Successioni e serie di funzioni

(1) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx}{(1+nx)(x+1)}$$

sulla semiretta $x \geq 0$.

Risultato: *la successione converge puntualmente, ma non uniformemente, in* $[0, +\infty[$ *alla funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & x > 0. \end{cases}$$

(2) Determinare l'insieme di convergenza e studiare la convergenza uniforme della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2-x^2)^n}.$$

Risultato: *la serie converge assolutamente in* $]-\infty, -\sqrt{3}] \cup]-1, 1[\cup [-\sqrt{3}, +\infty[$ *ed uniformemente in* $]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [-r, r] \cup [\sqrt{3}, +\infty[$ *per ogni* $0 < r < 1$.

(3) Determinare l'intervallo di convergenza della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{3}\right)^n.$$

Risultato: $]-3, 3[$

(4) Determinare l'intervallo di convergenza e la somma della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n+1}.$$

Risultato: *la serie converge assolutamente in* $]-1, 1[$ *e la sua somma in tale intervallo è la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ -\dfrac{\log(1-x^2)}{x^2} & x \neq 0. \end{cases}$$

(5) Studiare, al variare del parametro reale α, la convergenza puntuale ed uniforme in $\mathbb{R}$ della seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = \sqrt{1 + x^2 + n^\alpha}.$$

Risultato: *la successione converge uniformemente in* $\mathbb{R}$ *alla funzione* $f(x) = \sqrt{2+x^2}$ *se* $\alpha = 0$, *alla funzione* $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ *se* $\alpha < 0$.

(6) Determinare gli insiemi di convergenza e studiare la convergenza totale delle seguenti serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+2^n}{n} x^n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+2^n}{n} (\log x)^n.$$

Risultato: *la prima serie (di potenze) converge assolutamente in* $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ *e totalmente in ogni compatto* $[a, b] \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$;
la seconda serie converge assolutamente in $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, \sqrt{e}\right[$ *e totalmente in ogni compatto* $[a, b] \subset \left[\frac{1}{\sqrt{e}}, \sqrt{e}\right[$.

(7) Studiare la convergenza totale della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right).$$

Risultato: *la serie converge totalmente in ogni compatto* $[-r, r]$, $r \in \mathbb{R}$.

(8) Determinare l'insieme di convergenza e studiare la convergenza uniforme della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)^{2n}}{(4n-1)^{2n}} (x^2-1)^n.$$

Risultato: *la serie converge assolutamente in* $]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$ *ed uniformemente in ogni compatto* $[a, b] \subset]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$.

(9) Studiare la convergenza totale della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(x^n)}{n^2}.$$

Risultato: *la serie converge totalmente in* $\mathbb{R}$.

(10) Determinare l'insieme di convergenza e studiare la convergenza uniforme della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n} e^{nx}.$$

Risultato: *la serie converge totalmente, e dunque uniformemente, in* $]-\infty, 0]$.

(11) Dimostrare che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} = (1-x)\log(1-x) + x, \quad -1 < x < 1.$$

(12) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme in $\mathbb{R}$ della seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}.$$

Risultato: *la successione converge puntualmente, ma non uniformemente, alla funzione* $f(x) = 0$ *in* $\mathbb{R}$*; la successione converge uniformemente in* $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$*, per ogni* $a > \frac{1}{2}$.

(13) Se una serie di potenze di punto iniziale 1 converge nel punto 3 si può affermare che essa converge nel punto $-\frac{1}{2}$? Cosa succede in -1?

Risultato: *la serie converge in* $-\frac{1}{2}$*; essa inoltre converge sicuramente in* -1 *se il suo raggio di convergenza è maggiore di 2.*

(14) Determinare l'insieme di convergenza e studiare la convergenza totale della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right).$$

Risultato: *la serie converge puntualmente in* $[0, +\infty[$*; essa converge totalmente in ogni compatto* $[0, r]$, $r > 0$.

(15) Determinare l'insieme di convergenza e studiare la convergenza totale della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^{n^2}}{n^n}.$$

Risultato: *la serie converge totalmente in* $[-2, 0]$.

(16) Determinare l'insieme di convergenza e calcolare la somma delle seguenti serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} n^2 x^n; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(2n)!}; \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} x 2^{-nx^2}.$$

Risultato: *1) la somma della serie in* $\mathbb{R}$ *è la funzione* $f(x) = \cosh x$*; 2) la somma della serie in* $]-1, 1[$ *è la funzione* $f(x) = \dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3} - x$*; 3) la somma della serie in* $\mathbb{R}$ *è la funzione* $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) - 1$*; 4) la somma della serie in* $\mathbb{R}$ *è la funzione* $f(x) = x\left(\dfrac{2^{x^2}}{2^{x^2} - 1} - 1 - \dfrac{1}{2^{x^2}}\right)$.

(17) Calcolare un valore approssimato di $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ a meno di un errore inferiore a 10^{-3}.

Risultato: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{206}$.

