COMPLEMENTI SULL'INTEGRAZIONE DEFINITA ED IMPROPRIA

G. DI MEGLIO

Indice

Introduzione

In queste note propongo alcuni complementi alla teoria dell'integrazione definita ed impropria proposta in aula ed in [MS].

Il primo paragrafo è dedicato alla generalizzazione della condizione di integrabilità di una funzione limitata in un compatto ed alla sua interpretazione *euristica*. Il secondo paragrafo è dedicato alla questione dell'estensione della nozione di integrale definito ad alcuni casi non previsti dalla teoria di Riemann, i.e. alle funzioni limitate su intervalli non compatti e alle funzioni non limitate. In tale paragrafo sviluppiamo il cosiddetto *integrale improprio*, mettendone in luce le affinità e le differenze con l'integrale di Riemann, ed accenniamo all'*integrale a valor principale*. Nel terzo paragrafo definiamo il concetto di *funzione sommabile*, mostriamo che funzioni sommabili sono anche impropriamente integrabili e forniamo dei semplici criteri di sommabilità (basati su tecniche di confronto).

1. Condizioni di Integrabilità ed Interpretazione Geometrica dell'Integrale Definito

1.1. **Condizioni di Integrabilità e loro Interpretazione Euristica.** Come fatto in aula, scelta una decomposizione $D = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N =$

Date: 11 luglio 2018.

$b\}$ di un intervallo compatto $[a,b]$, poniamo:

$$\begin{aligned}\operatorname{amp} D &:= \max_{n=1,\dots,N} x_n - x_{n-1} \\ &= \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_N - x_{N-1}\}\ .\end{aligned}$$

Tale numero non negativo si chiama *ampiezza della decomposizione* D e rappresenta la lunghezza del più ampio intervallo tra quelli in cui punti consecutivi di D suddividono $[a,b]$.

Riguardando le dimostrazioni dei teoremi sull'integrabilità delle funzioni continue e delle funzioni monotòne, ci accorgiamo che abbiamo provato molto più di quanto ci aspettassimo: infatti, in entrambi i casi abbiamo mostrato che:

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0: \quad \forall D \text{ decomposizione di } [a,b] \text{ con } \operatorname{amp} D < \delta,\\ S_f(D) - s_f(D) < \varepsilon\end{aligned} \tag{1}$$

(in cui δ era fornito dal *Teorema di Cantor sulla Continuità Uniforme* oppure $\delta = \frac{\varepsilon}{|f(b)-f(a)|+1}$), mentre a rigore[1] necessitassimo solo di affermare che:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists D \text{ decomposizione di } [a,b]: \quad S_f(D) - s_f(D) < \varepsilon\ .$$

Ciò non è affatto strano, in quanto è possibile provare che la (1) è condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità di una funzione limitata in un intervallo compatto; in altri termini risulta:

Proposizione 1 (Condizione di Integrabilità)
Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata in $[a,b]$.
La f è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$ se e solo se vale la (1).

Per ottenere un'ulteriore condizione di integrabilità, al posto delle somme integrali superiori ed inferiori possiamo considerare alcune somme integrali "intermedie". In particolare, scelta una decomposizione $D = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b\}$ e fissati arbitrariamente N punti $\xi_1, \dots, \xi_N \in [a,b]$ in guisa che:

$$\forall n = 1, \dots, N, \quad \xi_n \in [x_{n-1}, x_n]\ , \tag{2}$$

poniamo:

$$\sigma_f(D; \xi_1, \dots, \xi_N) := \sum_{n=1}^{N} f(\xi_n)\cdot(x_n - x_{n-1})$$

e chiamiamo tale quantità *somma integrale di Riemann relativa ad f rispetto alla decomposizione D ed ai punti $\xi_1, \dots, \xi_N$*. Dato che:

$$\forall n = 1, \dots, N, \quad m_n := \inf_{[x_{n-1},x_n]} f \le f(\xi_n) \le \sup_{[x_{n-1},x_n]} f =: M_n\ ,$$

risulta evidente che sussistono le disuguaglianze:

$$s_f(D) \le \sigma_f(D; \xi_1, \dots, \xi_N) \le S_f(D)$$

per ogni scelta di punti $\xi_1, \dots \xi_N$ che rispettino la (2); d'altro canto, se f è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$, anche il numero $\lambda := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ soddisfa le disuguaglianze:

$$s_f(D) \le \lambda \le S_f(D)\ .$$

Con manipolazioni algebriche immediate perveniamo facilmente a:

$$s_f(D) - S_f(D) \le \sigma_f(D; \xi_1, \dots, \xi_N) - \lambda \le S_f(D) - s_f(D)\ ,$$

di modo che la disuguaglianza:

$$|\sigma_f(D; \xi_1, \dots, \xi_N) - \lambda| \le S_f(D) - s_f(D) \tag{3}$$

[1] Cfr. con la definizione di funzione integrabile in [MS].

vale per ogni decomposizione D ed ogni scelta dei punti $\xi_1, \dots, \xi_N$ che soddisfano (2).
Dalla (3) e dalla PROPOSIZIONE 1 ricaviamo immediatamente la prima parte della dimostrazione del seguente:

TEOREMA 1 (Condizione di Integrabilità)
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata in $[a, b]$.
La f è integrabile in $[a, b]$ se e solo se esiste un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che:

(4)
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \quad \forall D \textit{ decomposizione di } [a,b] \textit{ con } \operatorname{amp} D < \delta$$
$$\textit{e } \forall \xi_n \in [x_{n-1}, x_n] \ (n = 1, \dots, N),\ |\sigma_f(D; \xi_1, \dots, \xi_N) - \lambda| < \varepsilon\ .$$

In tal caso, risulta:
$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}\,x = \lambda\ .$$

Dimostrazione. Rimangono da provare l'implicazione $\Leftarrow$, ossia che dalla (4) consegue l'integrabilità di f in $[a, b]$, e l'uguaglianza tra λ e l'integrale di f esteso ad $[a, b]$.
Cominciamo dall'implicazione $\Leftarrow$.
Occorre e basta dimostrare che in corrispondenza di $\varepsilon > 0$ è possibile determinare una decomposizione D tale che:
$$S_f(D) - s_f(D) < \varepsilon\ .$$
Fissiamo $\varepsilon > 0$: in corrispondenza di $\varepsilon/4 > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che:
$$|\sigma_f(D; \xi_1, \dots, \xi_N) - \lambda| < \frac{\varepsilon}{4}$$
per ogni decomposizione D con ampiezza minore di δ e per ogni scelta dei punti ξ_n; fissata una siffatta decomposizione D e scelte due n-uple di punti $\xi'_1, \dots, \xi'_N$ e $\xi''_1, \dots, \xi''_N$, per *disuguaglianza triangolare* abbiamo:
$$\begin{aligned} |\sigma_f(D; \xi'_1, \dots, \xi'_N) - \sigma_f(D; \xi''_1, \dots, \xi''_N)| &\leq |\sigma_f(D; \xi'_1, \dots, \xi'_N) - \lambda| \\ &\quad + |\sigma_f(D; \xi''_1, \dots, \xi''_N) - \lambda| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &= \frac{\varepsilon}{2}\ . \end{aligned}$$
Per proprietà degli estremi superiore ed inferiore possiamo scegliere i punti ξ'_n in modo che $M_n - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(\xi'_n) \leq M_n$ ed i punti ξ''_n in guisa che $m_n \leq f(\xi''_n) < m_n + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$; conseguentemente, abbiamo:
$$\begin{aligned} \sigma_f(D; \xi'_1, \dots, \xi'_N) &= \sum_{n=1}^{N} f(\xi_n) \cdot (x_n - x_{n-1}) \\ &> \sum_{n=1}^{N} M_n \cdot (x_n - x_{n-1}) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \sum_{n=1}^{N} (x_n - x_{n-1}) \\ &= S_f(D) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \cdot (x_N - x_0) \\ &= S_f(D) - \frac{\varepsilon}{4} \\ \sigma_f(D; \xi''_1, \dots, \xi''_N) &< s_f(D) + \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

da cui traiamo:

$$S_f(D) - s_f(D) < \sigma_f(D; \xi'_1, \dots, \xi'_N) - \sigma_f(D; \xi''_1, \dots, \xi''_N) + \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

Ne consegue:

$$\begin{aligned} S_f(D) - s_f(D) &< \underbrace{\sigma_f(D; \xi'_1, \dots, \xi'_N) - \sigma_f(D; \xi''_1, \dots, \xi''_N)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \, , \end{aligned}$$

come volevamo.

Infine, proviamo l'uguaglianza $\lambda = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}\, x$. Sfruttando la *disuguaglianza triangolare* troviamo:

$$\left| \lambda - \int_a^b f(x) \ \mathrm{d}\, x \right| \leq |\sigma_f(D; \xi_1, \dots, \xi_N) - \lambda| + \left| \sigma_f(D; \xi_1, \dots, \xi_N) - \int_a^b f(x) \ \mathrm{d}\, x \right|$$

per ogni decomposizione D ed ogni scelta di punti ξ_n soddisfacenti al (2).
Fissato $\varepsilon > 0$, in corrispondenza del numero positivo $\varepsilon/2$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni decomposizione D con ampiezza minore di δ e per ogni scelta di punti ξ_n scelti in conformità alla (2) valgono le (3) e (4); pertanto, possiamo fissare due decomposizioni D' e D'' con ampiezza minore di δ in modo che:

$$|\sigma_f(D'; \xi'_1, \dots, \xi'_N) - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left| \sigma_f(D''; \xi''_1, \dots, \xi''_N) - \int_a^b f(x) \ \mathrm{d}\, x \right| < \frac{\varepsilon}{2} \, ;$$

considerata la decomposizione $D = D' \cup D''$, anch'essa ha ampiezza minore di δ e perciò, scelti ξ_n che soddisfano la (2) negli intervallini di D, risulta:

$$|\sigma_f(D; \xi_1, \dots, \xi_N) - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left| \sigma_f(D; \xi_1, \dots, \xi_N) - \int_a^b f(x) \ \mathrm{d}\, x \right| < \frac{\varepsilon}{2} \, ;$$

conseguentemente risulta:

$$\left| \lambda - \int_a^b f(x) \ \mathrm{d}\, x \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

per ogni $\varepsilon > 0$ e da ciò segue l'asserto. □

Il precedente TEOREMA ha un'interpretazione euristica[2] particolarmente utile in ambito fisico ed ingegneristico:

Osservazione 1: La (4) si può euristicamente interpretare come una relazione di limite, cioè:

$$\lim_{\operatorname{amp} D \to 0^+} \sigma_f(D; \xi_1, \dots, \xi_N) = \int_a^b f(x) \ \mathrm{d}\, x \, ,$$

la quale vale indipendentemente dalla scelta di punti $\xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$ (per $n = 1, \dots, N$).
Ciò significa che l'integrale di Riemann può essere approssimato arbitrariamente bene usando una qualsiasi somma di Riemann $\sigma_f(D; \xi_1, \dots, \xi_N)$ relativa ad una decomposizione D con $\operatorname{amp} D$ sufficientemente piccola.

[2]Avvertiamo il lettore che essa può essere resa rigorosa generalizzando opportunamente la nozione di limite; a tale proposito si può consultare [P].

Questo rende più o meno lecito il *passaggio dal discreto al continuo* (nel gergo dei Fisici) nell'analisi, ad esempio, del comportamento di sistemi meccanici: a tal proposito si può vedere l'esempio riportato di seguito. ♦

`Esempio 1:` Consideriamo un'asta sottile $\mathcal{A}$ di lunghezza $L > 0$ formata da materiale non necessariamente omogeneo.
Possiamo schematizzare l'asta come un intervallo $[0, L]$ dell'asse reale, il cui materiale si presenta con una *densità lineare puntuale* $\lambda(x) > 0$.
Consideriamo il problema di calcolare l'ascissa $\bar{x}_{\mathcal{A}}$ del centro di massa di $\mathcal{A}$.
Scelta una decomposizione D dell'intervallo $[0, L]$ con $d := \operatorname{amp} D$ "piccola", possiamo pensare gli intervallini $[x_0, x_1]$, ..., $[x_{N-1}, x_N]$ come "piccoli" tratti dell'asta $\mathcal{A}$; visto che d è "sufficientemente piccola", possiamo approssimare ognuno dei tratti $[x_{n-1}, x_n]$ con un punto materiale P_n avente ascissa $\xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$ nel quale è concentrata una massa μ_n; in tal modo, stiamo approssimando il sistema *continuo* $\mathcal{A}$ con il sistema *discreto* $\mathcal{S} = \{(\xi_n, \mu_n), n = 1, \ldots, N\}$.
Per noti fatti, il centro di massa del sistema discreto $\mathcal{S}$ ha ascissa che soddisfa la seguente relazione:

$$\bar{x}_{\mathcal{S}} \cdot \sum_{n=1}^{N} \mu_n = \sum_{n=1}^{N} \mu_n \cdot \xi_n \ , \tag{5}$$

in cui la somma $\sum_{n=1}^{N} \mu_n$ rappresenta la massa totale μ del sistema.
Dato che i tratti in cui è divisa l'asta sono "sufficientemente piccoli", possiamo ritenere che la densità dello n-esimo tratto sia pressoché costante ed uguale alla densità $\lambda(\xi_n)$ calcolata nel punto ξ_n: in tal modo, la massa μ_n coincide col prodotto $\lambda(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$ e abbiamo:

$$\begin{aligned} \mu &\approx \sum_{n=1}^{N} \lambda(\xi_n) \cdot (x_n - x_{n-1}) \\ &= \sigma_\lambda(D; \xi_1, \ldots, \xi_N) \end{aligned}$$

cioè μ si approssima con un'opportuna somma di Riemann relativa alla funzione $\lambda(x)$.
Analogamente, ogni addendo di $\sum_{n=1}^{N} \mu_n \cdot \xi_n$ si può approssimare con $\lambda_(\xi_n)\xi_n \cdot (x_n - x_{n-1})$ e perciò:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \mu_n \cdot \xi_n &\approx \sum_{n=1}^{N} \lambda(\xi_n)\ \xi_n \cdot (x_n - x_{n-1}) \\ &= \sigma_\varphi(D; \xi_1, \ldots \xi_N) \end{aligned}$$

cioè il secondo membro della (5) coincide con una somma di Riemann relativa alla funzione $\varphi(x) = x\lambda(x)$.
Infittendo sempre più la decomposizione D, i.e. mandando $\operatorname{amp} D \to 0^+$, il sistema discreto $\mathcal{S}$ approssima sempre meglio il sistema continuo $\mathcal{A}$ e possiamo ritenere che il suo centro di massa $\bar{x}_{\mathcal{S}}$ approssimi sempre meglio il centro di massa $\bar{x}_{\mathcal{A}}$; d'altro canto, entrambe le somme $\sigma_\lambda(D; \xi_1, \ldots, \xi_N)$ e $\sigma_\varphi(D; \xi_1, \ldots \xi_N)$ approssimano gli integrali $\int_0^L \lambda(x)\, \mathrm{d}\, x$ ed $\int_0^L \varphi(x)\, \mathrm{d}\, x = \int_0^L x\lambda(x)\, \mathrm{d}\, x$.
Mettendo insieme i due comportamenti possiamo affermare che il centro di massa di $\mathcal{A}$ soddisfa la relazione:

$$\bar{x}_{\mathcal{A}} \cdot \int_0^L \lambda(x)\ \ \mathrm{d}\, x = \int_0^L x\ \lambda(x)\ \ \mathrm{d}\, x \ ,$$

formalemente ottenuta passando al limite la (5) per $\operatorname{amp} D \to 0^+$, da cui la regola:

$$\bar{x}_{\mathcal{A}} = \frac{1}{\int_0^L \lambda(x)\ \mathrm{d}\,x} \cdot \int_0^L x\ \lambda(x)\ \mathrm{d}\,x$$

che si usa nella pratica. ♢

Osservazione 2: L'ascissa del centro di massa di un sistema lineare esteso coincide con la media integrale della funzione x sull'intervallo $[0, L]$ pesata rispetto alla densità lineare λ. ♦

1.2. **Interpretazione Geometrica dell'Integrale Definito.** Le considerazioni che proponiamo qui di seguito sono puramente *euristiche* e non verranno sistemate in un quadro teorico generale.
Tuttavia, con un po' di sforzo, è possibile elaborare una teoria (la cosiddetta *Teoria della Misura di Peano*[3] – *Jordan*[4]) nell'ambito della quale tali considerazioni sono del tutto lecite. Il lettore interessato ad approfondire questo tema può leggere [AT, cap. XI].

Consideriamo una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata ed integrabile secondo Riemann su $[a, b]$.
Abbiamo osservato a lezione che, se $f(x) \geq 0$ ovunque in $[a, b]$, le somme integrali inferiori $s_f(D)$ e le somme integrali superiori $S_f(D)$ coincidono con l'area (nel senso della Geometria Elementare) di alcuni insiemi piani detti *plurirettangoli*[5]: in particolare, $s_f(D)$ coincide con l'area di un plurirettangolo $P_*(D)$ "inscritto" nella regione:

$$\mathcal{R}_f = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\big\}$$

(detta *rettangoloide* -o *trapezoide*- *di base* $[a, b]$ *relativo ad* f) ed $S_f(D)$ coincide con l'area di un plurirettangolo $P^*(D)$ "circoscritto" a tale regione.
Abbiamo altresì osservato che tali misure approssimano (le $S_f(D)$ per eccesso, le $s_f(D)$ per difetto) quella che può essere a ragione chiamata l'*area del rettangoloide* $\mathcal{R}_f$ e che all'infittirsi della decomposizione D deve perciò aversi:

$$\lim_{\operatorname{amp} D \to 0} s_f(D) = \operatorname{area}(\mathcal{R}_f) = \lim_{\operatorname{amp} D \to 0} S_f(D)\ .$$

Ora, dato che $\displaystyle\lim_{\operatorname{amp} D \to 0} s_f(D) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \lim_{\operatorname{amp} D \to 0} S_f(D)$ e visto che ci aspettiamo una sorta di *unicità del limite* anche (e soprattutto!) in questi ragionamenti euristici, è evidente che:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}\,x = \operatorname{area} \mathcal{R}_f\ ,$$

ossia l'integrale definito esteso ad $[a, b]$ della funzione non negativa f restituisce l'area del rettangoloide relativo ad f di base $[a, b]$ (cfr. Fig. 1).

Cosa succede se $f(x) \leq 0$ ovunque in $[a, b]$? Innanzitutto, notiamo che in tal caso l'integrale definito $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ è non positivo, dunque esso non può coincidere con la misura di un'area[6]... Tuttavia, geometricamente la cosa sembra andare a posto

[3]Giuseppe Peano (1858 – 1932), matematico e logico italiano che ha fornito l'assiomatizzazione completa dei numeri naturali. A lui è intitolato il Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino.

[4]Marie Ennemond Camille Jordan (1838 – 1922), matematico francese.

[5]Si chiama *plurirettangolo* ogni sottoinsieme del piano $\mathbb{R}^2$ che si ottiene giustapponendo un numero finito di rettangoli coi lati paralleli agli assi.

[6]Perchè le aree nel senso della Geometria Elementare sono quantità ≥ 0.

