangolo di base q e altezza $p - AC$, vedi la figura 1.15. Se $p < AC$ abbiamo perdite, valore uguale all'area in grigio a destra nella figura:

Nota adesso nella figura 1.14 che: la pendenza di c cioè MC è inferiore alla pendenza della secante AC mentre questa scende fino al punto di tangenza dove sono uguali, e poi quando AC

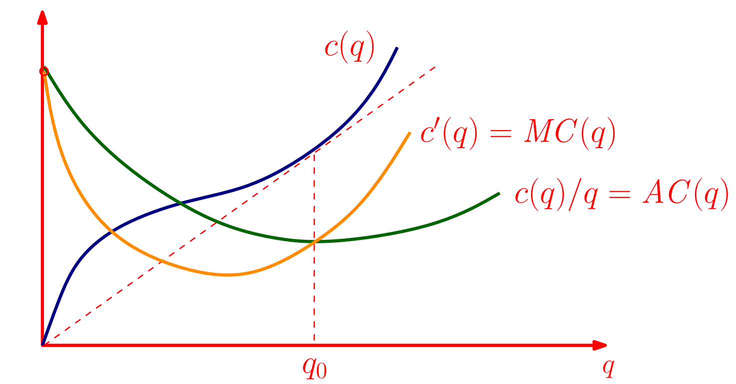
[9]Geometricamente è evidente, formalmente si può dimostrare applicando il Teorema di Lagrange.

Figura 1.15: Visualizzare profitti e perdite



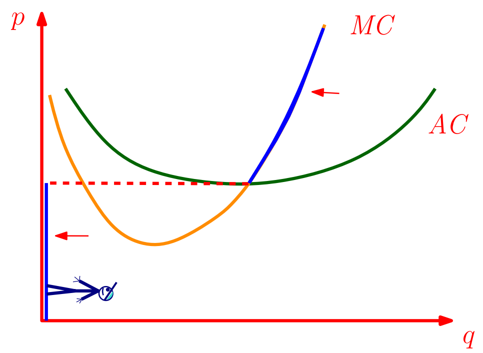
cresce $MC > AC$. Cioè: $MC < AC \Rightarrow AC \uparrow$, ed $MC > AC \Rightarrow AC \downarrow$. Questo intuitivamente è chiaro: se sto producendo a costo medio 100 e il costo di una unità aggiuntiva è 120 il costo medio sta crescendo; e viceversa. Lo confermeremo nella proposizione 4 a fine sezione; intanto osserviamo che quando AC ha forma di U questa relazione determina completamente la struttura dei costi come raffigurata nella figura 1.16: MC incrocia AC da sotto nel suo punto di minimo, in corrispondenza del punto in cui secante e tangente sono uguali.

Figura 1.16: Struttura dei costi



Dalle figure 1.16 e 1.13 è a questo punto chiaro che la funzione di offerta $q_j^S(p)$ (che come funzione di p dobbiamo guardare dall'asse verticale) è quella disegnata nella figura 1.17: la quantità $q^\star(p)$ che massimizza il profitto è zero sotto il minimo di MC e poi uguale all'inversa della sua parte crescente (figura 1.13); ma il pezzo che sta sotto AC non va bene perché per quei prezzi $p = MC < AC$ quindi $\pi < 0$ sicché $q_j^S(p) = 0$ anche lì; resta la parte crescente di MC che sta sopra la AC, perché per $p = MC > AC$ la $q^\star(p)$ fa profitti positivi quindi $q_j^S(p) = q^\star(p)$.

Figura 1.17: La quantità offerta $q_j^S(p)$ è segnata con la freccia



Quindi *siamo arrivati alla conclusione che:*

$$q_j^S(p) = \begin{cases} 0 & \textit{se } p < \min AC \\ MC^{-1}(p) & \textit{se } p \geq \min AC \, . \end{cases}$$

Poiché l'inversa di una funzione crescente è essa stessa crescente, abbiamo anche dimostrato che *la quantità offerta non è mai decrescente nel prezzo.* È costante, uguale a zero per p troppo basso (precisamente $p < \min AC$), e poi strettamente crescente. Niente eccezioni.

Esempio (Cobb-Douglas). Deriviamo la quantità offerta per la Cobb-Douglas $F(K, L) = K^\alpha L^\beta$ nei tre casi $\alpha + \beta \gtreqless 1$ (ponendo $A = 1$ per semplicità). Da $c(q) = \gamma q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$ segue $AC(q) = \gamma q^{\frac{1}{\alpha+\beta}-1} = (\alpha + \beta)MC(q)$. Ricorda che $\gamma = (\alpha + \beta)\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{w}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$ per $A = 1$.

Con $\alpha + \beta < 1$ la $AC < MC$ cresce partendo da zero quindi la curva di offerta parte da $p = 0$ senza discontinuità; per trovarla invertiamo MC risolvendo in q l'equazione $p = MC$: da $p = \frac{\gamma}{\alpha+\beta} q^{\frac{1-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}} = \left(\frac{r}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{w}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}}$ otteniamo

$$q^S(p) = \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} \left(\frac{\beta}{w}\right)^{\frac{\beta}{1-(\alpha+\beta)}} p^{\frac{\alpha+\beta}{1-(\alpha+\beta)}}$$

che è crescente, e convessa se $\alpha + \beta > 1/2$.

Se $\alpha + \beta = 1$ abbiamo $AC = MC = \gamma$ che non sono invertibili. Non abbiamo trattato esplicitamente questo caso, ma possiamo osservare che qui $\pi(q) = q[p - \gamma]$. Quindi per $p < \gamma$ il profitto massimo è dato ovviamente da $q = 0$; per $p = \gamma$ qualunque q fa profitto zero quindi l'impresa può offrire qualunque q; e per $p > \gamma$ il problema non ha soluzione perché più produci più guadagni. In definitiva possiamo scrivere

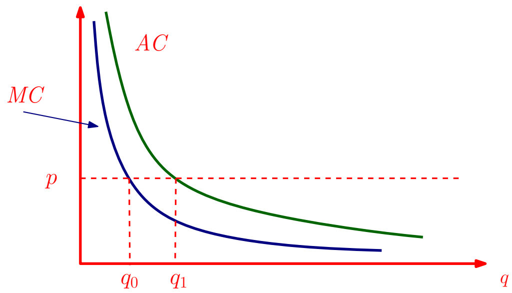
$$q^S(p) = \begin{cases} 0 & p < \gamma \\ [0, \infty) & p = \gamma \\ \infty & p > \gamma \end{cases}$$

Ovviamente $p > \gamma$ non sarà mai osservato perché ogni impresa è disposta a fornire qualunque quantità anche a prezzo γ, quindi non sembra ragionevole che ci sia un mercato stabile con tante piccole imprese com'è il mercato competitivo che immaginiamo. Osserviamo anche che data la forma della funzione quantità offerta, in questo caso è più naturale considerare il prezzo di offerta: $p_j^S(q) = \gamma \; \forall q$ che è il prezzo minimo che l'impresa accetta per produrre q qualunque.

Nel caso $\alpha + \beta > 1$ abbiamo $AC > MC$ decrescente, con $\lim_{q\to\infty} AC = \lim_{q\to\infty} MC = 0$. Poiché MC è decrescente la condizione $p = MC$ trova un minimo. Fissato p, partendo dal minimo dove $p = MC$, andando indietro si guadagna fino a $q = 0$ con profitto zero; ma andando avanti il profitto $q[p - AC]$ cresce e quindi di nuovo il problema non ha soluzione perché più produci più guadagni quindi $q_j^S(p) = \infty \; \forall p > 0$. Vedi figura 1.18. Sembra chiaro che con una struttura dei costi siffatta un mercato competitivo ha poco senso, perché qualunque impresa tenderebbe ad ingrandirsi a dismisura. Confermeremo più avanti.

Chiudiamo col risultato che restava da dimostrare.

Figura 1.18: Cobb-Douglas, rendimenti crescenti



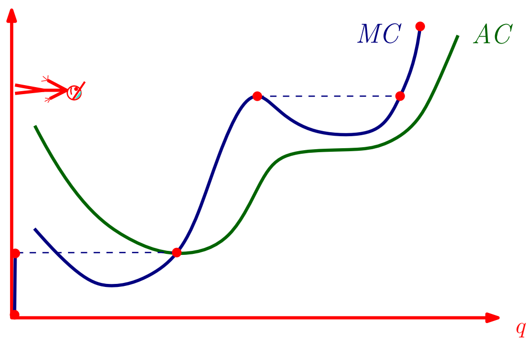
Per $q \geq q_0$ è $p > MC$ quindi $\pi'(q) > 0$, i profitto cresce. Per $q > q_1$ abbiamo $p > AC$ quindi $\pi > 0$. Poiché $\lim_{q\to\infty} \pi = \infty$ il problema non ha soluzione.

Proposizione 4. *Con costi medi ad U, detto $q_0 > 0$ il punto di minimo AC risulta $MC < AC$ per $q < q_0$, $MC(q_0) = AC(q_0)$ ed $MC > AC$ per $q > q_0$.*

Dimostrazione. Se fai due passaggi vedi che $AC'(q) = [MC - AC]/q$ per $q > 0$. Poiché AC è convessa AC' è crescente, e dal fatto che $AC'(q_0) = 0$ ricaviamo allora $AC' < 0$ per $q < q_0$ ed $AC' < 0$ per $q > q_0$, e quanto asserito segue direttamente dall'espressione di $AC'(q)$. □

Pozzangherina

A questo punto possiamo fare una piccola precisazione. Abbiamo detto che la quantità offerta è l'inversa della parte della curva del costo marginale sopra il minimo del costo medio. Sappiamo anche che la condizione del secondo ordine per l'ottimo è che MC sia crescente, e senza dire niente la parte rilevante della curva MC, dopo il minimo del costo medio dove questo cresce, l'abbiamo effettivamente disegnata sempre crescente. Ma il fatto che il costo medio sia crescente implica sì che il costo marginale è maggiore del costo medio - ma non che sia *crescente*. Per esempio nella figura qui sotto non lo è: nella parte in cui AC si appiattisce MC gli si avvicina decrescendo per un tratto.



Non succede niente di terribile, la curva di offerta resta definita dalle parti crescenti di MC sopra il minimo di AC, ma avrà più punti di discontinuità - nella figura è descritta dai tratti delimitati dai puntini e ne ha due, assumendo che per i p in cui ci sono due massimi locali (due punti in cui $p = MC$ ed MC è crescente) la scelta ottima sia quella con q più basso).

Però se ci fai caso noi abbiamo sempre disegnato la AC non solo crescente dopo il minimo, ma anche *convessa*. E questo in effetti implica che in quel tratto i costi marginali sono crescenti, come li abbiamo disegnati. La dimostrazione di questo fatto è immediata: usando la derivata che abbiamo calcolato sopra, e ricordando che convessità uguale derivata seconda positiva, otteniamo (verifica facilmente)

$$0 < AC'' = \frac{1}{q}[MC' - 2AC']$$

da cui se $AC' > 0$ lo è necessariamente anche $MC' > 2AC'$.