Serie di Fourier

(1) Scrivere la serie di Fourier del prolungamento periodico di periodo 2π della seguente funzione
$$f(x) = e^x, \qquad x \in]-\pi, \pi].$$
Studiare la convergenza puntuale ed uniforme di tale serie e calcolare la somma della serie numerica
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

(2) Scrivere la serie di Fourier del prolungamento periodico di periodo 2π della seguente funzione
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in]-\pi, -\pi/2] \\ 1 & x \in]-\pi/2, \pi/2] \\ 0 & x \in]\pi/2, \pi]. \end{cases}$$
Studiare la convergenza puntuale ed uniforme di tale serie e dedurre l'identità
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

(3) Scrivere le serie di Fourier dei prolungamenti periodici di periodo 2π delle seguenti funzioni
$$\begin{aligned} f_1(x) &= |\sin x|, \qquad x \in]-\pi, \pi] \\ f_2(x) &= |\cos x|, \qquad x \in]-\pi, \pi] \\ f_3(x) &= x^4, \qquad x \in]-\pi, \pi] \end{aligned}$$
e studiarne la convergenza puntuale ed uniforme.

(4) Sia $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [-\pi, \pi]$, una curva regolare, chiusa. Una volta sviluppate in serie di Fourier le componenti di γ:
$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \\ y(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n \cos nt + d_n \sin nt), \end{aligned}$$
provare che l'area della regione di piano racchiusa dalla curva vale
$$A = \pi \left| \sum_{n=1}^{+\infty} n(a_n d_n - b_n c_n) \right|.$$

(5) Determinare i coefficienti di Fourier della seguente funzione
$$f(x) = 1 - 3\sin x + \cos 2x.$$

(6) Scrivere la serie di Fourier del prolungamento periodico di periodo 2π della seguente funzione

$$f(x) = x\cos x, \quad x \in]-\pi, \pi].$$

Studiare la convergenza puntuale ed uniforme di tale serie e dedurre l'identità

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} = 1.$$

Funzioni di più variabili reali

(1) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^2}{x^2+y^2}.$$

Risultato: 0.

(2) Provare che la funzione $f(x,y) = |xy|$ è differenziabile nel punto (0,0,) ma non nel punto (1,0).

(3) Classificare gli eventuali punti critici della seguente funzione

$$f(x,y) = e^{x-y}(x^2-2y^2)$$

e determinarne gli estremi assoluti nell'insieme

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}.$$

Risultato: $(0,0)$ *punto di sella;* $(-4,-2)$ *punto di massimo relativo.*
Inoltre: $\min_T f = f(0,1) = -\frac{2}{e}$, $\max_T f = f(1,0) = e$.

(4) Determinare le direzioni di massima e minima pendenza della funzione $f(x,y) = y^4+2xy^3$ nel punto $(0,1)$. Calcolare la rapidità di variazione di $f(x,y)$ in $(0,1)$ nella direzione del vettore $\mathbf{v} = (1,2)$.

Risultato: *Le direzioni di massima e minima pendenza di f in $(0,1)$ sono rispettivamente*

$$\frac{\nabla f(0,1)}{||\nabla f(0,1)||} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \quad -\frac{\nabla f(0,1)}{||\nabla f(0,1)||} = -\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

La rapidità di variazione di f nella direzione di massima pendenza è $||\nabla f(0,1)|| = 2\sqrt{5}$.

(5) i) Classificare gli eventuali punti critici della seguente funzione

$$f(x,y) = x^2y^2 - 1 - 6xy;$$

Risultato: $(0,0)$ *punto di sella;* $\left(x, \frac{3}{x}\right)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *punti di minimo relativo.*

ii) scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,0,-1)$.

Risultato: $z = -1-6y$.

(6) Determinare gli estremi assoluti della seguente funzione

$$f(x,y) = x^2ye^{-x-y}$$

negli insiemi

$$T_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\},$$
$$T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 4\}.$$

Risultato: $\min_{T_1} f = 0$, $\max_{T_1} f = f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27e}$. *Inoltre* $\min_{T_2} f = 0$, $\max_{T_2} f = f(2,1) = \frac{4}{e^3}$.

(7) i) Classificare gli eventuali punti critici della seguente funzione

$$f(x,y) = x^2 + 2xy - y^3;$$

Risultato: $(0,0)$ *punto di sella;* $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ *punto di minimo relativo.*

ii) scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(0,1,-1)$.

Risultato: $z = 2 + 2x - 3y$.

(8) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to\infty} x^2 y^2 e^{-x^2-y^2}.$$

Risultato: 0.

(9) i) Determinare gli estremi assoluti della seguente funzione

$$f(x,y) = y^2 - x^2(x-1)$$

nel cerchio C di centro l'origine e raggio 1;

Risultato: $\min\limits_C f = f(0,0) = f(1,0) = 0, \quad \max\limits_C f = f(-1,0) = 2.$

ii) stabilire se f è limitata nel suo insieme di definizione.

Risultato: f *non è limitata né inferiormente né superiormente.*

(10) Stabilire se la funzione $f(x,y) = y\sqrt[3]{x(y^2-1)}$ è differenziabile nel punto (0,1).

Risultato: f *non è differenziabile nel punto* $(0,1)$.

(11) Determinare gli estremi assoluti della seguente funzione

$$f(x,y) = e^{-x^2}\sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

nel suo insieme di definizione.

Risultato: $\min f = 0, \quad \max f = f(0,0) = 3.$

(12) Classificare gli eventuali punti critici della seguente funzione

$$f(x,y) = y^2 + (e^{x^2} - 1)y + 1.$$

Risultato: $(0,0)$ *punto né di minimo relativo né di massimo relativo.*

(13) Determinare gli estremi assoluti della seguente funzione

$$f(x,y) = 2xy - x^2 - y^4$$

nel quadrato $Q = [0,1] \times [0,1]$.