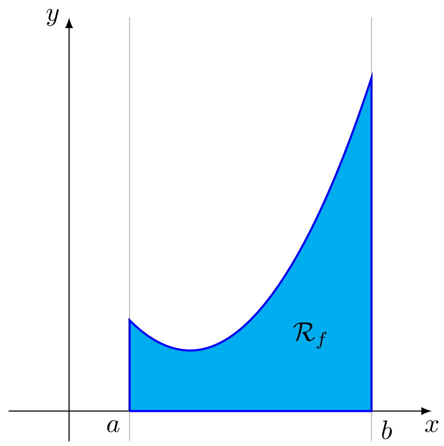

FIGURA 1. Rettangoloide $\mathcal{R}_f$ di una funzione non negativa in $[a, b]$.

come nel caso precedente a patto di cambiare qualche segno. Invero, sfruttando le proprietà degli estremi inferiore e superiore, stavolta le quantità $-S_f(D) = s_{-f}(D)$ e $-s_f(D) = S_{-f}(D)$ approssimano l'area della regione:

$$\mathcal{R}_{-f} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq -f(x)\big\}$$

cioè risulta $\lim_{\operatorname{amp} D \to 0} -s_f(D) = \operatorname{area}(\mathcal{R}_{-f}) = \lim_{\operatorname{amp} D \to 0} -S_f(D)$; dunque:

$$\int_a^b f(x) \ \mathrm{d}\, x = -\operatorname{area} \mathcal{R}_{-f} \ .$$

Inoltre, se conveniamo di chiamare *rettangoloide generalizzato* la regione:

$$\mathcal{R}_f = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b \text{ e } f(x) \leq y \leq 0\big\}$$

la regione compresa tra le rette di equazione $x = a$ ed $x = b$, l'asse delle ascisse ed il grafico di f (la quale stavolta è situata nel semipiano delle ordinate negative!), si vede che $\mathcal{R}_f$ è simmetrico di $\mathcal{R}_{-f}$ rispetto all'asse delle ascisse e dunque conserva la stessa area di $\mathcal{R}_f$; da ciò segue che:

$$\int_a^b f(x) \ \mathrm{d}\, x = -\operatorname{area} \mathcal{R}_f \ ,$$

cioè che l'integrale fornisce un'area *con segno* del rettangoloide generalizzato (cfr. FIG. 2).

Consideriamo, infine, il caso in cui f può cambiare segno in $[a, b]$.
Introduciamo le funzioni $f^{\pm} : [a, b] \to \mathbb{R}$, dette rispettivamente *parte positiva* e *parte negativa di* f ponendo:

$$f^+(x) := \max\{0, f(x)\} \qquad \text{e} \qquad f^-(x) = \min\{0, f(x)\} \ .$$

Distinguendo un po' di casi si vede che:

- $f^+(x) = f(x)$ se e solo se $f(x) \geq 0$ ed $f^+(x) = 0$ se e solo se $f(x) \leq 0$,
- $f^-(x) = f(x)$ se e solo se $f(x) \leq 0$ ed $f^-(x) = 0$ se e solo se $f(x) \geq 0$,
- $f(x) = f^+(x) + f^-(x)$ ovunque in $[a, b]$,

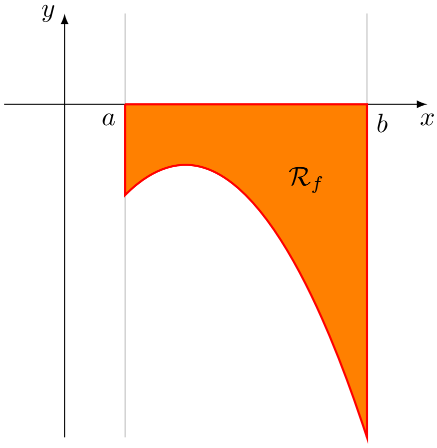

FIGURA 2. Rettangoloide generalizzato $\mathcal{R}_f$ di una funzione non positiva in $[a,b]$.

- $|f(x)| = f^+(x) - f^-(x)$ ovunque in $[a,b]$,
- $f^\pm$ sono limitate ed integrabili secondo Riemann in $[a,b]$ se e solo se f lo è;

inoltre, il rettangoloide generalizzato di f, i.e. l'insieme:

$$\mathcal{R}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ f^-(x) \leq y \leq f^+(x)\}\ ,$$

coincide con l'unione insiemistica dei due rettangoloidi $\mathcal{R}_{f^+}$ ed $\mathcal{R}_{f^-}$, i quali non si sovrappongono (se non in alcuni tratti del bordo, che hanno area nulla).
Dato che:

$$\begin{aligned} \int_a^b f^+(x)\ \mathrm{d}\,x &= \operatorname{area} \mathcal{R}_{f^+} \\ \int_a^b f^-(x)\ \mathrm{d}\,x &= -\operatorname{area} \mathcal{R}_{f^-} \end{aligned}$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}\,x &= \int_a^b f^+(x)\ \mathrm{d}\,x + \int_a^b f^-(x)\ \mathrm{d}\,x \\ &= \operatorname{area} \mathcal{R}_{f^+} - \operatorname{area} \mathcal{R}_{f^-}\ , \end{aligned}$$

cosicché nel caso f cambi segno il suo integrale coincide con la somma algebrica di due aree *con segno*, l'una (quella positiva) relativa al rettangoloide di f^+, l'altra (quella negativa) relativa a f^- (cfr. FIG. 3).