2 Scelta della combinazione produttiva

Abbiamo fino a questo punto immaginato che la scelta dell'impresa avvenga in due stadi: primo, per ogni q scegli la combinazione a costo minimo $x(q)$, e a quel punto sai che $c(q) = wx(q)$; secondo, massimizza $pq - c(q)$. È corretto procedere così? Intanto: è giusto chiederselo? Sì. Perché in fondo l'impresa sceglie liberamente una combinazione $x \in \mathbb{R}^n_+$: quante arance, cacciaviti, segretarie, metri quadri... Se usi x paghi wx e produci $q = f(x)$. Se ci pensi, il problema dell'impresa è (usando la lettera maiuscola per i profitti):

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n_+} \Pi(x) = \max_{x \in \mathbb{R}^n_+} pf(x) - wx. \tag{MaxP}$$

Diciamocelo: *per risolverlo non c'è bisogno di ricavare la funzione costo.* Hai una ben definita funzione $\Pi(x)\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$; prendila e massimizzala; trovata la soluzione $x(p)$ produrrai $q(p) = f(x(p))$. Fine. In questa sezione vedremo però che: primo, risolvere questo direttamente è equivalente al processo in due stadi che abbiamo seguito nel senso che la scelta che ne risulta è uguale; secondo, che in quel modo si mettono in evidenza gli aspetti più rilevanti. Per inciso, $\Pi(x) = \Pi(x; p, w)$; ce lo ricorderemo quando serve.[10]

2.1 Equivalenza

Prendiamo la via diretta per risolvere il problema. Non possiamo andare troppo nei dettagli sulle condizioni del secondo ordine; ci basti sapere che le ipotesi di convessità degli isoquanti implica che in un massimo interno le condizioni del primo ordine (quelle sulla tangenza per capirci) sono anche sufficienti. Ci concentriamo su queste. In termini di spostamenti marginali vale sempre il principio che non ti deve convenire spostarti (o non puoi); se ti puoi spostare sia avanti che indietro questo si traduce in derivata zero come in $\mathbb{R}$, più precisamente derivata zero in ogni direzione. Lo enunciamo per una generica funzione φ:

Proposizione 5. *Se $x^\star$ è un massimo locale per $\varphi\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ ed $x^\star_i > 0$ allora $\varphi_i(x^\star) = 0$.* [11]

Dimostrazione. Scriviamo $x = (x_i, x_{-i})$ raccogliendo le altre coordinate. Se $x^\star$ è massimo per φ con $x^\star_i > 0$ allora $x^\star_i$ è massimo interno per $g(x_i) = \varphi(x_i, x^\star_{-i})$ quindi deve essere $0 = g'(x^\star_i) = \varphi_i(x^\star)$. □

Nota che le condizioni $\varphi_i(x) = 0, i = 1, \ldots, n$ sono un sistema di n equazioni in n incognite, e stiamo parlando del caso in cui per trovare il massimo basta risolvere questo sistema. Nel

[10] *Scorciatoia:* se hai fretta leggi solo i due paragrafi che cominciano in rosso di questa sezione.
[11] *Locale* vuol dire che $\varphi(x^\star) \geq \varphi(x)$ per $x \in \mathbb{R}^n_+$ sufficientemente vicino ad $x^\star$.

nostro caso la funzione φ è il profitto Π, e $\Pi_i(x) = pf_i(x) - w_i$; quindi una combinazione ottima interna $x^\star$ è soluzione del sistema

$$pf_i(x) = w_i,\ i = 1, \dots, n.$$

Sempre lo stesso principio di costi e benefici marginali: l'impiego di una unità addizionale del fattore i ha un beneficio pf_i (f_i unità di prodotto a prezzo p) e un costo w_i; se questi non fossero uguali ti converrebbe spostarti. L'assunzione che f_i decresce garantisce che finirai su $x^\star$ se parti abbastanza vicino.

Per inciso, possiamo verificare subito che la scelta $q(p) = f(x(p))$ è crescente per i valori di p dove è positiva, come la $q^\star$ vista prima. Questo segue direttamente dall'assunzione di produttività marginali decrescenti, e la dimostrazione è questa: La scelta ottima è data da $pf_i = w_i$. Supponi che p aumenti; w_i è dato, quindi f_i va ridotta - cioè x_i va incrementata. Questo vale per ogni i, dunque se p sale cresce l'impiego di tutti i fattori, e dunque la quantità prodotta.

Esempio (Cobb-Douglas (ovviamente)). Considera la funzione $f(K, L) = K^\alpha L^\beta$ (ponendo per semplicità $A = 1$). Le due condizioni di ottimo sono

$$\alpha p K^{\alpha-1} L^\beta = r \quad \beta p K^\alpha L^{\beta-1} = w$$

dalle quali vediamo che $rK/\alpha = wL/\beta$; sostituendo $L = \frac{r}{w}\frac{\beta}{\alpha}K$ nella prima condizione otteniamo

$$K(p, w, r) = \left[\frac{\alpha}{r}p\left(\frac{r}{w}\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta\right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} = \left[\left(\frac{\alpha}{r}\right)^{1-\beta}\left(\frac{\beta}{w}\right)^\beta p\right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}.$$

Per scrivere L: gli esponenti di α/r e β/w diventano rispettivamente $\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta} - 1 = \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}$ e $\frac{\beta}{1-\alpha-\beta} + 1 = \frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}$; quindi

$$L(p, w, r) = \left[\left(\frac{\alpha}{r}\right)^\alpha\left(\frac{\beta}{w}\right)^{1-\alpha} p\right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}.$$

Osserviamo che la scelta produttiva è dunque

$$\begin{aligned} q(p, w, r) &= \left[\left(\frac{\alpha}{r}\right)^{1-\beta}\left(\frac{\beta}{w}\right)^\beta p\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}\left[\left(\frac{\alpha}{r}\right)^\alpha\left(\frac{\beta}{w}\right)^{1-\alpha} p\right]^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \\ &= \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{\beta}{w}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} p^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \end{aligned}$$

che non a caso è quella che abbiamo ottenuto nella sezione 1.7 con il procedimento in due stadi.

L'equivalenza fra la via diretta e la decomposizione, che abbiamo appena verificato per la scelta della quantità con la Cobb-Douglas, vale in generale come ora dimostreremo. La soluzione del problema dipende dai parametri (p, w), è una $x(p, w)$. Come prima tralasciamo w, quindi scriveremo $x(p)$. La quantità prodotta con la combinazione che massimizza il profitto è $q(p) = f(x(p))$. La domanda cruciale è: *è questa la stessa $q^\star(p)$ che abbiamo trovato nel* *procedimento a due stadi?* O la risposta è sì oppure eravamo completamente fuori strada. Dobbiamo guardare meglio il problema (MaxP).[12]

Per cominciare, l'idea dei due stadi è semplice: devo cercare un massimo su una regione (qui $\mathbb{R}^n_+$)? La suddivido in pezzettini, cerco il massimo in ogni pezzettino e poi prendo il massimo dei massimi, è quello sarà il massimo cercato. Un piano per esempio lo posso dividere in quadratini, o in fasce orizzontali o verticali, o in rette parallele... o in isoquanti. Per curiosità, l'enunciato formale vale in generale:

Lemma 1. *Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ e per una famiglia di sottoinsiemi $A_\alpha \subset A, \alpha \in \mathcal{A}$ sia $A = \cup_\alpha A_\alpha$ con $A_\alpha \cap A_{\alpha'} = \emptyset$ per $\alpha \neq \alpha'$. Allora*

$$\max{}_{x\in A} f = \max{}_{\alpha\in\mathcal{A}} \max{}_{x\in A_\alpha} f$$

Cioè, se $x^\star$ è il massimo globale su A e $x(\alpha)$ sono i massimi sugli A_α, risulta $f(x^\star) = \max{}_{\alpha\in\mathcal{A}} f(x(\alpha))$.

Dimostrazione. Poiché $A = \cup_\alpha A_\alpha$ sarà $x^\star = x(\bar{\alpha})$ per un $\bar{\alpha}$, quindi $f(x^\star) = f(x(\bar{\alpha})) \leq \max{}_{\alpha\in\mathcal{A}} f(x(\alpha))$. D'altra parte per ogni α è $f(x(\alpha)) \leq f(x^\star)$ quindi anche $\max{}_{\alpha\in\mathcal{A}} f(x(\alpha)) \leq f(x^\star)$. □

Nel nostro caso come avrai indovinato il modo furbo di dividere $\mathbb{R}^n_+$ è quello di dividerlo in isoquanti di f. Dunque per ogni q cerco il massimo profitto sulla curva di livello $f(x) = q$ - in questa fase q è un numero! - e poi prendo il massimo dei massimi su q. Applicando il lemma otteniamo

$$\max{}_{x\in\mathbb{R}^n_+} \Pi(x) = \max{}_{q\geq 0} \max{}_{x:f(x)=q} \Pi(x)$$

Questi sono i due stadi: il primo è il problema "interno" $\max{}_{x:f(x)=q} \Pi(x) = \max{}_{x:f(x)=q} [pf(x) - wx]$ sulla curva di livello $f(x) = q$, che ha una soluzione $x(q)$; il secondo quello esterno, $\max{}_{q\geq 0} \Pi(x(q))$. Ora guarda al primo stadio: qui per tutte le x che posso scegliere è per costruzione $f(x) = q$, costante; al variare di x cambia solo il costo wx. E dato $pf(x) = pq$, la differenza è maggiore quanto più piccolo è il numero che sottrai, cioè quanto minore è il costo. In altre parole:

$$\max{}_{x:f(x)=q} \Pi(x) = \max{}_{x:f(x)=q} [pq - wx] = pq - \min{}_{x:f(x)=q} wx.$$

Dunque per ogni q la soluzione del problema interno è esattamente la combinazione che minimizza il costo di produrre q; e poiché per definizione $\min{}_{x:f(x)=q} wx = c(q)$ abbiamo $\max{}_{x:f(x)=q} \Pi(x) = pq - c(q)$, da cui per quanto visto applicando il lemma otteniamo

$$\max{}_{x\in\mathbb{R}^n_+} \Pi(x) = \max{}_{q\geq 0} [pq - c(q)] = pq^\star(p) - c(q^\star(p)).$$

La conclusione è che risolvere (MaxP) direttamente è effettivamente equivalente a decomporlo in due stadi come abbiamo fatto prima: la quantità prodotta è esattamente $q^\star(p)$; e poiché il costo è $c(q^\star(p))$ la combinazione che si usa per produrla è quella che la produce a costo minimo.

[12] Assumiamo implicitamente che le soluzioni siano sempre uniche per non creare complicazioni fuori tema.

Più formalmente, distinguendo il processo diretto "1s" e quello in due stadi "2s", abbiamo:[13]

Proposizione 6. *Siano $x^{1s}(p)$ la soluzione di $\max_{x\in\mathbb{R}^n_+} pf(x) - wx$ e $q^{1s}(p) = f(x^{1s}(p))$. Sia d'altra parte $x(q)$ la soluzione di $\min_{x:\, f(x)=q} wx$, $c(q) = wx(q)$, e $q^{2s}(p)$ la soluzione di $\max_{q\geq 0} pq - c(q)$. Abbiamo allora: $q^{1s}(p) = q^{2s}(p) \equiv q(p)$, ed $x^{1s}(p) = x(q(p))$.*

Perché abbiamo studiato la via indiretta? Perché è più rilevante in pratica. Dato w, se ci pensi la funzione costo è stabile. Dopo un po' di prove imparo per esempio se per risolvere i problemi di bilancio nella mia impresa mi conviene prendere un diplomato in ragioneria oppure un laureato in economia d'azienda; e così per gli altri fattori, sperimentando imparo cosa fare - in base alla mia f - per produrre q in modo efficiente. In altre parole la funzione costo si impara e resta lì; poi resta da decidere come reagire alle variazioni della domanda, cioè come regolare q in funzione del prezzo - cioè massimizzare $pq - c(q)$.

2.2 Margini e margini

Nota che i margini che si usano nelle due strade sono diversi. Nella massimizzazione di $pq-c(q)$ il margine è l'unità della quantità prodotta: $p = c'(q)$. Risolvendo (MaxP) direttamente il margine è l'unità del fattore produttivo: $pf_i = w_i$. Ma scrivendo questa come $p = w_i/f_i$, dato che deve essere $p = c'(q)$ deve essere anche $w_i/f_i = c'(q)$ per ogni i, cioè anche $pf_i = w_i$ è "prezzo uguale costo marginale".

Per vedere che $w_i/f_i = c'(q)$ dobbiamo tornare al margine q. Qual è il costo di produrre una unità in più *usando soltanto* x_i? Se aggiungi una unità di x_i spendi w_i e ottieni f_i unità in più di prodotto. Se spendi δw_i su i aggiungi δx_i unità e ottieni un incremento di δf_i unità di prodotto. Quindi (con $\delta = 1/f_i$) spendendo $\frac{1}{f_i}w_i$ su i si ottiene $\frac{1}{f_i}f_i = 1$ unità addizionali di prodotto. Conclusione, il costo marginale di ottenere una unità addizionale di prodotto utilizzando il fattore i è effettivamente w_i/f_i.