Risultato: $\min\limits_Q f = f(1,1) = f(0,1) = -1, \quad \max\limits_Q f = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}.$

(14) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = x \sin\left(\frac{x}{y}\right)$ nel punto di coordinate $\left(\frac{\pi}{2}, 1, \frac{\pi}{2}\right)$.

Risultato: $z = x$.

(15) Verificare che i seguenti limiti

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2 y}{(x-1)^4+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to\infty} xye^{x^2+y^2}$$

non esistono.

(16) Classificare gli eventuali punti critici della seguente funzione

$$f(x,y) = xy(x^2+y^2-4)^2$$

e determinarne gli estremi assoluti nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq 4\}$.

Risultato: $(0,0)$ *punto di sella;* $\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ *punti di massimo relativo;* $\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \mp\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ *punti di minimo relativo;* $\left(x, \sqrt{4-x^2}\right)$, $0 < x < 2$, *punti di minimo relativo;* $\left(x, \sqrt{4-x^2}\right)$, $-2 < x < 0$, *punti di massimo relativo;* $\left(x, -\sqrt{4-x^2}\right)$, $-2 < x < 0$, *punti di minimo relativo;* $\left(x, -\sqrt{4-x^2}\right)$, $0 < x < 2$, *punti di massimo relativo;* $(\pm 2, 0)$ e $(0, \pm 2)$ *punti né di minimo relativo né di massimo relativo.*

Inoltre: $\min\limits_D f = f\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \mp\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{128}{27}$, $\max\limits_D f = f\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{128}{27}$.

(17) Determinare gli estremi assoluti della seguente funzione

$$f(x,y) = \log(1+x+y+\sqrt{y^2-x})$$

nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 4,\ \sqrt{x} \leq y \leq 2\}$.

Risultato: $\min\limits_D f = f(0,0) = 0, \quad \max\limits_D f = f\left(\frac{15}{4}, 2\right) = \log\left(\frac{29}{4}\right)$.

(18) i) Classificare gli eventuali punti critici della seguente funzione

$$f(x,y) = (x^4+y^4)e^{-\dfrac{x^2+y^2}{2}};$$

Risultato: $(0,0)$ *punto di minimo assoluto;* $(\pm 2, 0)$, $(0, \pm 2)$ *punti di massimo relativo;* $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$, $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$ *punti di sella.*

ii) stabilire se f è limitata nel suo insieme di definizione.

Risultato: $\min f = f(0,0) = 0$, $\max f = f(\pm 2, 0) = f(0, \pm 2) = \frac{16}{e^2}$.

(19) Classificare gli evenutali punti critici delle seguenti funzioni di tre variabili reali

$$\begin{aligned}
f_1(x,y,z) &= x^2 - 2x + y^2 + \log(1+z^2) \\
f_2(x,y,z) &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz \\
f_3(x,y,z) &= x^2(y-1)^3(z+2)^2.
\end{aligned}$$

Risultato: *1)* $(1,0,0)$ *punto di minimo relativo; 2)* $(1,1,1)$ *punto di minimo relativo,* $(-1,-1,-1)$ *punto di massimo relativo; 3)* $(0,y,z), y > 1, z \in \mathbb{R}$, *punti di minimo* *relativo,* $(0, y, z), y < 1, z \in \mathbb{R}$, *punti di massimo relativo,* $(x, y, -2), x \in \mathbb{R}, y > 1$, *punti di minimo relativo,* $(x, y, -2), x \in \mathbb{R}, y < 1$, *punti di massimo relativo,* $(x, 1, z), x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$, *punti né di minimo relativo né di massimo relativo.*

(20) Si può determinare la natura del punto critico (0,0,0) per la funzione

$$f(x, y, z) = x^3 \cos^2 y + z^3 \log(1 + z^2)$$

senza fare calcoli?

(21) Verificare, usando la definizione, che la seguente funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è differenziabile in (0,0). Ottenere lo stesso risultato dimostrando che le derivate parziali f_x e f_y sono continue in (0,0). Infine, provare ancora lo stesso risultato applicando i teoremi sulle funzioni positivamente omogenee.

(22) Determinare un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ in modo che il piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$ nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ sia ortogonale al vettore $(1, 0, 1)$.

Risultato: $(x_0, y_0) = \left(-\dfrac{2}{13}, -\dfrac{3}{13}\right)$.

(23) Determinare le dimensioni di una scatola a forma di parallelepipedo avente volume V assegnato ed area di superficie minima.

(24) Calcolare il volume dell'ellissoide di semiassi $a, b, c > 0$. Trovare poi l'ellissoide di massimo volume tra quelli per cui $a + 2b + 3c = 1$.

Equazioni differenziali

(1) Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari

$$y'' + y = 6\sin 2x, \qquad y'' + 2y' + y = xe^{-x}, \qquad y'' + y' - 2y = 10\sin x + 3e^x.$$

Risultato:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1\cos x + c_2\sin x - 2\sin 2x; \\ y(x) &= c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{1}{6}x^3 e^{-x}; \\ y(x) &= c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + xe^x - 3\sin x - \cos x; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(2) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + xy = \dfrac{e^{-x^2/2}}{x^2+1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Risultato: $y(x) = e^{-x^2/2}\left(\arctan x + 1\right).$

(3) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = \dfrac{1}{1+\sin 2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Risultato: $y(x) = \dfrac{1}{2}\cos 2x - \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{1+\tan x}\right)\cos 2x + \dfrac{1}{4}\log(1+\sin 2x)\sin 2x.$

(4) Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y - x^2} \\ y(0) = a, \end{cases}$$

provare che, se $a \neq 0$, esso ammette un'unica soluzione $y(x)$ in un intorno del punto $x = 0$. Calcolare $y'(0)$ e $y''(0)$.