Osservazione 3: Osserviamo esplicitamente che, anche nel caso generale in cui f cambia segno in $[a,b]$, l'integrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ *non coincide* con la misura dell'area del rettangoloide generalizzato di f.
Per lumeggiare tale circostanza, analizziamo il seguente esempio.
Sia $f(x) := \sin x$ definita in $[0,2\pi]$. Il rettangoloide generalizzato di f è:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_f = &\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq \pi \text{ e } 0 \leq y \leq \sin x\} \\ &\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 2\pi \leq x \leq 2\pi \text{ e } \sin x \leq y \leq 0\} \end{aligned}$$

e si vede che esso ha area > 0. D'altra parte, risulta:

$$\int_0^{2\pi} \sin x\ \mathrm{d}\,x = [-\cos x]_0^{2\pi} = -1 + 1 = 0\ ,$$

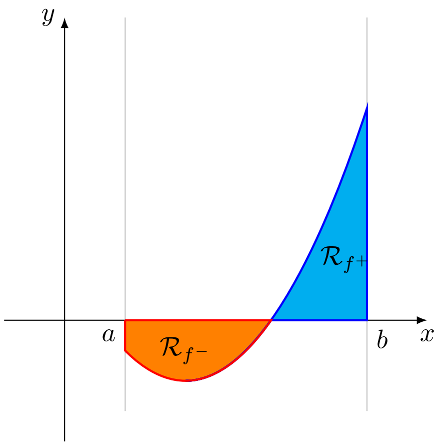

FIGURA 3. Rettangoloide generalizzato $\mathcal{R}_f$ di una funzione che cambia segno in $[a, b]$.

cosicchè non è possibile risalire all'area di $\mathcal{R}_f$ sfruttando semplicemente l'integrale di f. ♦

Osservazione 4: In generale, però, è possibile calcolare l'area di $\mathcal{R}_f$ sfruttando un altro integrale.
Infatti, si ha:

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)| \ \mathrm{d}\, x &= \int_a^b f^+(x) \ \mathrm{d}\, x - \int_a^b f^-(x) \ \mathrm{d}\, x \\ &= \operatorname{area} \mathcal{R}_{f^+} + \operatorname{area} \mathcal{R}_{f^-} \\ &= \operatorname{area} \mathcal{R}_f \ ,\end{aligned}$$

cosicché l'area del rettangoloide generalizzato $\mathcal{R}_f$ coincide con l'integrale del valore assoluto di f esteso ad $[a, b]$, cioè $\operatorname{area} \mathcal{R}_f = \operatorname{area} \mathcal{R}_{|f|}$.
Ciò importa che nel caso precedente, i.e. $f(x) := \sin x$ con $0 \leq x \leq 2\pi$, risulta:

$$\begin{aligned}\operatorname{area} \mathcal{R}_f &= \int_0^{2\pi} |\sin x| \ \mathrm{d}\, x \\ &= \int_0^{\pi} \sin x \ \mathrm{d}\, x + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x \ \mathrm{d}\, x \\ &= [-\cos x]_0^{\pi} + [\cos x]_{\pi}^{2\pi} \\ &= (1+1) + (1+1) \\ &= 4\ .\end{aligned}$$

♦

2. INTEGRALI IMPROPRI ED A VALORE PRINCIPALE

Nella pratica matematica pura ed applicata occorre spesso considerare integrali definiti che non ricadono nell'ambito di applicabilità della teoria di Riemann.
Valgano i seguenti esempi:

`Esempio 2:` La probabilità che una misura con *media* m e *deviazione standard* $\sigma > 0$ assuma valore maggiore di un dato $M \in \mathbb{R}$ si può esprimere mediante l'integrale:

$$\int_M^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ \mathbf{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\ \mathrm{d}\,x$$

in cui l'integrando è continuo, ma è definito in un intervallo non compatto. $\diamondsuit$

`Esempio 3:` Gli integrali:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}\,x\ ,\ \int_0^{1/2} \frac{1}{x\log x}\ \mathrm{d}\,x$$

sono di funzioni continue, ma esse né sono definite ovunque negli intervalli d'integrazione (perché non sono definite in 0) né rimangono limitate in essi (perché divergono in 0). $\diamondsuit$

`Esempio 4:` L'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \arctan x\ \ \mathrm{d}\,x$$

è l'integrale di una funzione continua e limitata, ma l'intervallo di integrazione non è compatto. $\diamondsuit$

In questo paragrafo ci occupiamo del problema dell'estensione dei risultati sull'integrazione definita in modo da comprendere anche i casi presentati negli esempi.

2.1. **L'Integrale Improprio.** Cominciamo a dare alcune definizioni:

Definizione 1
Sia $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ (qui può essere anche $b = +\infty$).
Si dice che f è *impropriamente integrabile su* $[a,b[$ se essa è integrabile secondo Riemann su ogni compatto $[\alpha,\beta] \subset [a,b[$ e se esiste finito il:

$$\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}\,t\ .$$

In tal caso, si pone per definizione:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}\,x := \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}\,t$$

e la quantità al primo membro si chiama *integrale improprio di f esteso all'intervallo* $[a,b[$.