Dato che w_i/f_i è il costo marginale di produrre q, è chiaro che in un punto di ottimo debba essere $w_i/f_i = w_j/f_j$. Se per esempio fosse $w_i/f_i > w_j/f_j$ potrei ridurre la spesa di w_i/f_i sul fattore i e aumentarla di w_j/f_j su j: produrrei la stessa q e intascherei $w_i/f_i - w_j/f_j > 0$. Il costo marginale di produzione deve essere per ogni fattore uguale al beneficio marginale, cioè p.

2.3 Elasticità di sostituzione

Quanto dovrai cambiare la tua combinazione ottima di fattori se cambiano i prezzi relativi? La risposta è come al solito in termini relativi, di elasticità. Per isoquanti convessi e scelte interne sappiamo che $f_i/f_j = w_i/w_j$; e la proporzione in cui i fattori sono utilizzati è data da x_j/x_i - se aumenta il prezzo relativo di i vuoi ridurne la proporzione cioè aumentare x_j/x_i. La misura di quanto cambia la scelta ottima di x_j/x_i al variare del loro prezzo relativo, in termini di elasticità, è data da

$$\sigma_{ij}(x) = \frac{d\ln(x_j/x_i)}{d\ln(f_i/f_j)}$$

[13] Tralasciamo al solito la dipendenza da w

che è una proprietà di f. Quanto maggiore questo valore tanto più pronunciata la variazione della combinazione ottima in risposta a variazioni del contesto. In generale σ_{ij} dipende da x, ma per una classe abbastanza ampia di funzioni è costante.

Esempio. Per la Cobb-Douglas $f = K^\alpha L^\beta$ dobbiamo calcolare $d\ln(L/K)/d\ln(f_K/f_L)$. Come abbiamo già visto $f_K/f_L = \alpha L/\beta K$ dunque $\ln(L/K) = \ln(f_K/f_L) - \ln(\alpha/\beta)$ da cui $\sigma = 1$.

Esempio (La classe CES). La classe di funzioni ad elasticità costante a cui appartiene la Cobb-Douglas con $\alpha + \beta = 1$ è data da

$$f(K, L) = [\alpha K^r + (1 - \alpha)L^r]^{1/r}, \quad r \leq 1$$

che è nota come classe *CES* (constant elasticity of substitution). Calcoliamo:

$$\frac{f_K}{f_L} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{L}{K}\right)^{1-r}$$

da cui $\ln(f_K/f_L) = (1 - r)\ln(L/K) + \ln[\alpha/(1 - \alpha)]$, sicché $\sigma \equiv \sigma_{LK} = 1/(1 - r)$. Per $r \to 1$ si ottiene la funzione lineare $aK + bL$ che ha elasticità di sostituzione infinita: per funzioni con isoquanti quasi rettilinei, se cambia il prezzo relativo dei fattori la combinazione ottima salta da un estremo all'altro.

La Cobb-Douglas si ottiene dalla CES per $r \to 0$. Per dimostrarlo basta provare che $\ln f \to \ln K^\alpha L^{1-\alpha}$ per $r \to 0$. Fissa K ed L, poni $h(r) = \ln[\alpha K^r + (1 - \alpha)L^r]$ ed osserva che $h(0) = 0$; quindi $\lim_{r\to0} \ln f = \lim_{r\to0} h(r)/r = h'(0)$. Questa viene $\ln K^\alpha L^{1-\alpha}$ come volevamo. Quindi

$$\lim{}_{r\to0}[\alpha K^r + (1 - \alpha)L^r]^{1/r} = K^\alpha L^{1-\alpha}$$

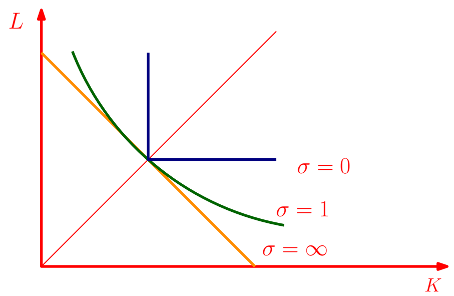
che conferma il fatto che la Cobb-Douglas ha elasticità di sostituzione uguale ad 1.

Per $r \to -\infty$ si ottiene la funzione Leontief sulla bisettrice cioè $\min\{K, L\}$, che ha elasticità di sostituzione zero (ovviamente!). Per dimostrare questo fissiamo per esempio $K < L$; con una messa in evidenza calcolare il limite è facile:

$$f = \alpha^{1/r}K[1 + \frac{1-\alpha}{\alpha}(K/L)^{-r}]^{1/r} \to K \text{ per } r \to -\infty.$$

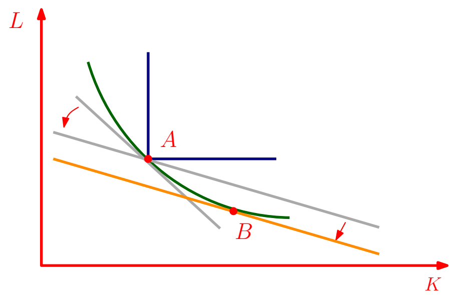
Il quadro generale è illustrato nella figura 2.1. Geometricamente, l'elasticità di sostituzione è una misura inversa della curvatura locale della curva di livello.

Figura 2.1: Classe *CES*



Che tipo di tecnologie assorbono meglio variazioni dei prezzi dei fattori, quelle con σ alta o bassa? Dato q la risposta è: quelle più elastiche. Nella figura 2.2 c'è illustrato un caso limite, in cui una delle due ha elasticità zero: se si riduce il tasso di interesse sulla Leontief la combinazione non cambia, mentre sull'altra ci si può spostare su un isocosto più basso producendo la stessa quantità. Questa non è la fine della storia perché ovviamente cambiando i prezzi dei fattori cambia la funzione costo e quindi anche la quantità scelta. Daremo una una risposta in un caso particolarmente semplice nel prossimo capitolo. C'è da dire per concludere che come vedremo in seguito la flessibilità entra in gioco anche nel caso in cui hai dimensionato l'impianto (cioè fissato il valore di K) in previsione di un certo valore di q e poi ti ritrovi a dover produrre $q' \neq q$ perché sono cambiate le condizioni della domanda (cioè p).

Figura 2.2: Reazioni alle variazioni dei prezzi dei fattori



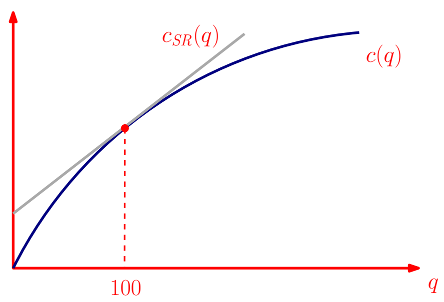
3 Fattori fissi: le scelte di breve periodo

Ricapitoliamo il processo in due stadi che abbiamo descritto. L'impresa sceglie $x \in \mathbb{R}^n_+$ e produce $q = f(x)$ per massimizzare il profitto decomponendo il problema: per ogni q trova la combinazione di minimo costo per produrla $x(q)$ risolvendo $\min wx$ sull'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n_+ : f(x) = q\}$; posto $c(q) = wx(q)$, scegli la quantità da produrre risolvendo $\max pq - c(q)$ su $q \geq 0$. Questo è "il problema della vita" dell'impresa, la scelta della combinazione di *tutti* i fattori da impiegare per produrre e mettere in vendita. Ma non è (per fortuna!) il problema che Marina deve affrontare ogni giorno in azienda. Su alcuni fattori si decide quotidianamente ("la signora Margiotta ha ordinato dieci cassate, esco a cercare altra ricotta"), ma altri - numero di addetti, le attrezzature, dimensione degli impianti - comportano scelte "strategiche" che si riconsiderano in archi temporali più lunghi. In altre parole, *nel breve periodo alcuni fattori sono fissi.* Ovviamente quali sono i fattori fissi dipende da quanto breve è il breve periodo: se è dieci minuti pure la ricotta è fattore fisso; se è una stagione saranno fissi i bagnini di uno stabilimento balneare; e così via. In ogni caso, se l'arco di tempo considerato non è troppo lungo, *alcuni* fattori saranno fissi. *Ciò ha due implicazioni:* primo, la loro quantità non è oggetto di scelta; secondo, il loro costo va sostenuto indipendentemente dalla quantità prodotta. Guardiamo dunque più da vicino alle scelte che chiameremo "di breve periodo" per significare che siamo in presenza di fattori fissi. In questa terminologia le scelte che abbiamo analizzato finora - quelle in cui tutti i fattori sono variabili - le chiameremo scelte "di lungo periodo". Useremo le abbreviazioni SR - short run - per breve periodo e LR - log run - per lungo periodo.

3.1 La combinazione di fattori variabili

In sostanza, *la scelta di breve periodo consiste nell'adattarsi alle circostanze, vincolati dal rispetto degli impegni di lungo periodo.* Nel nostro modellino è la scelta della combinazione di fattori variabili in funzione del livello dei fattori fissi. Conviene vedere subito di cosa stiamo parlando in un contesto familiare.

Esempio (banale ma la sostanza è questa). Supponi di avere $f(K, L) = KL$ e prezzi $r = w = 1$. La f è la solita Cobb-Douglas; sappiamo che senza restrizioni per produrre q scegli $K(q) = L(q) = \sqrt{q}$ (dall'esempio di pagina 9). Per produrre 100 sceglieresti $(10, 10)$, ma supponi che K è fisso - non lo puoi cambiare. Se $K = 10$ ovviamente sceglierai $L = 10$, ma se $K = 4$ per produrre $q = 100$ dovrai necessariamente usare $L = 25$. Ovviamente spenderai di più: a $(10, 10)$ spenderesti 20, mentre a $(4, 25)$ spendi 29. Analogamente, se devi produrre $q = 36$ la scelta ottima senza restrizioni è $(6, 6)$; se però $K = 10$ - sovradimensionato, perché sarebbe la quantità ottima se volessi $q = 100$ - allora sceglierai $L = 3.6 < 6$. Di nuovo spendi di più: con $(6, 6)$ spendi 12, con $(10, 3.6)$ spendi 13.6. Giusto per continuare a fare i conti, da $K(q), L(q)$ con $r = w = 1$ troviamo $c(q) = 2\sqrt{q}$ (concava, ricorda che KL ha rendimenti crescenti...). Invece con $K = 10$ fisso per produrre q devi usare L tale che $10L = q$ cioè $L_{SR} = q/10$ - cominciamo a usare "*SR*" per *short run* - e il relativo costo sarà $c_{SR}(q; K = 10) = r \cdot 10 + w \cdot q/10 = 10 + \frac{1}{10}q$. Come vedi nella figura qui sotto $c_{SR} \geq c$ e le due curve si toccano quando $q = 100$ - dove $K = 10$ è il capitale che sceglieresti comunque.



Vedremo adesso che quello che succede nell'esempio è vero in generale. Ricorda che $c(q) = \min_{x:\, f(x)=q} wx$ con soluzione $x(q)$. Dovendo adesso distinguere fattori fissi e variabili suddividiamo x ponendo $x = (x_f, x_v)$ dove x_f sono le quantità date dei fattori fissi ed x_v sono i fattori variabili cioè le variabili di scelta; e suddividendo anche $w = (w_f, w_v)$ scriviamo $wx = w_f x_f + w_v x_v$. La rigidità di lungo periodo è rappresentata dal fatto che il costo dei fattori fissi $w_f x_f$ va pagato indipendentemente dalla quantità prodotta - non per niente si chiama *costo fisso.* Lo indicheremo con $\phi(x_f)$, omettendo la dipendenza da w. Per produrre q *dato* x_f minimizzi sempre wx ma *puoi scegliere solo* x_v e influenzare solo i costi variabili $w_v x_v$, quindi risolvi

$$\min w_v x_v \text{ con vincolo } \{x_v \geq 0\colon f(x_f, x_v) = q\}.$$

Chiama $x_v(q; x_f)$ la soluzione di questo. *Il costo variabile per produrre q* è dunque $w_v x_v(q; x_f) \equiv v(q; x_f)$. Indicando con $c_{SR}(q; x_f)$ il costo di breve periodo, abbiamo in conclusione

$$c_{SR}(q; x_f) = \min_{x_v:\, f(x)=q} [w_f x_f + w_v x_v] = \phi(x_f) + v(q; x_f). \tag{CSR}$$

Ricapitolando: la combinazione di lungo periodo è $x(q) = (x_f(q), x_v(q))$ e costa $c(q)$; quella di breve è $(x_f, x_v(q; x_f))$ e costa $c_{SR}(q; x_f)$.