Risultato: $y'(0) = \dfrac{1}{a}$, $y''(0) = -\dfrac{1}{a^3}$.

(5) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$y' = y\log y\tan x.$$

Risultato: $y(x) = e^{k/\cos x}, k \in \mathbb{R}.$

(6) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = \dfrac{1}{e^x + 1} \\ \\ y(0) = -\dfrac{1}{2} \\ \\ y'(0) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Risultato:

$$y(x) = \frac{\log 2}{2} e^{-x} - \frac{\log 2}{2} e^x - \frac{e^{-x}}{2} \log(e^x + 1) + \frac{e^x}{2} \left(\log(1 + e^x) - x - e^{-x}\right).$$

(7) Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x+1} = 0 \\ y(1) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y' + \dfrac{y}{x+1} = 0 \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Risultato: $y(x) \equiv 0$; $y(x) = \dfrac{2}{x+1}$.

(8) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale nell'intervallo $]-1, 1[$:

$$y' + \frac{y}{x^2 - 1} = \sqrt{x + 1}.$$

Risultato: $y(x) = c\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}} + \dfrac{2}{3}\sqrt{x+1}(x-1)$, $c \in \mathbb{R}$

(9) Assegnato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{1 + x^2 + y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

si può dire che la soluzione è definita in tutto $\mathbb{R}$?

(10) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$y' + \frac{2x}{1 - x^2} y = (1 - x^2) \cos x.$$

Risultato: $y(x) = c(1 - x^2) + (1 - x^2) \sin x$, $c \in \mathbb{R}$.

(11) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y'y'' + \left(1 + (y')^2\right)^2 = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Risultato: $y(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)\sqrt{\dfrac{1-2x}{2x+1}} - \arctan\sqrt{\dfrac{1-2x}{2x+1}} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{4}.$

(12) Determinare, al variare del parametro reale a, l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$y'' + ay = \sin(ax).$$

Risultato: *Se* $a = 0$, $y(x) = c_1 x + c_2$; *se* $a > 0$, $a \neq 1$, $y(x) = c_1 \cos(\sqrt{a}x) + c_2 \sin(\sqrt{a}x) + \dfrac{\sin(ax)}{a - a^2}$; *se* $a = 1$, $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \dfrac{1}{2} x \cos x$; *se* $a < 0$, $y(x) = c_1 e^{-\sqrt{-a}x} + c_2 e^{\sqrt{-a}x} + \dfrac{\sin(ax)}{a - a^2}$.

(13) Determinare un'equazione differenziale lineare omogenea che ammette $y_1(x) = 1$ e $y_2(x) = e^x$ come soluzioni.

(14) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y - x)^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Risultato: $y(x) = x + \dfrac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}$.

(15) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (x + y) \log |x + y| - 1 \\ y(0) = -e. \end{cases}$$

Risultato: $y(x) = -x - e^{e^x}$.

(16) Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} = 2\sqrt{y}\dfrac{1 + x}{1 + \sqrt{x}} \\ y(1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' + \dfrac{y}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} = 2\sqrt{y}\dfrac{1 + x}{1 + \sqrt{x}} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Risultato: *L'integrale generale dell'equazione differenziale è*

$$y(x) = \frac{(x^2 + 2x + k)^2}{4(1 + \sqrt{x})^2}, k \in \mathbb{R}.$$

(17) Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} (x^2 + 1)y' + 4xy = 2xe^x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x^2 + 1)y' + 4xy = 2xe^x\sqrt{y} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Risultato: *L'integrale generale dell'equazione differenziale è*

$$y(x) = \left(\frac{e^x(x - 1) + c}{x^2 + 1}\right)^2, c \in \mathbb{R}.$$

(18) Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2xy}{1+x^2} + xy^3 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{2xy}{1+x^2} + xy^3 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Risultato: *L'integrale generale dell'equazione differenziale è*

$$y(x)^2 = \frac{3(1+x^2)^2}{c-(1+x^2)^3}, c \in \mathbb{R}.$$

(19) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = y' + \dfrac{e^{3x}}{y'} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Risultato: $y(x) = \dfrac{1}{3}\left(2e^x - 1\right)^{3/2} + \dfrac{2}{3}.$

Curve e forme differenziali lineari

(1) Studiare la seguente forma differenziale
$$\omega = \frac{y}{x^2y^2+4}dx + \frac{x}{x^2y^2+4}dy$$
e calcolarne l'integrale curvilineo lungo la curva
$$\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -1 \le x \le 1,\ y \ge 0,\ x^2+y^2 = 1\}.$$
Risultato: *La forma è esatta in* $\mathbb{R}^2$; $\int_\gamma \omega = 0$.

(2) Studiare la seguente forma differenziale
$$\omega = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} - 1\right)dx + \left(2y - \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)dy$$
e, se possibile, determinare una sua primitiva.
Risultato: *La forma è esatta in* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| > |y|\}$; *una sua primitiva è* $f(x,y) = \sqrt{x^2-y^2} - x + y^2$.

(3) Calcolare l'integrale curvilineo della seguente forma differenziale
$$\omega = -ydx + xdy$$
lungo la curva γ di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x(t) = \cos t(1+\sin t) \\ y(t) = 1 + \sin t, \qquad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$
orientata nel verso delle t crescenti.
Risultato: $\int_\gamma \omega = 2\pi + \dfrac{2}{3}$.