Definizione 2
Sia $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ (in cui può essere pure $a = -\infty$).
Si dice che f è *impropriamente integrabile su* $]a,b]$ se essa è integrabile secondo Riemann su ogni compatto $[\alpha,\beta] \subset]a,b]$ e se esiste finito il:

$$\lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\ \mathrm{d}\,t\ .$$

In tal caso, si pone per definizione:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}\,x := \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\ \mathrm{d}\,t$$

e la quantità al primo membro si chiama *integrale improprio di f esteso all'intervallo* $]a,b]$.

Osservazione 5: Notiamo esplicitamente che l'ipotesi di integrabilità sui compatti $[\alpha, \beta]$ contenuti nel dominio assicura che f è limitata in ogni intervallo del tipo $[\alpha, \beta]$. Tuttavia, ciò non assicura in alcun modo che f sia limitata in tutto il suo insieme di definizione.
Tale comportamento, ad esempio, è quello esibito dalle funzioni $1/x$ in $]0, 1]$ ed $1/(x \log x)$ in $]0, 1/2]$. ♦

Le precedenti due definizioni si possono combinare tra loro ottenendo variazioni sufficienti a coprire ulteriori casi di interesse:

Definizione 3
Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ (in cui può aversi anche $a = -\infty$ e $b = +\infty$).
Si dice che f è *impropriamente integrabile in* $]a, b[$ se esiste un punto $\xi \in]a, b[$ tale che f è impropriamente integrabile in ognuno dei sottointervalli $]a, \xi]$ e $[\xi, b[$.
In tal caso si pone:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \ \mathrm{d}\, x &:= \int_a^\xi f(x) \ \mathrm{d}\, x + \int_\xi^b f(x) \ \mathrm{d}\, x \\ &= \lim_{x \to a^+} \int_x^\xi f(t) \ \mathrm{d}\, t + \lim_{y \to b^-} \int_\xi^y f(t) \ \mathrm{d}\, t \end{aligned}$$

e la quantità al primo membro si chiama *integrale improprio di* f *esteso ad* $]a, b[$.

Osservazione 6: L'esistenza di un punto $\xi \in]a, b[$ in modo che f risulti impropriamente integrabile in $]a, \xi]$ ed in $[\xi, b[$ implica che per ogni punto $x_0 \in]a, b[$ la f risulta impropriamente integrabile in $]a, x_0]$ ed in $[x_0, b[$.
Scelto arbitrariamente $x_0 \in]a, b[$ con $x_0 \neq \xi$ (perché se $x_0 = \xi$ non c'è nulla da dimostrare!), allora o $a < x_0 < \xi$ oppure $\xi < x_0 < b$; per fissare le idee, supponiamo che x_0 cada tra ξ e b. Per ipotesi, f è certamente integrabile in $[\xi, x_0]$ e dunque per ogni $x < \xi$ ed ogni $y > x_0$ si ha:

$$\begin{aligned} \int_x^{x_0} f(t) \ \mathrm{d}\, t &= \int_x^\xi f(t) \ \mathrm{d}\, t + \int_\xi^{x_0} f(t) \ \mathrm{d}\, t \\ \int_{x_0}^y f(t) \ \mathrm{d}\, t &= \int_\xi^y f(t) \ \mathrm{d}\, t - \int_\xi^{x_0} f(t) \ \mathrm{d}\, t \end{aligned}$$

per proprietà additiva; quindi, il fatto che limiti $\lim_{x \to a^+} \int_x^\xi f(t) \ \mathrm{d}\, t$ e $\lim_{y \to b^-} \int_\xi^y f(t) \ \mathrm{d}\, t$ esistano entrambi finiti implica l'esistenza e la finitezza di $\lim_{x \to a^+} \int_x^{x_0} f(t) \ \mathrm{d}\, t$ e $\lim_{y \to b^-} \int_{x_0}^y f(t) \ \mathrm{d}\, t$. Ciò importa che f è impropriamente integrabile in $]a, x_0]$ ed in $[x_0, b[$. ♦

Osservazione 7: Osserviamo esplicitamente che se f è impropriamente integrabile in $]a, b[$, il valore dell'integrale improprio $\int_a^b f(x) \ \mathrm{d}\, x$ non dipende in alcun modo dalla scelta del punto x_0: infatti, per proprietà additiva si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a^+}\int_x^{x_0} f(t)\ \mathrm{d}\,t+\lim_{y\to b^-}\int_{x_0}^{y} f(t)\ \mathrm{d}\,t &= \lim_{x\to a^+}\int_x^{\xi} f(t)\ \mathrm{d}\,t+\int_{\xi}^{x_0} f(t)\ \mathrm{d}\,t\\ &\quad+\lim_{y\to b^-}\int_{\xi}^{y} f(t)\ \mathrm{d}\,t-\int_{\xi}^{x_0} f(t)\ \mathrm{d}\,t\\ &=\lim_{x\to a^+}\int_x^{\xi} f(t)\ \mathrm{d}\,t+\lim_{y\to b^-}\int_{\xi}^{y} f(t)\ \mathrm{d}\,t\,.\end{aligned}$$

♦

Definizione 4
Siano $c\in(a,b)$ ed $f:(a,b)-\{c\}\to\mathbb{R}$.[7]
Si dice che f è *impropriamente integrabile in* (a,b) se essa è impropriamente integrabile in ognuno dei due sottointervalli $(a,c[$ e $]c,b)$.
In tal caso, si pone per definizione:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}\,x:=\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}\,x+\int_c^b f(x)\ \mathrm{d}\,x$$

e la quantità al primo membro è detta *integrale improprio di f esteso all'intervallo* (a,b).