Nell'esempio succede che con fattori fissi spendi sempre di più, a meno che quelli non siano fissati al livello che sceglieresti se potessi - cioè $x_f(q)$ - nel qual caso puoi scegliere $x_v = x_v(q)$ arrivando a $c(q)$. E questo è sempre vero:

Proposizione 7. *(i) Per ogni x_f si ha $c_{SR}(q; x_f) \geq c(q)$; (ii) per $x_f = x_f(q)$ si ha $x_v(q; x_f) = x_v(q)$ e $c_{SR}(q; x_f) = c(q)$.*

Dimostrazione. (i) $wx(q) \leq wx$ per ogni x tale che $f(x) = q$; prendendo $x = (x_f, x_v(q; x_f))$ si ottiene $c(q) = wx(q) \leq w_f x_f + w_v x_v(q; x_f) = c_{SR}(q; x_f)$. (ii) Se $x_f = x_f(q)$ abbiamo $f(x_f, x_v(q)) = q$ quindi $x_v(q)$ è una scelta possibile dato x_f; quindi $c_{SR}(q; x_f) \leq w_f x_f + w_v x_v(q) = c(q)$; dunque $x_v(q)$ è la scelta ottima e costi di breve e lungo sono uguali. □

3.2 Costi fissi e costi medi

I fattori fissi comportano costi fissi, e ovviamente meno produci più questi costi pesano. Per la precisione, dato x_f il costo fisso unitario $\phi(x_f)/q$ va a infinito per $q \to 0$. Vedremo che questo implica, con un'ipotesi aggiuntiva, che i costi medi totali hanno forma ad U.

I costi di breve sono $c_{SR}(q; x_f) = \phi(x_f) + v(q; x_f)$; ma fissiamo x_f e omettiamola per leggere meglio, scrivendo $c_{SR}(q) = \phi + v(q)$. Nota che poiché $f(x_f, 0) \geq 0$ puoi sempre usare $x_v = 0$ per produrre $q = 0$; quindi il costo variabile $v(0) = 0$, e $c_{SR}(0) = \phi$. Osserva inoltre che i costi marginali sono solo quelli variabili: $MC_{SR}(q) \equiv c'_{SR}(q) = v'(q)$. I costi medi $AC_{SR} = c_{SR}/q$ sono invece somma di costi medi fissi ϕ/q e costi medi variabili $v(q)/q$:

$$AC_{SR}(q) = \frac{\phi}{q} + \frac{v(q)}{q} \equiv AFC(q) + AVC(q).$$

Da dove spunta la forma ad U? I costi medi fissi AFC sono un ramo di iperbole decrescente; supponi che AVC sia crescente, come nella Figura 3.1: che succede alla somma dei due? Per $q \downarrow 0$ piccolo AVC scende ma limitatamente mentre AFC sale a infinito quindi "vince" e il risultato è che per q piccolo AC_{SR} decresce. Per $q \uparrow \infty$ al contrario AFC è praticamente piatta mentre AVC cresce e vince, quindi AC_{SR} per q grande cresce. Da qui la forma ad U.

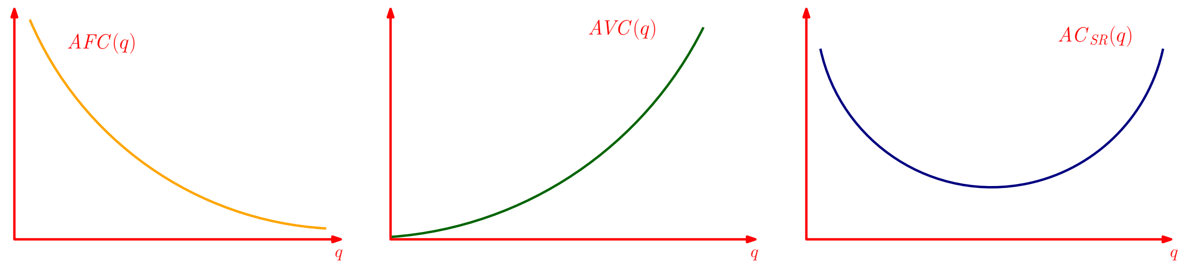
Ovviamente se per q piccolo AVC decresce la parte decrescente di AC_{SR} segue direttamente dal fatto che diventa somma di due funzioni decrescenti; quindi la sola ipotesi che effettivamente serve a ricavare la forma ad U è che la AVC cresce per q sufficientemente grande. È ragionevole? È vero se per q grande i costi marginali v' superano i costi medi AVC - cosa che è del tutto naturale assumere.

Esempio. Considera il caso di $\phi = 1$ e $v(q) = q^2$. Qui $c_{SR}(q) = 1 + q^2$ ed $AC_{SR}(q) = 1/q + q$. È $AC'_{SR} = -1/q^2 + 1$ quindi AC_{SR} decresce fino a $q = 1$ e poi cresce. Ed è convessa perché AC'_{SR} cresce su tutto $\mathbb{R}_+$.

Costi fissi all'entrata

La presenza di rigidità di lungo periodo, cioè di impegni da rispettare, è la causa più evidente dell'emergere di componenti di costo indipendenti dalla quantità prodotta, ma non è l'unica.

Figura 3.1: Costi medi con fattori fissi



Tali costi sono presenti nella fase di sviluppo di nuovi prodotti, tipicamente sotto forma di *spese di ricerca.* Pensa allo sviluppo di nuovo software o di nuovi farmaci, o di un film. Costa tanto metterli a punto, e si devono sostenere per produrre anche una sola unità. Si recuperano man mano che la produzione cresce. E spesso in effetti succede che il costo di riproduzione del bene alla fine è irrisorio (lo è sia per i farmaci sia per il software sia per i film). La forma della funzione di costo di cui stiamo parlando è del tipo

$$c(q) = \begin{cases} 0 & q = 0 \\ \phi + v(q) & q > 0\,. \end{cases}$$

Nota che qui $c(0) = 0$, a differenza del caso appena visto in cui $c_{SR}(0) = \phi > 0$. Di questo tipo di costo abbiamo accennato nell'esempio a pagina 21 (caso $\alpha + \beta > 1$), e ne riparleremo nella sezione 4 perché in questo caso il mercato concorrenziale tipicamente non è stabile.

3.3 Costi medi di breve e di lungo periodo

La relazione fra costi medi di breve e lungo periodo la deduciamo dalla proposizione 7. I primi due punti mostrano che per ogni x_f si ha $c_{SR}(q; x_f) \geq c(q)$, e per $x_f = x_f(q)$ si ha $c_{SR}(q; x_f) = c(q)$. Dividendo per q otteniamo la stessa relazione fra i costi medi: per ogni x_f si ha[14] $AC_{SR}(q; x_f) \geq AC_{LR}(q)$, e per $x_f = x_f(q)$ si ha $AC_{SR}(q; x_f) = AC_{LR}(q)$. Fissa q_0 ed $x_f = x_f(q_0)$; così $AC_{SR}(q) \geq AC_{LR}(q), AC_{SR}(q_0) = AC_{LR}(q_0)$. Da questo segue che in q_0 le due curve sono tangenti e che i costi marginali di breve e di lungo sono uguali, come è illustrato nel pannello sinistro della figura 3.2. Formalmente:

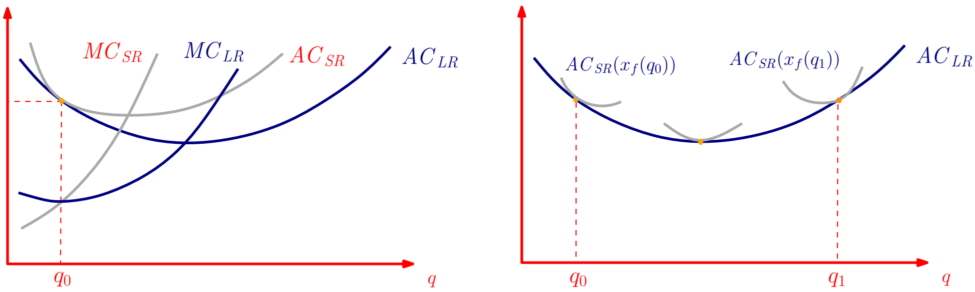
Proposizione 8. *Fissa q_0 ed $x_f = x_f(q_0)$. In q_0 le curve AC_{SR} ed AC_{LR} sono tangenti, ed $MC_{SR}(q_0) = MC_{LR}(q_0)$.*

Dimostrazione. Da $AC_{SR}(q) \geq AC_{LR}(q), AC_{SR}(q_0) = AC_{LR}(q_0)$, indicando con D_+, D_- le derivate destre e sinistre segue che $D_-[AC_{SR}(q_0)] \leq D_-[AC_{LR}(q_0)]$ e $D_+[AC_{SR}(q_0)] \geq D_+[AC_{LR}(q_0)]$, e queste implicano che $AC'_{SR}(q_0) = AC'_{LR}(q_0)$, cioè sono tangenti. Poi: in entrambi i casi, come sappiamo, $AC'(q) = [MC(q) - AC(q)]/q$ quindi da $AC'_{SR}(q_0) = AC'_{LR}(q_0)$ ed $AC_{SR}(q_0) = AC_{LR}(q_0)$ deduciamo $MC_{SR}(q_0) = MC_{LR}(q_0)$. □

Il pannello di destra illustra il quadro globale: ogni curva AC_{SR} tocca la AC_{LR} in un punto, corrispondente a un diverso x_f (nella figura esplicitata la dipendenza da x_f). Se pensi al caso

[14] Qui la dipendenza da x_f la esplicitiamo e omettiamo al bisogno

Figura 3.2: Costi medi e marginali



(K, L) con K fisso, l'idea è che per K piccolo nel breve non perdi se devi produrre poco (quindi la tangenza per q piccolo), se K è grande non perdi se devi produrre molto.

Esempio (3 fattori di cui 1 fisso). Prendiamo la funzione $f(L, K, M) = \sqrt{L} + \sqrt{K} + \sqrt{M}$ e prendiamo per semplicità i prezzi dei fattori $w = r = m = 1$. Le condizioni $f_L/f_K = w/r$, $f_L/f_M = w/m$ danno allora $L = K = M$, e sostituendo nel vincolo $f = q$ otteniamo facilmente

$$L(q) = K(q) = M(q) = \frac{1}{9}q^2$$

Da queste ricaviamo che $c(q)$ è una parabola: $c(q) = wL(q) + rK(q) + mM(q) = q^2/3$.