(4) Studiare al variare dei parametri reali a, b, c, d la seguente forma differenziale
$$\omega = \frac{ax+by}{\sqrt{4-x^2y^2}}dx + \frac{cx+dy}{\sqrt{4-x^2y^2}}dy.$$

(5) Studiare la seguente forma differenziale
$$\omega = \left(\frac{4x}{\sqrt{4x^2-y^2}} + 1\right)dx - \frac{y}{\sqrt{4x^2-y^2}}dy,$$
e calcolarne l'integrale curvilineo lungo l'arco di circonferenza
$$\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \ge 1,\ x^2+y^2 = 3\},$$
orientato in senso antiorario.
Risultato: *La forma è esatta in* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 2|x| > |y|\}$; $\int_\gamma \omega = 0$.

(6) i) Studiare la seguente forma differenziale
$$\omega = \frac{y-2x}{x^2+y^2}dx - \frac{2y+x}{x^2+y^2}dy.$$
ii) Mostrare che ω è esatta in $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y < |x|\}$.

(7) Studiare la seguente forma differenziale

$$\omega = \frac{xy^2}{x^4+y^4}dx - \frac{x^2y}{x^4+y^4}dy$$

e, se possibile, calcolarne la primitiva che si annulla in $(1,0)$.

(8) Posto $\omega = ydx - xdy$ e $\gamma_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1,\ y = x^\alpha\}$, con $\alpha > 0$, verificare che

$$-1 < \int_{+\gamma_\alpha} \omega < 1.$$

(9) Studiare la seguente forma differenziale

$$\omega = \left(\frac{1}{x} + x\sqrt{\frac{y}{1+x^2}}\right)dx + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^2}{y}}dy$$

e calcolarne l'integrale curvilineo lungo l'arco di parabola γ di equazione $y = x^2$, $x \in [1,2]$, orientato nel verso delle x crescenti.

Risultato: $\int_\gamma \omega = \log 2 + \sqrt{20} - \sqrt{2}$.

(10) Data la forma differenziale

$$\omega_k = \frac{x^k}{x^2+y^2}dx + \frac{y^k}{x^2+y^2}dy$$

i) determinare eventuali valori di k in corrispondenza dei quali ω_k è chiusa;
ii) dire se le seguenti implicazioni sono vere o false:
ω_k chiusa $\Rightarrow \omega_k$ esatta in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$;
ω_k chiusa $\Rightarrow \omega_k$ esatta in $\{x > 0, y > 0\}$.
iii) verificare che ω_k è esatta in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ e calcolarne una primitiva.

(11) Calcolare la lunghezza della seguente curva

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = 1 - \cos t + (2-t)\sin t \\ y(t) = \sin t + (2-t)\cos t, \qquad t \in [0,2]. \end{cases}$$

Risultato: $l(\gamma) = 2$.

(12) Calcolare l'integrale curvilineo della seguente forma differenziale

$$\omega = \sqrt{z}dx + xdy + ydz$$

lungo la curva $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, t^2)$, $t \in [0, \pi/2]$, orientata nel verso delle t crescenti.

Risultato: $\int_\gamma \omega = 4 + \frac{3}{8}\pi^2 - \frac{7}{4}\pi$.

(13) Determinare le coordinate del baricentro dell'arco di curva $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in [-1,1]$.

Risultato: $(x_B, y_B) = \left(0, \dfrac{e^4 + 4e^2 - 1}{4e(e^2-1)}\right)$.

(14) Dire per quali valori del parametro reale α la forma differenziale

$$\omega = \left(\alpha xz + \frac{yz}{x}\right) dx + \left(z \log x - \frac{\alpha^2 y}{2} \log z\right) dy + \left(x^\alpha + y \log x - \frac{y^2}{z}\right) dz$$

è esatta; calcolare per tali valori di α la primitiva di ω che si annulla nel punto $(1, 1, 1)$.

(15) Calcolare le coordinate del baricentro della curva $y = (7^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$, $0 \le x \le 7$. Disegnare il sostegno della curva.

Risultato: $(x_B, y_B) = \left(\frac{14}{5}, \frac{14}{5}\right)$.

(16) Studiare la seguente forma differenziale

$$\omega = \frac{2}{2x - 3y} dx - \frac{3}{2x - 3y} dy + 3z^2 dz$$

e, se possibile, determinarne la primitiva che si annulla nel punto (2,1,0).

(17) Calcolare l'integrale curvilineo della seguente forma differenziale

$$\omega = (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$$

lungo la curva $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $t \in [0, 2\pi]$ $(a, b > 0)$, orientata nel verso delle t crescenti.

Risultato: $\int_\gamma \omega = -2\pi a^2 - 2\pi ab$.

(18) Determinare una funzione $f \in C^1([0, +\infty[)$ in modo che la forma differenziale

$$\omega = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$$

sia localmente esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Per tale scelta di f, determinare una primitiva locale di ω.

(19) Calcolare l'integrale curvilineo della seguente forma differenziale

$$\omega = \sqrt{z} dx + x dy + y dz$$

lungo la curva $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, t^2)$, $t \in [0, \pi/2]$, orientata nel verso delle t crescenti.

Risultato: $\int_\gamma \omega = \frac{3}{8}\pi^2 - \frac{7}{4}\pi + 4$.

(20) Stabilire se la curva $\gamma(t) = (3 \sin^2 t, 2 \cos^3 t)$, $t \in [0, \pi/2]$, è regolare ed, in caso di risposta affermativa, calcolarne la lunghezza.

Risultato: γ *e regolare e la sua lunghezza* è *pari a* $2\left(2^{3/2} - 1\right)$.

(21) Dire per quali funzioni $u(x, y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ la seguente forma differenziale

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} dx + u(x, y) dy$$

risulta esatta in $\mathbb{R}^2$.

(22) Calcolare

$$\int_{+\gamma} \sin(x+y)(dx+dy)$$

dove γ è l'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{\pi^2} = 1$ orientata nel verso antiorario.

Risultato: *L'integrale è nullo.*

(23) Calcolare

$$\int_{+\partial\Omega} xydx + dy$$

dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 - x \leq y \leq 1 - x^2\}$.

Risultato: *L'integrale è pari a* $-\dfrac{9}{4}$.

(24) Studiare la regolarità della seguente curva

$$\gamma(t) = (t - \cos t, 1 + \sin 2t), \quad t \in [-\pi, \pi].$$

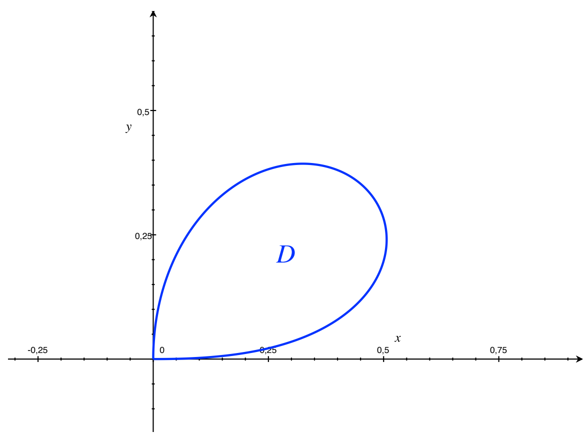
Scrivere le equazioni della retta tangente e della retta normale a γ nel punto $(-1, 1)$.

Risultato: *Retta tangente:* $y = 2x + 3$; *retta normale* $y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}$.

Integrazione multipla

(1) Calcolare la misura dell'insieme
$$D = \left\{(\rho, \vartheta) :\ 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}, 0 < \rho < -\vartheta \log\left(\frac{2\vartheta}{\pi}\right)\right\}$$
essendo (ρ, ϑ) le coordinate polari di un punto del piano.

Risultato: $|D| = \dfrac{\pi^3}{216}$.



(2) Mostrare che le porzioni delle superfici $z = 2xy$ e $z = x^2 + y^2$ che si trovano nello stesso cilindro circolare verticale, centrato nell'origine, hanno la stessa area e calcolare tale area.

(3) Calcolare
$$\int\int_T \frac{x}{(x+y)^2}dxdy,$$
dove $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0, 1 + x^2 \leq y \leq 3 - x\}$.

Risultato: $-\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2}\log 3 - \dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$.

(4) Calcolare
$$\int\int_T \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}dxdy,$$
dove $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x\}$.

Risultato: $\dfrac{15}{32}$.

(5) Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$, con $f \in C^1(0, 1)$, $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Verificare che
$$\int\int_\Omega y f'(x)dxdy = \frac{1}{6}.$$

(6) Calcolare
$$\int\int_T \left(\frac{x}{y}\right)^2 dxdy$$
dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2y\}$.

Risultato: $\pi - \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$.

(7) Calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x,y,z) = (x^3, y^3, z)$ uscente dalla superficie della sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

Risultato: $\dfrac{928}{15}\pi$.

(8) Calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x,y,z) = (x^3, y^3, z)$ uscente dalla superficie dell'ellissoide $x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 4$.

Risultato: $\dfrac{464}{15}\sqrt{2}\pi$.

(9) Calcolare l'area della porzione di superficie di equazione $z = 1 + x^2 + y$ che si proietta nella regione $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq y \leq x^3 \leq 1\}$.

Risultato: $\dfrac{2 \cdot 3^{3/2} + 1}{15\sqrt{2}}$.

(10) Sia $(u,v) \in A \to (x(u,v), y(u,v)) \in B$ una trasformazione biettiva con $x(u,v)$, $y(u,v)$ funzioni di classe C^1 e jacobiano non nullo. Cosa rappresenta il seguente integrale doppio
$$\int\int_A \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv?$$

(11) Calcolare l'area della superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare intorno all'asse x il grafico della funzione $f(x) = 1 + \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [0,1]$.

Risultato: $\pi(\pi + 2)$.

(12) Calcolare
$$\int_S \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sigma$$
dove S è la porzione di superficie di equazione $z = (x^2 + y^2)^{3/2}$ che si proietta nel semicerchio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Risultato: $\pi\left(\dfrac{10^{3/2} - 1}{54}\right)$.

(13) Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale
$$F(x,y,z) = \left(\frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$
attraverso la porzione di superficie sferica di centro l'origine e raggio 1 compresa tra i piani $z = 0$ e $z = 1/2$, orientata in modo che la normale positiva sia quella esterna alla sfera.

Risultato: 0.