Con K fisso possibilmente $\neq K(q)$ dall'uguaglianza dei prezzi e dalla forma di f segue facilmente che $L = M$; da $\sqrt{L} + \sqrt{M} = q - \sqrt{K}$ otteniamo così

$$L(q, K) = M(q, K) = \frac{1}{4}(q - \sqrt{K})^2$$

da cui è facile dedurre (fallo!) che $K \gtreqless K(q) \iff L(q, K) \lesseqgtr L(q)$ & $M(q, K) \lesseqgtr M(q)$. Cioè se il capitale è "scarso" ti adegui usando più L, M, viceversa se è sovrabbondante utilizzi in misura minore gli altri fattori. Possiamo inoltre verificare che [15]

$$c(q, K) = K + \frac{1}{2}(q - \sqrt{K})^2 > c(q) \ \forall K \neq K(q).$$

Passiamo ai costi medi. Abbiamo

$$AC_{LR}(q) = \frac{1}{3}q \qquad AC_{SR}(q, K) = \frac{K}{q} + \frac{1}{2}\frac{(q - \sqrt{K})^2}{q}$$

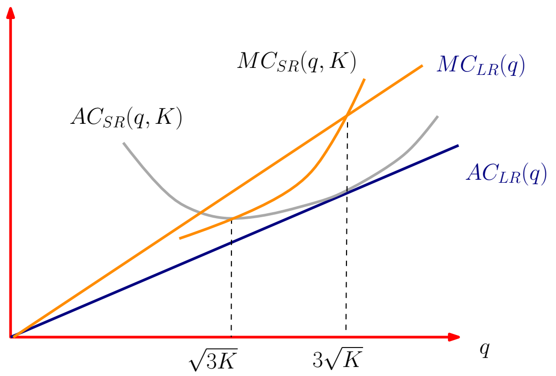
Con fattore fisso K abbiamo

$$\frac{d}{dq}AC_{SR}(q, K) = \frac{1}{q^2}[q(q - \sqrt{K}) - K - \frac{1}{2}(q - \sqrt{K})^2] = \frac{q^2 - 3K}{2q^2} = 0 \ per\ q = \sqrt{3K}$$

La curva è convessa perché la derivata seconda è $3K/q^3 > 0$. La figura è qui, con aggiunte le curve di costo marginale - puoi verificare che si incontrano nel punto in cui i medi sono tangenti.

[15] Per vederlo poni $K = a\frac{1}{9}q^2,\ a \neq 1$; troviamo

$$c(q, K) = \frac{1}{2}\left(q - \sqrt{a\frac{1}{9}q^2}\right)^2 + a\frac{1}{9}q^2 = \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6}(1 - \sqrt{a})^2\right]q^2 > \frac{1}{3}q^2 \ \forall a \neq 1$$



3.4 Massimizzazione del profitto e funzione di offerta

Per ricavare la funzione di offerta con fattori fissi dobbiamo soltanto applicare risultati che già conosciamo. Per anticipare, l'intuizione che confermeremo è che con fattori fissi produco anche a prezzi più bassi che senza perché mi accontento di recuperare almeno in parte i costi fissi. Cioè: se ho costi fissi per 10 e faccio un profitto di -5 produco, perché perdo 5 anziché 10.

Indichiamo il profitto di breve con $\pi_{SR}(q;x_f) = pq - c_{SR}(q;x_f)$. Omettendo di nuovo la dipendenza da x_f ed esplicitando c_{SR} otteniamo

$$\pi_{SR}(q) = pq - \phi - v(q)$$

A parte la costante - che non entra nel processo di decisione, formalmente perché la sua derivata è zero - non c'è niente di nuovo rispetto al $pq-c(q)$ visto prima. E ricorda che stiamo assumendo che $v' = MC_{SR}$ cresce per q grande abbastanza. Quindi la soluzione del problema, che possiamo indicare con $q^\star_{SR}(p)$, [16] è caratterizzata da $p = MC_{SR}$ ed MC_{SR} crescente; quindi è l'inversa della parte crescente di MC_{SR} per $p \geq \min MC_{SR}$, zero altrimenti. Dobbiamo passare da questa alla funzione di offerta.

Ricorda che nella sezione 1.6 abbiamo detto $q^S(p) = q^\star(p)$ se $\pi(q^\star(p)) \geq 0$, zero altrimenti. Stiamo omettendo il sottoscritto j pensando a una impresa fissa nella discussione. L'idea era che se $\pi(q^\star(p)) < 0$ allora meglio produrre zero perché $\pi(0) = 0 > \pi(q^\star(p))$. E in effetti $f(0) = 0$ quindi $c(0) = 0$ da cui $\pi(0) = p \cdot 0 - c(0) = 0$. Quindi in verità avevamo

$$q^S(p) = \begin{cases} q^\star(p) & \pi(q^\star(p)) \geq \pi(0) \\ 0 & \pi(q^\star(p)) < \pi(0)\,. \end{cases}$$

La stessa cosa vogliamo fare nel breve periodo:

$$q^S_{SR}(p) = \begin{cases} q^\star_{SR}(p) & \pi(q^\star_{SR}(p)) \geq \pi_{SR}(0) \\ 0 & \pi(q^\star_{SR}(p)) < \pi_{SR}(0) \end{cases}$$

La differenza sta nel fatto che in presenza di costi fissi non produrre ha un costo:

$$\pi_{SR}(0) = -\phi < 0.$$

[16] Sarebbe $q^\star_{SR}(p;x_f)$ - non lo diciamo più.

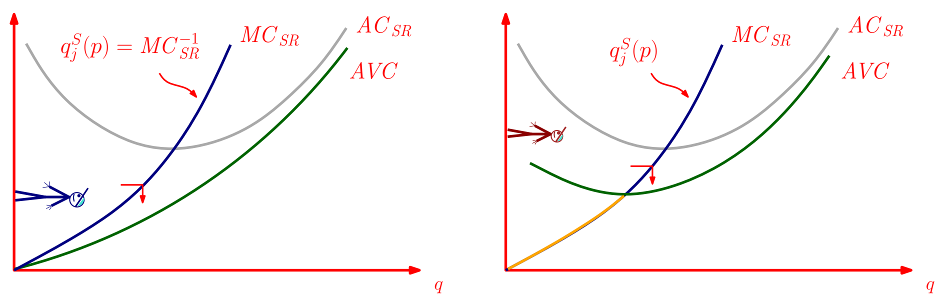
Ora $\pi_{SR}(q) \geq \pi_{SR}(0) \iff pq - \phi - v(q) \geq -\phi \iff p \geq AVC$. Il costo medio variabile ha lo stesso ruolo che il costo medio totale ha nel lungo periodo. Ricorda che $MC_{SR} = c'_{SR} = v'$, cioè il costo marginale di breve è il costo *variabile* marginale. Quindi fra MC_{SR} e AVC sussiste la stessa relazione che c'è fra MC ed AC nel lungo: MC_{SR} sta sotto AVC se questo decresce, sopra se cresce. E a questo punto (analogamente a come abbiamo fatto nella sezione 1.7) dalla condizione $p = MC_{SR}$ ricaviamo che la condizione di entrata $p \geq AVC$ equivale a $p \geq \min AVC$.

In conclusione:

$$q^S_{SR}(p) = \begin{cases} q^\star_{SR}(p) & p \geq \min AVC \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questo è illustrato nella figura 3.3, a sinistra con costi medi di breve crescenti, a destra a forma di U. Nota che la differenza $AC_{SR} - AVC \downarrow 0$ per $q \to \infty$, perché $AFC \downarrow 0$.

Figura 3.3: Offerta con fattori fissi: $q^S_j(p) = MC^{-1}_{SR}(p),\ p \geq \min AVC$



Esempio (Costi fissi di esercizio). Considera un'impresa competitiva con funzione costo data da

$$c(q) = \begin{cases} 1 & q = 0 \\ 5 + q^2 & q > 0 \end{cases}$$

Qual è il prezzo minimo al quale l'impresa sceglie di produrre $q > 0$? Qui $\phi = 1$ è un costo che l'impresa sostiene anche per $q = 0$. Per $q > 0$ anche i costi variabili hanno una componente indipendente da q. In altre parole

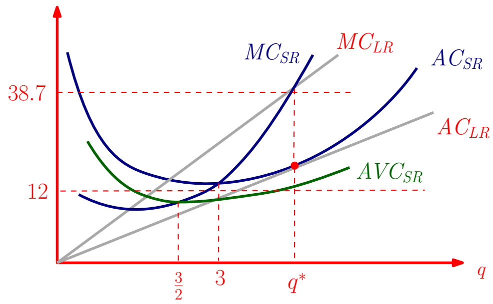
$$v(q) = \begin{cases} 0 & q = 0 \\ 4 + q^2 & q > 0 \end{cases}$$

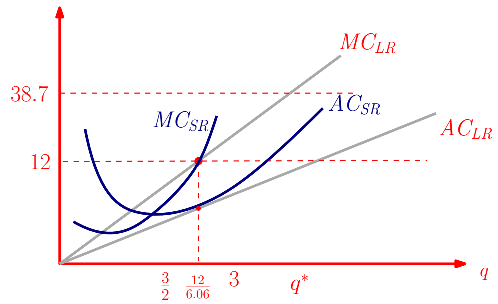
Così $c(q) = \phi + v(q)$. È facile verificare che $\min AVC = 4$ (ottenuto per $q = 0$ e $q = 2$). Quindi l'impresa offre $q > 0$ per $p \geq 4$ (a $p = 4$ è indifferente fra $q = 2$ e $q = 0$). La soluzione la possiamo anche calcolare "a mano" come segue: il profitto massimo per $q > 0$ è dato dalla condizione $p = MC$ che dà $p = 2q$ da cui $\pi = pq - c(q) = 2q^2 - 5 - q^2 = q^2 - 5 = p^2/4 - 5$. Il profitto a $q = 0$ è -1 dunque l'impresa sceglie $q > 0$ se $p^2/4 - 5 \geq -1$ cioè $p \geq 4$ (di nuovo a $p = 4$ è indifferente fra $q = 2$ e $q = 0$).

Esempio (Consulenza professionale). Un'impresa competitiva ha costi di lungo periodo $c_{LR}(q) = 3.03 \cdot q^2$ e di breve periodo $c_{SR}(q) = 9 + \frac{1}{3}q^3 - q^2 + \frac{43}{4}q$ che sono uguali per $q^* \approx 6.38$

- possiamo immaginare che ci sia un fattore fisso calibrato per produrre quella quantità. Si verifica facilmente che AC_{SR} è convessa con derivata nulla per $q = 3$ (è a forma di U).[17] Inoltre $AC_{LR} = 3.03 \cdot q$, quindi possiamo disegnare; il risultato è nel pannello sinistro della figura 3.4: la AC_{SR} sopra la AC_{LR}, tangenti a q^*; nota che le curve dei costi marginali si incontrano in corrispondenza del punto q^* dove le rispettive curve di costo medio sono tangenti.

Figura 3.4: Scelta di breve e Lungo periodo





Supponiamo che l'impresa stia producendo q^*, dove il costo marginale $MC_{SR} = MC_{LR} \approx 38.7$, prezzo corrente di mercato; possiamo disegnare anche questo, nello stesso pannello sinistro. Problema: a un certo punto il prezzo crolla a 12, e il titolare si rivolge a te per capire cosa fare. Primo, deve chiudere nell'immediato o continuare a produrre? Secondo: se deve continuare a produrre, sono comunque necessari aggiustamenti nel fattore fisso - e in che direzione - per restare sul mercato o può andare avanti così? Terzo, dopo gli eventuali aggiustamenti quanto dovrà produrre assumendo che il prezzo resti uguale a 12?

Per vedere se deve continuare a produrre dobbiamo calcolare il minimo dei costi variabili medi; i costi variabili sono $v(q) = \frac{1}{3}q^3 - q^2 + \frac{43}{4}q$ e $\frac{d}{dq}AVC_{SR} = \frac{d}{dq}(\frac{1}{3}q^2 - q + \frac{43}{4}) = \frac{2}{3}q - 1 = 0$ per $q = \frac{3}{2}$ sicché $\min AVC_{SR} = AVC_{SR}(\frac{3}{2}) = 10 < 12$ - quindi deve continuare a produrre. D'altra parte $\min AC_{SR} = AC_{SR}(3) = \frac{55}{4} = 13.75 > 12$ quindi la produzione non è sostenibile con questa struttura dei costi. Potendo aggiustare il fattore fisso il costo marginale diventa $MC_{LR}(q) = 6.06 \cdot q$ dunque a prezzo 12 l'impresa dovrà produrre $12/6.06 < q^*$, quindi dovrà ridurre la quantità del fattore fisso. Il pannello destro della figura illustra la situazione dopo l'aggiustamento del fattore fisso.