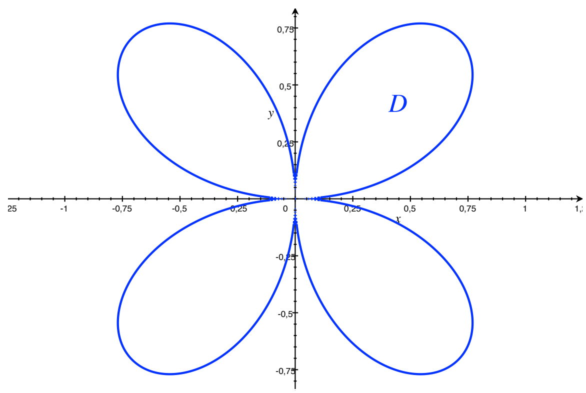
(14) Sia T il solido racchiuso tra la superficie di equazione $z = x^2 + (y-1)^2$ ed il piano di equazione $z = 1$. Calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x,y,z) = (xy, z, y)$ uscente dalla frontiera di T.

Risultato: $\dfrac{\pi}{2}$.

(15) Calcolare l'area dell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ (x^2+y^2)^3 \leq 4x^2y^2\}.$$

Risultato: $\dfrac{\pi}{8}$.



(16) i) Calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x,y,z) = (z, 0, x^3)$ uscente dalla porzione di superficie di equazione $z = x^2 + y^2$ che si proietta nel quadrato $[-1,1] \times [-1,1]$.

Risultato: 0.

ii) Calcolare il flusso dello stesso campo uscente dalla superficie sferica centrata nell'origine e di raggio 1.

Risultato: 0.

(17) Calcolare l'area della superficie S di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = v^2 \end{cases}$$

con $(u,v) \in D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq v \leq 2, \ 0 \leq u \leq \dfrac{1}{v}\right\}$.

Risultato: $6 - 2\sqrt{3} - \log 4 + 2\log\left(1+\sqrt{3}\right)$.

(18) Calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare l'arco di asteroide $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, \pi]$, attorno all'asse delle ascisse.

Risultato: $\dfrac{32}{315}\pi$.

(19) Calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (4x \arctan z, -y^2, 2yz)$ uscente dalla superficie del cubo di centro l'origine e lati paralleli agli assi coordinati e di lunghezza 2.

Risultato: 0.

(20) i) Calcolare l'area della superficie S avente la seguente rappresentazione parametrica

$$(u, v) \in [1, 2] \times [0, \pi] \to (u \cos v, u \sin v, v).$$

Risultato: $\frac{\pi}{2}\left(-\sqrt{2} + \sqrt{5} - \log\left(1 + \sqrt{2}\right) + \log\left(2 + \sqrt{5}\right)\right)$.

ii) Assunto che l'orientamento positivo di S sia quello indotto dalla suddetta rappresentazione parametrica, orientare di conseguenza il bordo ∂S della superficie e calcolare

$$\int_{+\partial S} z dx + x dy + y dz$$

sia mediante la definizione sia facendo ricorso alla formula di Stokes.

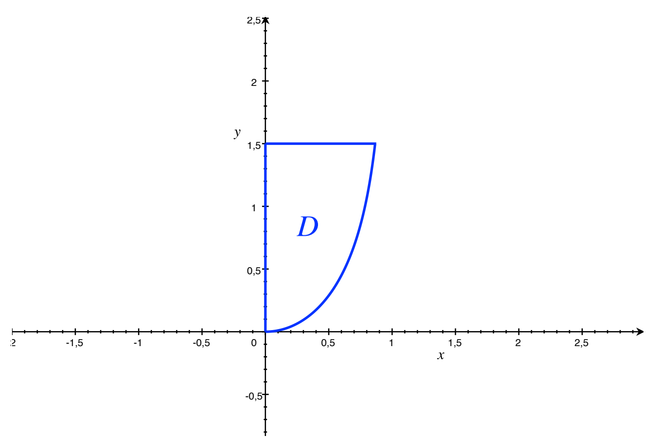
Risultato: $2 + \frac{3}{2}\pi$.

(21) Calcolare la circuitazione del campo vettoriale $F(x, y, z) = (x, y^2, xz)$ lungo la curva γ che è il bordo della porzione di superficie sferica di centro l'origine e raggio 1 contenuta nel primo ottante, con orientamento indotto dalla normale esterna.

Risultato: $-\frac{1}{3}$.

(22) Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse y del dominio piano D delimitato dall'asse y, dalla retta $y = \frac{3}{2}$ e dalla curva di equazione polare $\rho = \tan\theta$, $\theta \in [0, \pi/2[$.

Risultato: $\frac{13}{12}\pi$.



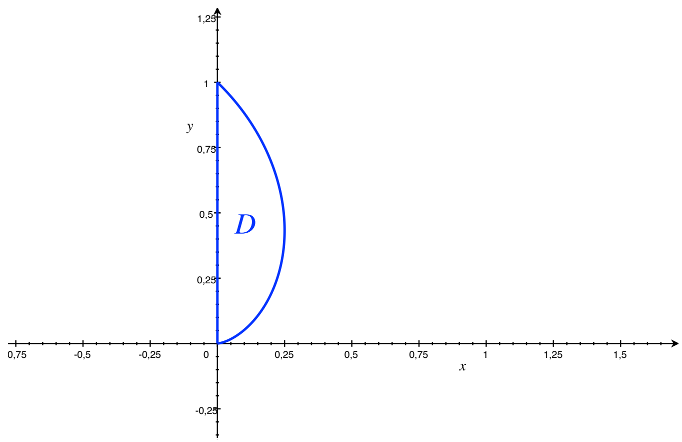
(23) Calcolare l'area della superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse x il grafico della funzione $f(x) = e^x - 1$, $0 \leq x \leq 2$.