3.5 Quanto conta la flessibilità?

Guarda il pannello sinistro della figura 3.2. Quello che dice è: Se sei con fattori fissi fuori misura puoi pagarla cara. Quindi quando è il tempo delle scelte strategiche di lungo periodo pensaci bene: scegli la dotazione di capitale adatta all'ordine di grandezza delle operazioni che ti aspetti di poter sostenere - perché una volta che sono lì costano ϕ, che può essere pesante se la quantità prodotta è inferiore alle attese. *Quanto* cara la puoi pagare intuitivamente dipende dalla flessibilità della tua tecnologia, e questo andremo un po' a vedere in questa sezione.

In concreto: hai previsto un flusso produttivo di q_0 e hai dunque fissato, in quel CdA finito alle quattro di mattina, i fattori fissi a $x_f(q_0)$. Ma i tuoi piani si possono infrangere contro

[17] $\frac{d}{dq}AC_{SR} = \frac{d}{dq}(\frac{9}{q} + \frac{1}{3}q^2 - q + \frac{43}{4}) = -\frac{9}{q^2} + \frac{2}{3}q - 1 = 0$ per $q = 3 < q^*$ e la derivata seconda è sempre positiva come è facile verificare dunque la AC_{SR} è effettivamente a forma di U.

imprevisti di tutti i tipi, quindi vuoi sapere quanto ti costa l'aver fissato $x_f(q_0)$ nell'evenienza di una variazione imprevista di q, per esempio del 20% in meno - cioè con $q = 0.8q_0$. Come sempre in termini di variazioni relative, la quantità che vogliamo calcolare è l'elasticità[18]

$$\eta = \frac{[c_{SR}(q; x_f(q_0)) - c(q)]/c(q)}{|\Delta q/q_0|}, \quad \text{con } q = q_0 + \Delta q < q_0.$$

Esempio. Facciamo i conti con la funzione che conosciamo meglio: Cobb-Douglas $f(K, L) = K^\alpha L^\beta$. Abbiamo fissato $K_0 = K(q_0)$. Per produrre q non resta che scegliere L che risolve $K_0^\alpha L^\beta = q$, cioè $L(q; K_0) = K_0^{-\alpha/\beta} q^{1/\beta}$. Le combinazioni ottime le prendiamo dall'esempio di 9. Purtroppo le costanti diventano elefantiache, fai i conti con $\alpha = \beta = 1/2$ e $\Delta q/q_0 = -0.2$ poi confrontiamo. Noi facciamo il caso generale così chi vuole ci può giocare col computer. Sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned}
c_{SR}(q; K_0) - c(q) &= r(\frac{\alpha w}{\beta r})^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}[q_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}} - q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}] + w[K_0^{-\alpha/\beta} q^{1/\beta} - (\frac{\beta r}{\alpha w})^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}] \\
&= r(\frac{\alpha w}{\beta r})^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} q_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}}[1 - (\frac{q}{q_0})^{\frac{1}{\alpha+\beta}}] + w(\frac{\beta r}{\alpha w})^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} q_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}}[(\frac{q}{q_0})^{\frac{1}{\beta}} - (\frac{q}{q_0})^{\frac{1}{\alpha+\beta}}] \\
&= q_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\Big\{r(\frac{\alpha w}{\beta r})^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}[1 - (\frac{q}{q_0})^{\frac{1}{\alpha+\beta}}] - w(\frac{\beta r}{\alpha w})^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}(\frac{q}{q_0})^{\frac{1}{\alpha+\beta}}[1 - (\frac{q}{q_0})^{\frac{\alpha}{\beta(\alpha+\beta)}}]\Big\}
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\eta &= -\frac{q_0}{\Delta q} \cdot \left(\frac{q_0}{q}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot \frac{r \cdot (\frac{\alpha w}{\beta r})^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}[1 - (\frac{q}{q_0})^{\frac{1}{\alpha+\beta}}] - w \cdot (\frac{\beta r}{\alpha w})^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}(\frac{q}{q_0})^{\frac{1}{\alpha+\beta}}[1 - (\frac{q}{q_0})^{\frac{\alpha}{\beta(\alpha+\beta)}}]}{r \cdot (\frac{\alpha w}{\beta r})^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + w \cdot (\frac{\beta r}{\alpha w})^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}} \\
&= -\frac{q_0}{\Delta q} \cdot \left(\frac{q_0}{q}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot \frac{(\frac{\alpha}{\beta})^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}[1 - (\frac{q}{q_0})^{\frac{1}{\alpha+\beta}}] - (\frac{\beta}{\alpha})^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}(\frac{q}{q_0})^{\frac{1}{\alpha+\beta}}[1 - (\frac{q}{q_0})^{\frac{\alpha}{\beta(\alpha+\beta)}}]}{(\frac{\alpha}{\beta})^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + (\frac{\beta}{\alpha})^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}
\end{aligned}$$

È notevole che questa espressione non dipende da q_0, ma solo da q/q_0; e che non dipende dai prezzi dei fattori. Prendendo per esempio $\alpha = \beta = 1/2$ e $\Delta q/q_0 = -0.2$ si ottiene $\eta = 0.125$. È decisamente un valore basso, dice che se si deve produrre il 20% meno del previsto l'incremento di costo è $0.125 \cdot 0.2 = 0.025 = 2.5\%$. Evidentemente la Cobb-Douglas con $\alpha = \beta = 1/2$ non è una funzione realistica.

Esempio. Con la Leontief $f(K, L) = \min\{aK, bL\}$ viene

$$\eta = \frac{q_0}{q} \cdot \frac{1}{1 + aw/rb}$$

Per vederlo disegniamo, vedi figura 3.5. Dobbiamo produrre q con $K(q_0)$, lo possiamo fare solo con $(K(q_0), L(q))$; quindi $c_{SR}(q; K(q_0)) - c(q) = r[K(q_0) - K(q)]$. Ci serve la combinazione ottima $K(q), L(q)$ che conosciamo dalla sezione 1.3, esempio pagina 11: $K(q) = q/a, L(q) = q/b$.

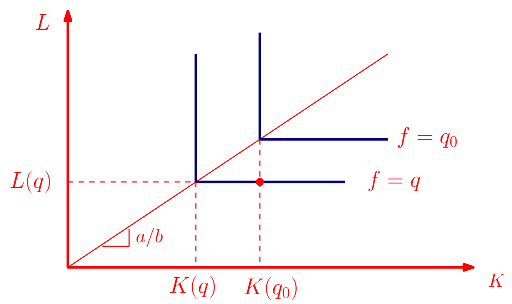
[18] Nota che farlo in termini di costi totali o medi è uguale perché q va via da numeratore e denominatore. Non è esattamente la definizione di elasticità che conosciamo, ma la chiamiamo elasticità perché è il rapporto fra variazioni relative.

Quindi $K(q_0) - K(q) = (q_0 - q)/a = -\Delta q/a$, e arriviamo ad

$$\eta = \frac{q_0}{\Delta q} \cdot \frac{r\Delta q/a}{(r/a + w/b)q}$$

che è l'espressione voluta. Se $q = 0.8q_0$ abbiamo $\eta = 1.25/(1 + aw/rb)$; per esempio se sono tutti 1 viene $\eta = .625$, cioè l'incremento percentuale di costo generato da $\Delta q/q_0 = -20\%$ è $0.625 \cdot 0.2 = 12.5\%$.

Figura 3.5: Costo dell'errore con Leontief



4 L'impresa monopolistica

Il caso estremo di impresa con curva di domanda decrescente - prezzo $p(q)$ dipendente dalla quantità che vuoi vendere - è quello in cui è la sola sul mercato, nel qual caso la domanda che ha di fronte è direttamente la domanda di mercato. È il cosiddetto *monopolio.* È un caso estremo ma la caratteristica fondamentale, l'aver di fronte una curva di domanda decrescente nel prezzo, è comune a tutti i mercati in cui l'impresa riesce a differenziare il proprio prodotto da quello degli altri agli occhi del consumatore in modo da poter scegliere il prezzo oltre che la quantità. E questa è la prima osservazione da fare: se $p = p(q)$, scegliendo q l'impresa di fatto sceglie anche p: cioè, *l'impresa con $p = p(q)$ sceglie dove collocarsi lungo la curva di domanda.* Non c'è una curva di offerta, in questo contesto il concetto non ha senso alcuno. La domanda è quella di mercato, $p(q) = D(q)$, che assumiamo *decrescente: $p'(q) < 0$.*[19]

Vediamo qui il problema di scelta, rimandando al prossimo capitolo la discussione dell'efficienza dell'equilibrio. L'obiettivo è sempre quello di massimizzare il profitto. Adesso che $p = p(q) = p(f(x))$ il problema è

$$\max{}_{x\in\mathbb{R}^n_+}\, p(f(x)) \cdot f(x) - wx.$$

Si può fare direttamente, ma si può fare anche in due stadi come abbiamo fatto prima: cerca il massimo su ogni isoquanto, cioè sull'insieme $\{x\colon f(x) = q\}$, e poi cerca il massimo dei massimi. Come nel caso dell'impresa competitiva, nel primo stadio si ottiene

$$\max{}_{\{x\colon f(x)=q\}}\, p(f(x)) \cdot f(x) - wx = \max{}_{\{x\colon f(x)=q\}}\, p(q) \cdot q - wx = p(q) \cdot q - \min{}_{\{x\colon f(x)=q\}}\, wx,$$

[19]Useremo entrambe le notazioni $p(q)$ e $D(q)$ a seconda della comodità.

e la minimizzazione del costo di produrre q è *identica* al caso già visto: minimizzare la retta di isocosto wx sull'isoquanto $f = q$. Il problema dipende soltanto dalla tecnologia e dai prezzi dei *fattori*, non ha niente a che fare col rapporto fra l'impresa e i suoi clienti. Pòsto come prima $c(q) = \min_{\{x:\, f(x)=q\}} wx$, quello che cambia è il secondo stadio, in cui si affronta la scelta della quantità q - e conseguentemente del prezzo $p(q)$:

$$\max_{q \geq 0} \pi(q) = \max_{q \geq 0} q \cdot p(q) - c(q).$$

È sempre ricavi-meno-costi, ma il ricavo marginale MR è diverso da prima: poiché $p' < 0$ abbiamo infatti $MR(q) = p(q) + qp'(q) < p(q)$. Cioè, *la curva del ricavo marginale giace al di sotto della curva di domanda.*

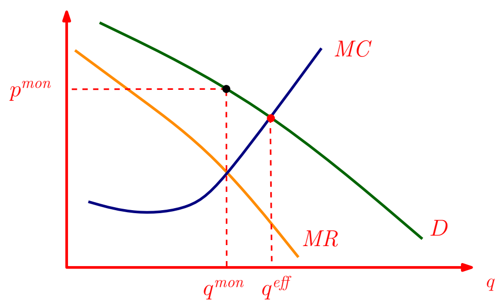
Esempio. Sia $p(q) = a - bq$, domanda lineare. Allora

$$MR = a - bq + q(-b) = a - 2bq.$$

Se la domanda è una retta il ricavo marginale è la retta con stessa intercetta e doppia pendenza.

Come sempre se $\pi(q)$ è massimo la sua derivata deve annullarsi, che nel caso di benefici-meno-costi vuol dire $MC = MR$. Per esser sicuri che un punto siffatto è un massimo dovremo verificare che $\pi'' = 2p' + qp'' - c'' < 0$ nei casi specifici. In generale lo assumeremo per semplicità. Nota per esempio che se la domanda non è "troppo convessa" (cioè $p'' < 0$ o comunque qp'' sufficientemente piccolo) ed MC sta crescendo la condizione è verificata. Dato ciò, il problema è illustrato nella figura 4.1.