Risultato:

$$\pi\left[\sqrt{e^4+1}(e^2-2)+\sqrt{2}-4+2\log\left(1+\sqrt{e^4+1}\right)+\log\left(e^2+\sqrt{e^4+1}\right)-3\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$$

(24) Calcolare l'area della regione di piano racchiusa tra la curva di equazione polare $\rho = 1-\cos\theta$, $\theta \in [0, \pi/2]$, e l'asse delle ordinate.

Risultato: $\dfrac{3}{8}\pi - 1$.



(25) Indicata con S la superficie di equazioni parametriche

$$x(u,v) = u\cos v, \quad y(u,v) = v, \quad z(u,v) = \cos v$$

con $(u,v) \in \left\{0 \le u \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le v \le u\right\}$, calcolare

$$\int_S \frac{x}{\sqrt{1+\sin^2 y}}\, d\sigma.$$

Risultato: $\dfrac{1}{48}\pi\left(3+\pi^2\right)$.

(26) Calcolare l'area della superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse y la curva di equazione $y = \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$, $x \in [1,2]$.

Risultato: $\pi\left(2\sqrt{3}+\log\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$.

(27) Calcolare

$$\int\!\!\int\!\!\int_T z\, dxdydz,$$

dove $T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \le 1,\ \sqrt{3}z \ge \sqrt{x^2+y^2}\right\}$.

Risultato: $\dfrac{3}{16}\pi$.

(28) Calcolare l'area della superficie di equazioni parametriche

$$x(u,v) = e^u\cos v, \quad y(u,v) = e^u \sin v, \quad z(u,v) = e^u v$$

con $(u,v) \in [0,1]^2$.

Risultato: $\frac{1}{4}\left(e^2-1\right)\left(\sqrt{2}+\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$.

(29) Sia S la porzione di superficie di equazione $z = xy$ che si proietta nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}$. Assegnato il campo di forze $F(x,y,z) = (yz, x^2, z)$ ed orientata la normale a S concordemente con l'asse z, calcolare il lavoro di F lungo la curva ∂S.

Risultato: $\frac{4}{3}$.

(30) Sia S la superficie di equazioni parametriche

$$x(u,v) = u^2, \quad y(u,v) = \sqrt{2}\,uv, \quad z(u,v) = v$$

con $(u,v) \in D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 < u^2+v^2 < 2,\ u < v\}$. Calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x,y,z) = (1,0,1)$ attraverso la superficie S orientata in modo che il vettore normale abbia terza componente positiva.

Risultato: $\frac{14}{3} + \frac{15\sqrt{2}}{4}\pi$.

Funzioni implicite

(1) Considerata la funzione $f(x,y) = 2x^2y - x^4 + 3y^2 - 4y$,

i) classificare i punti critici di f;

Risultato: $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ *punto di minimo relativo;* $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ *punti di sella;*

ii) dimostrare che il livello $f(x,y) = 0$ è una curva regolare;

iii) scrivere l'equazione della retta tangente a tale curva nell'origine;

Risultato: $y = 0$*;*

iv) detta $g(x)$ la funzione implicitamente definita dall'equazione $f(x,y) = 0$ in un intorno dell'origine, calcolare $g'(0)$ e $g''(0)$.

Risultato: $g'(0) = g''(0) = 0$.

(2) Determinare i punti della curva $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$ aventi massima distanza dall'origine.

Risultato: $(2,-4)$, $(-2,4)$.

(3) Determinare i punti della curva $\sqrt{5}xy + y^2 - x^2 = 1$ aventi minima distanza dall'origine.

Risultato: $\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

(4) Scrivere la formula di Taylor di punto iniziale 0 ed ordine 3 della funzione $g(x)$ implicitamente definita dalla seguente equazione

$$y^3 + (x^2+1)y - x^2 = 0$$

in un intorno dell'origine.

Risultato: $g(x) = x^2 + o(x^3)$.

(5) Verificare che l'equazione $x^2 + \log(1+xy) + ye^{2y} = 0$ definisce implicitamente una funzione $g(x)$ in un intorno dell'origine. Dimostrare che 0 è punto di estremo relativo per g e determinarne la natura.

Risultato: 0 è *punto di massimo relativo.*

(6) Dimostrare che esiste un intorno I del punto 0 in cui è definita una ed una sola soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} e^{y'(x)-1} + \left(1 + y^2(x)\right) y'(x) - y(x) - 2 = 0, & x \in I \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

e scrivere la formula di Taylor di punto iniziale 0 ed ordine 2 della soluzione.

Risultato: $y(x) = x + \frac{x^2}{4} + o(x^2)$.

(7) Tra tutti i rettangoli inscritti nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ determinare quello di perimetro massimo.

(8) Tra tutte le ellissi di semiassi x, y tali che $x^2 + y^2 = 5$ trovare quella di area massima.

(9) Determinare gli estremi assoluti della funzione $f(x,y) = x + y)$ nell'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^4 + y^4 + xy - 10 \leq 0\right\}.$$

Risultato: $\min_D f = f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$, $\max_D f = f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

(10) Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto $(2,1)$ alla curva

$$(x - y)\log\left(e + xy - x^2 + 2y^2\right) = 1.$$

Risultato: $\left(1 - \dfrac{3}{e}\right)(x-2) + \left(1 + \dfrac{6}{e}\right)(y-1) = 0.$

(11) Determinare i punti della curva $x^4 + y^4 - 3x^2y = 0$ in cui la retta tangente è parallela all'asse x.

Risultato: $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$.