Figura 4.1: Scelta del monopolista



Nota che nel punto di ottimo, che abbiamo indicato con q^{mon}, abbiamo $MC = MR < p$. Il prezzo p^{mon} è dato da $p(q^{mon})$. È istruttivo esaminare la condizione $MC = MR$. Ricordando la derivazione delle funzioni inverse, e che il prezzo di domanda $p(q)$ è inversa della quantità domandata q^D, abbiamo $p'(q) = dp/dq = 1/(dq/dp)$. Quindi possiamo scrivere

$$MC = p(q) + qp'(q) = p\Big[1 + \frac{q}{p}\frac{1}{(dq/dp)}\Big] = p\Big[1 - \frac{1}{\eta_D}\Big]$$

dove l'elasticità è $\eta_D = \left|\frac{dq^D}{dp}\frac{p}{q}\right| = -\frac{dq^D}{dp}\frac{p}{q}$. Poiché p ed MC sono positivi si deduce che il monopolista si colloca in un punto della curva di domanda in cui l'elasticità è maggiore di 1.

Nota il rapporto

$$\frac{p}{MC} = \frac{1}{1 - 1/\eta_D}$$

che dipende in modo molto naturale dall'elasticità: il rapporto decresce se η_D sale - se la domanda è più elastica prezzo e costo marginale si avvicinano - e $\lim_{\eta_D \to \infty} \frac{p}{MC} = 1$. Nel limite la domanda è perfettamente elastica torniamo al caso di impresa competitiva.

In verità possiamo osservare che siccome

$$\pi'(q) = p[1 - \frac{1}{\eta_D}] - c'(q)$$

se $\eta_D < 1$ è $\pi' < 0$ quindi il monopolista vuole produrre di meno. In particolare se l'elasticità della domanda è *sempre* minore di 1 il problema di massimo profitto non ha soluzione positiva perché π è decrescente quindi ogni $q > 0$ è battuto da qualunque q più piccolo. Questo si verifica per esempio con domanda $q^D(p) = p^{-\eta}$ con $\eta < 1$ perché in questo caso $\eta_D = \eta$ per ogni p; invertendo la domanda otteniamo $p(q) = q^{-1/\eta}$ quindi il profitto è $\pi(q) = q^{1-1/\eta} - c(q) \to \infty$ per $q \to 0$ quindi il problema di massimo non ha soluzione perché anche $q = 0$ è battuto (da q piccolo abbastanza).

4.1 Monopolio naturale

Che condizioni favoriscono l'insorgere di un monopolio? La seguente semplice osservazione chiarisce abbastanza la situazione. Dice che se ci sono rendimenti di scala crescenti è inefficiente suddividere la produzione fra più impianti o imprese:

Proposizione 9. *Assumi rendimenti di scala crescenti. Allora per ogni $q_1, q_2 > 0$ si ha $c(q_1 + q_2) < c(q_1) + c(q_2)$.*

Dimostrazione. Sappiamo dalla proposizione 1 che rendimenti crescenti implicano costi medi decrescenti. Da ciò deduciamo che, essendo $AC(q_1 + q_2) < AC(q_i), i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} c(q_1 + q_2) &= (q_1 + q_2)AC(q_1 + q_2) = q_1 AC(q_1 + q_2) + q_2 AC(q_1 + q_2) \\ &< q_1 AC(q_1) + q_2 AC(q_2) = c(q_1) + c(q_2) \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. □

Con costi medi decrescenti il mercato competitivo è fuori discussione: per $p = MC$ si ha $\pi < 0$ perché con AC decrescente $MC < AC$. E un'impresa che domina il mercato da un lato è difficile da spodestare, perché più imprese più piccole opererebbero a costi più alti; e poi sarebbe in effetti inefficiente. Noi ci dobbiamo fermare qui, ma dietro l'impresa con domanda decrescente c'è un mondo di estremo interesse per chiunque abbia interesse al mercato, sia come studioso che come politico o funzionario pubblico, e certamente per un imprenditore.

4.2 Produzione con due impianti

Supponi che l'impresa possegga due impianti con funzioni di costo note c_1 e c_2. Per ogni data quantità q deve allora decidere quanto produrre nel primo e quanto nel secondo. Concettualmente il problema riguarda un'impresa qualunque, non necessariamente un monopolista; ne stiamo parlando qui un po' perché hai già assimilato l'argomento, un po' per non appesantire troppo la parte iniziale sui costi, e anche perché in definitiva è più naturale supporre che il problema riguardi principalmente imprese di dimensioni consistenti e non tanto le imprese competitive che immaginiamo piccole.

Dette dunque q_1 e q_2 le quantità prodotte nei due impianti, il costo di $q = q_1 + q_2$ è $c_1(q_1) + c_2(q_2)$. Dato q, vuoi scegliere q_1 e q_2 per minimizzare il costo, cioè vuoi risolvere

$$\min_{q_1, q_2 \,:\, q_1 + q_2 = q} \; c_1(q_1) + c_2(q_2).$$

L'intuizione sulla soluzione interna dovrebbe riuscirti familiare: vuoi produrre a costi marginali uguali nei due impianti, perché se fosse per esempio $c_1' = 3$ e $c_2' = 4.5$ potresti trasferire una unità di produzione dal secondo al primo impianto riducendo il costo totale di 1.5 (il costo scende di 4.5 nel secondo impianto e sale di 3 nel primo). Dobbiamo stare solo attenti a tenere conto delle soluzioni di angolo - se per esempio $c_1' < c_2'$ in tutto il range $[0, q]$ allora ti conviene utilizzare solo il primo impianto. Vediamo formalmente.

Sostituendo $q_2 = q - q_1$ il problema si riduce a un minimo vincolato in una variabile:

$$\min_{0 \leq q_1 \leq q} c_1(q_1) + c_2(q - q_1).$$

Chiama $\phi(q_1) = c_1(q_1) + c_2(q - q_1)$ la funzione da minimizzare. Abbiamo $\phi'(q_1) = c_1'(q_1) - c_2'(q - q_1)$ e $\phi''(q_1) = c_1''(q_1) + c_2''(q - q_1)$. Assumiamo c_1 e c_2 convessi per evitare complicazioni, cioè $c_1'', c_2'' > 0$. Così anche ϕ è convessa, e se troviamo $q_1 \in [0, q]$ con $\phi'(q_1) = 0$ il minimo l'abbiamo trovato - e $\phi' = 0$ vuol dire $c_1'(q_1) = c_2'(q - q_1) = c_2'(q_2)$, esattamente quello che avevamo intuito. Se $\phi'(q_1) = 0$ è risolta da $q_1 < 0$ allora per tutti i $q_1 \in [0, q]$ sarà $\phi'(q_1) > 0$ (perché ϕ' è crescente) quindi il minimo è in $q_1 = 0$; in questo caso $\phi'(0) > 0$ che vuol dire $c_1'(0) > c_2'(q)$ quindi è chiaro perché non vuoi trasferire produzione al primo impianto. Se viceversa $\phi'(q_1) = 0$ è risolta da $q_1 > q$ allora per tutti i $q_1 \in [0, q]$ sarà $\phi'(q_1) < 0$ quindi il minimo è in $q_1 = q$; analogo discorso vale per questo caso, qui $c_2'(0) > c_1'(q)$.

La soluzione del problema è una coppia $q_1(q), q_2(q)$ - che per costruzione soddisfa $q_1(q) + q_2(q) = q$ - e il costo di produrre q è dunque $c(q) = c_1(q_1(q)) + c_2(q_2(q))$.

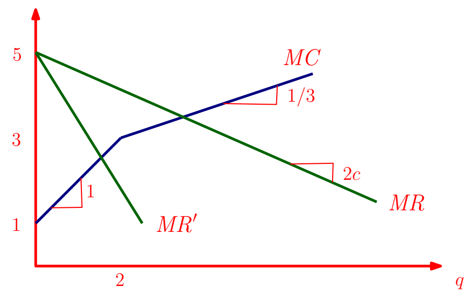
Esempio. Siano $c_1(q_1) = a + q_1 + 0.5q_1^2, c_2(q_2) = b + 3q_2 + 0.25q_2^2$. La condizione $\phi' = 0$ diventa $1 + q_1 = 3 + .5(q - q_1)$ che è risolta da $q_1 = \frac{1}{3}(4 + q)$. È sempre positiva (quindi è $q_1(q) > 0$ per ogni q), ed è $\frac{1}{3}(4 + q) \leq q$ per $q \geq 2$ - quindi per $q < 2$ avremo $q_1(q) = q$, produci solo nel primo impianto e $c(q) = c_1(q)$. Nota che per tali valori $c_1'(q) < 3 = c_2'(0)$. Resta da trovare $c(q)$ per $q \geq 2$. In questo intervallo $q_1(q) = \frac{1}{3}(4 + q) = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}q$ e $q_2(q) = q - q_1(q) = \frac{2}{3}q - \frac{4}{3}$, e $c(q)$ è la somma dei relativi costi.

Esempio (Continua). Considera un monopolista con la funzione di costo dell'esempio appena fatto e domanda $D(q) = 5 - cq$. Quale sarà la sua scelta? Il ricavo marginale è $5 - 2cq$, dobbiamo calcolare il costo marginale. Dobbiamo soltanto tener presente che per $q \geq 2$ abbiamo $c(q) = c_1(q_1(q)) + c_2(q_2(q))$ quindi dobbiamo derivare funzione composta rispetto a q. Troviamo

$$c'(q) = \begin{cases} 1 + q & q < 2 \\ (1 + q_1)q_1' + (3 + .5q_2)q_2' & q \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 1 + q & q < 2 \\ \frac{1}{3}(7 + q) & q \geq 2 \end{cases}$$

Costo marginale e ricavo marginale sono disegnate nella figura 4.2, con due possibili intersezioni, una per $q < 2$ e una per $q > 2$. Resta da determinare i corrispondenti range di c. Uno modo veloce per farlo è vedere per quale c il ricavo marginale incontra c' esattamente nel punto $(2, 3)$ in cui questo cambia pendenza; dobbiamo cioè risolvere in c l'equazione $5 - 2c \cdot 2 = 3$ che dà $c = 1/2$. Dunque se $c < 1/2$ l'intersezione avviene per $q > 2$ e il monopolista utilizza entrambi gli impianti; se invece $c > 1/2$ - domanda più debole - sarà utilizzato soltanto il primo impianto.

Figura 4.2: Scelta con due impianti



5 Esercizi

5.1 Funzione di produzione ed elasticità di sostituzione

Esercizio 1. Considera la seguente funzione di produzione Leontief. Si produce 1 unità di pane con 1 di lavoro e 5 di grano; e si va avanti per omogeneità, 2 di lavoro e 10 di grano dànno 2 di pane, e così via. Formalmente se chiamiamo L, g le unità dei detti beni e $P(L, g)$ la detta funzione, questa è definita così: $P(L, 5L) = L$, e per ogni $c > 0$ si ha $P(L + c, 5L) = L, P(L, 5L + c) = L$. Nota che equivalentemente la possiamo definire scrivendo $P(g/5, g) = g/5$ ecc. (a) Calcola $P(2, 7)$. (b) Scrivi l'espressione generale di $P(L, g)$.

Esercizio 2. Considera una funzione di produzione $f(K, L)$ omogenea di grado uno - cioè $f(tK, tL) = tf(K, L)$. La possiamo scrivere come $f(K, L) = L\phi(k)$ con $k = K/L$ capitale pro capite; le normali condizioni di concavità sono assunte, sicché ϕ è concava. L'obiettivo di questo esercizio è esaminare l'elasticità di f rispetto ad L:

$$\eta \equiv \frac{\partial f}{\partial L}\frac{L}{f}$$

(a) Dimostra che $\eta = \eta(k)$. *Sugg.* $\eta = \frac{\partial L\phi}{\partial L}\frac{1}{\phi}$. (b) Dimostra che

$$\eta'(k) = -\frac{\phi'(\phi - k\phi')}{\phi^2}[1 - \frac{1}{\sigma}]$$

dove σ è l'elasticità di sostituzione, definita da

$$\frac{1}{\sigma} = -\frac{\partial(f_K/f_L)}{\partial(K/L)}\frac{K/L}{f_K/f_L}$$

Assumendo $\sigma \leq 1$, da questo possiamo concludere che: se $\sigma = 1$ (Cobb-Douglas) η è costante, se $\sigma < 1$ allora η cresce con k (che è una misura della ricchezza di un'economia). *Suggerimento.*

Calcola f_K/f_L, poi $d(f_K/f_L)/dk$ e poi moltiplica per ottenere $1/\sigma$ ed $1-1/\sigma$. A questo punto mostra che $\eta' = d(-k\phi'/\phi)/dk$ e calcolando questa arriva al risultato. Ricorda che $k = K/L$.

5.2 Minimizzazione dei costi

Esercizio 3. Una pasticceria può produrre caramelle utilizzando capitale e lavoro secondo la funzione di produzione $f(K,L) = 2L + 4K$, dove L è il numero di ore-lavoro, K il numero di ore-macchina e f la quantità di caramelle prodotta. (a) Se la pasticceria vuole produrre 100 caramelle, il salario orario è $w = 3$ ed il costo di un'ora macchina è $r = 5$, quante unità di K ed L deve utilizzare per minimizzare i costi? Qual è il costo minimo per produrre 100 caramelle? (b) Assumendo $r = 5$, qual è il salario massimo al quale la pasticceria trova conveniente impiegare una quantità positiva di lavoro per produrre caramelle? (c) Trova la funzione di costo di lungo periodo di caramelle quando $w = 1$ ed $r = 3$.

Esercizio 4. Trova il costo minimo di produrre 9 unità per la funzione di produzione $q = \min\{x, 3y\}$ ai prezzi $w_x = 5$ e $w_y = 2$.

Esercizio 5. Considera la funzione di produzione Leontief $q = \min\{K, 2L\}$ e assumi $r = 0.02, w = 6$. (i) Deriva la funzione costo $c(q)$; (ii) Assumi $K = 10$ e trova la funzione costo $c_{SR}(q; K = 10)$. Disegna le due funzioni trovate.

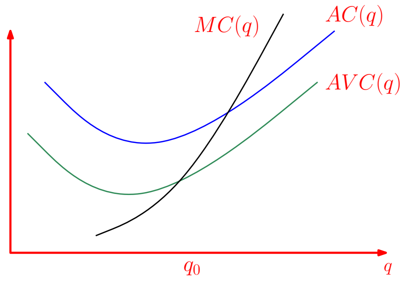
Esercizio 6. Considera la funzione di produzione $q = [\min\{K, L\}]^{1/2}$. (a) Dimostra che la domanda dei fattori $K(q,r,w)$ ed $L(q,r,w)$ che minimizza il costo di produrre q non dipende dai prezzi dei fattori r, w; (b) Verifica che la funzione costo $c(q)$ è omogenea di grado 1 in (r,w) (cioè $c(q,tr,tw) = tc(q,r,w)$ per $t > 0$.

Esercizio 7. Considera la funzione di produzione Cobb-Douglas $f(x,y) = x^\alpha y^\beta$. (a) Che forma ha la funzione costo di lungo periodo? (b) Sotto quale condizione i costi marginali sono crescenti? (c) Sotto quale condizione costi marginali e costi medi coincidono per ogni q? Che forma ha la funzione di costo in questo caso?

Esercizio 8. (difficile) Considera la seguente funzione di produzione: $f(L,K) = KL + K + L = L + K(L+1)$. Assumi $w/r < 1$. (a) Questa funzione di produzione ha rendimenti di scala crescenti, costanti o decrescenti? (b) Trova la funzione costo $c(q)$; (c) Disegna costi medi AC e costi marginali MC (concavità e convessità disegnale come è naturale che siano).

Esercizio 9. Sia $f(K,L) = \sqrt{LK}$ la funzione di produzione di un'impresa che opera in mercato di concorrenza perfetta con prezzo del fattore lavoro $w = 8$ e prezzo del fattore capitale $r = 4$. (a) Determina la funzione di costo totale di lungo periodo $c(q)$ (l'impresa sceglie i valori ottimali di L e K per produrre la quantità di prodotto q al minimo costo). (b) Determina la funzione di costo totale di breve periodo $c_{SR}(q; \bar{K} = 49)$ con K predeterminato al valore $\bar{K} = 49$ (l'impresa sceglie solamente il valore ottimale di L per produrre la quantità di prodotto q al minimo costo). (c) Confronta la funzione di costo totale di lungo periodo $c(q)$ con quella di breve periodo $c_{SR}(q; \bar{K} = 49)$. Sotto quali condizioni le funzioni di costo coincidono? (d) Determina e rappresenta graficamente le funzioni di costo medio e marginale di lungo periodo (indicate, rispettivamente, con $AC(q)$ e $MC(q)$) e le funzioni di costo medio e marginale di breve periodo (indicate, rispettivamente, con $AC_{SR}(q)$ e $MC_{SR}(q)$). Che relazioni ci sono tra queste quattro funzioni?

Esercizio 10. La seguente figura (nell'asse orizzontale la quantità q) rappresenta una possibile configurazione di curve dei Costi Medi (AC), Costi Variabli Medi (AVC) e Costi Marginali (MC)? Giustifica la risposta.



5.3 Massimizzazione del profitto e funzione di offerta: impresa competitiva

Esercizio 11. Un'impresa perfettamente concorrenziale vende il proprio bene ad un prezzo unitario pari a 50€. Essa sostiene costi fissi pari a 30€. Completa la seguente tabella e indica il livello di produzione che massimizza il profitto dell'impresa.

Output	Costo Marginale	Costo Totale	Ricavo Marginale	Ricavo Totale	Profitto
0					
1	50				
2	20				
3	30				
4	42				
5	54				
6	70				

Come varia la quantità ottimale se i costi fissi variano da 30€a 60€?

Esercizio 12. Verifica che l'offerta data da

$$q^S(p) = \begin{cases} 0 & p < 9/4 \\ \frac{1}{2}(\sqrt{p}+3) & p \geq 9/4 \end{cases}$$

è la quantità offerta da una impresa competitiva con costo $c(q) = 4q^3/3 - 6q^2 + 9q$.

Esercizio 13. Sia $c(q) = \gamma + v(q)$ una funzione di costo di breve periodo dove γ è un costo fisso non evitabile nel breve periodo e $v(q)$ il costo variabile, con $v(q) = q(3 + (q - 10)^2)$. Al prezzo $p = 4$ l'impresa sarà nel mercato o non produrrà niente?

Esercizio 14. Considera un'impresa con costi $c(q) = F + aq^2$, dove F è un costo fisso che può essere non sostenuto nel lungo periodo se si decide di chiudere, ma nel breve periodo viene sostenuto anche se si produce zero. (a) Calcola le curve di offerta $q^S(p)$ nel breve e lungo periodo, chiamale $q^S_{SR}(p), q^S_{LR}(p)$ (nel breve periodo è accettabile perdita inferiore ai costi fissi). Illustra graficamente il problema. (b) Per il lungo periodo, nel grafico colora l'area corrispondente al profitto dell'impresa nel punto $(q,p) = (2\sqrt{F/a}, 4\sqrt{Fa})$.

Esercizio 15. Un'impresa ha funzione di costo $c(q) = F + aq - q^2 + q^3$, con $a > 1/3$ ed $F = 1$ è un costo fisso che può essere evitato nel lungo periodo se si decide di chiudere ma non può essere evitato nel breve periodo. Calcola le curve di offerta $q^S(p)$ nel breve e lungo periodo, chiamale $q^S_{SR}(p), q^S_{LR}(p)$ (nel breve periodo è accettabile perdita inferiore ai costi fissi). Illustra graficamente il problema.

Esercizio 16 (Curva di offerta in un settore competitivo). Ci siano due imprese, con costi

$$c_1(q) = \begin{cases} 1 & q = 0 \\ q^2 + 2 & q > 0 \end{cases}, c_2(q) = \begin{cases} 1 & q = 0 \\ 2q^2 + 2 & q > 0 \end{cases}.$$

Determina la curva di offerta totale $q^S(p) = q^S_1(p) + q^S_2(p)$ - funzione del prezzo p del bene - dove $q^S_j(p)$ è l'offerta dell'impresa $j = 1, 2$. Assumi che, se l'impresa è indifferente tra scegliere una quantità positiva o zero, sceglie la quantità positiva.

5.4 L'impresa monopolistica

Esercizio 17. Considera un monopolista con funzione di costo totale $c(q) = 3q$. La domanda di mercato è $D(q) = 7 - q$. Calcola il mark-up ($p^{mon}/MC - 1$) che il monopolista applica sul costo marginale in equilibrio.

Esercizio 18. Considera due mercati di monopolio con funzioni di domanda $q^D_1(p) = p^{-2}$e $q^D_2(p) = p^{-5/2}$. In quale dei due mercati il mark-up che il monopolista pratica sul costo marginale è maggiore? Spiega perché puoi rispondere a questa domanda senza conoscere la funzione di costo.

Esercizio 19. (a)Considera un monopolista con funzione di costo $c(q)$ crescente e funzione di domanda $q^D(p) = p^{-1/2}$. Dimostra che non esiste soluzione al problema della massimizzazione del profitto. (b) Puoi estendere questo risultato a funzioni di domanda più generali (sempre funzioni potenza)?

Esercizio 20. Un monopolista fronteggia una funzione di domanda $D(q) = 30 - 2q$ ed ha funzione di totale $c(q) = 2q$. (a) Calcola il prezzo di monopolio. (b) Di quanto in percentuale varierebbe il prezzo se questo mercato divenisse di concorrenza perfetta?

Esercizio 21. Nel mercato del bene in oggetto la domanda sia $D(q) = 70 - q$, e per qualunque impresa sul mercato (una o più) il costo sia $c(q) = 10q + q^2$. (a) Supponi ci sia una sola impresa, monopolista, sul mercato, e calcola il suo profitto π^{mon} in equilibrio. (b) Supponi ci sia una sola impresa che però prende il prezzo come dato quindi si comporta da impresa concorrenziale, e calcola il suo profitto in equilibrio. (c) Supponi ci siano N imprese uguali in concorrenza. Verifica che per ogni N il profitto totale delle imprese in concorrenza $\pi^{comp} \equiv \sum_{j=1}^{N} \pi_j^{comp} \leq \pi^{mon}$, con uguaglianza soltanto per $N = 2$.

Esercizio 22 (Adattato da Tirole). Scrivi il problema del monopolista in funzione di p, cioè $\pi(p) = pq(p) - c(q(p))$. Con una tassa t sul consumo il profitto diventa $\pi_t(p) = pq(p + t) - c(q(p+t))$ (se $t < 0$ parliamo di sussidio). Assumendo che le condizioni del secondo ordine siano soddisfatte, vogliamo t tale che il monopolista produca la quantità che massimizza il surplus netto sociale, definita da $p + t = c'$. Verifica che $t = q(p^c)/q'(p^c) < 0$ dove p^c è il prezzo competitivo, in corrispondenza dell'intersezione fra c' e curva di domanda.

Esercizio 23. Un monopolista ha due impianti, con costi $c_1(q_1) = e^{q_1} - 1$, $c_2(q_2) = q_2^2/2$, e domanda $p(q_1 + q_2) = 1 - (q_1 + q_2)/2$. Determina la soluzione del problema di massimizzazione del profitto $\pi(q_1, q_2) = (q_1 + q_2)p(q_1 + q_2) - c_1(q_1) - c_2(q_2)$. (*Sugg*: Per un massimo interno la soluzione si trova uguagliando a zero le derivate parziali di π rispetto a q_1, q_2, ma in questo caso il sistema che ne risulta non ha soluzioni (intanto mostra questo). Per trovare la soluzione mostra che per ogni fissato $q_2 \geq 0$, è $\partial\pi/\partial q_1 < 0$ per ogni $q_1 > 0$; da questo deduciamo che deve essere $q_1 = 0$ nel punto di ottimo. A questo punto la soluzione è banale. Risposta $q_1 = 0, q_2 = 1/2$.)