Osservazione 8: La definizione precedente si generalizza in maniera del tutto ovvia al caso in cui nell'intervallo (a,b) ci sia più di un punto c in cui f non è definita (o attorno al quale f non è limitata).
Ad esempio, se f è definita in $(a,b)-\{c_1,c_2\}$ (con $a<c_1<c_2<b$), allora f è detta impropriamente integrabile in (a,b) se essa è impropriamente integrabile in ogni sottointervallo $(a,c_1[$, $]c_1,c_2[$ e $]c_2,b)$ ed in tal caso si pone:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}\,x=\int_a^{c_1} f(x)\ \mathrm{d}\,x+\int_{c_1}^{c_2} f(x)\ \mathrm{d}\,x+\int_{c_2}^{b} f(x)\ \mathrm{d}\,x$$

con l'integrale al primo membro detto *integrale improprio di f esteso ad* (a,b). ♦

Ragionando come nell'**Osservazione** precedente, cioè combinando opportunamente le definizioni appena date, si riesce a dare significato al simbolo di integrale in una pletora di casi non coperti dalla teoria standard dell'integrale di Riemann. Inoltre, si vede che l'integrale improprio gode anch'esso di alcune buone proprietà algebriche: ad esempio, la *proprietà additiva*, la *linearità* ed i risultati di *confronto* rimangono valide anche nel caso di integrali impropri. Ciò, fondamentalmente, discende dalle proprietà dei limiti e dalla seguente:

Osservazione 9: Consideriamo, a mo' di modello, il caso dell'integrale improprio di una funzione f impropriamente integrabile in $[a,b[$.
Detta $F:[a,b[\to\mathbb{R}$ la funzione integrale di f con piede in a, cioè quella definita in $[a,b[$ ponendo:

$$F(x):=\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}\,t\,,$$ [8]

l'integrabilità in senso improprio di f in $[a,b[$ equivale alla convergenza di F per $x\to b^-$; infatti, per definizione si ha:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}\,x=\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}\,t=\lim_{x\to b^-}F(x)\,.$$

[7] Ricordo che col simbolo (a,b) si denota un qualsiasi intervallo di estremi $a,b\in\widehat{\mathbb{R}}$.
[8] Si noti che la f è integrabile sul compatto $[a,x]$, dunque la funzione integrale F è ben definita.

Invece, la non integrabilità in senso improprio di f in $[a,b[$ equivale alla non regolarità od alla divergenza della funzione F per $x \to b^-$.
Per questi motivi, si dice talvolta che f ha *integrale convergente*, oppure *divergente* ovvero *non regolare in* b. ♦

È poi immediato provare la:

Proposizione 2
Siano $a < b \in \mathbb{R}$ *ed* $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ *integrabile impropriamente su* $[a,b[$.
Se f *si può prolungare su* b *in modo che il suo prolungamento* f^* *sia limitato ed integrabile secondo Riemann su* $[a,b]$*, allora l'integrale di* f^* *esteso ad* $[a,b]$ *coincide con l'integrale improprio di* f *esteso ad* $[a,b[$*, cioè risulta:*

$$\int_a^b f^*(x)\ \mathrm{d}\,x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}\,x\ .$$

Dimostrazione. Dato che $f^*(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a,b[$, dette F^* ed F le funzioni integrali di f^* ed f con piede in a, risulta:

$$F^*(x) = \int_a^x f^*(t)\ \mathrm{d}\,t = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}\,t = F(x)$$

per ogni $x \in [a,b[$; visto che f^* è limitata ed integrabile su $[a,b]$, il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale* implica che F^* è continua in $[a,b]$ e perciò:

$$\int_a^b f^*(x)\ \mathrm{d}\,x = F^*(b) = \lim_{x\to b^-} F^*(x) = \lim_{x\to b^-} F(x) = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}\,x\ ,$$

come volevamo. □

Mutatis mutandis, lo stesso argomento della dimostrazione precedente mostra che in tutti gli altri casi si verifica la medesima cosa. Possiamo dunque affermare, del tutto in generale, che vale il seguente fatto:

Teorema 2
Se una funzione f*, definita in* (a,b) *con* $a < b \in \mathbb{R}$ *eccezion fatta al più per un numero finito di punti, si può prolungare ad* $[a,b]$ *ottenendo una funzione* f^* *limitata ed integrabile secondo Riemann in* $[a,b]$*, allora l'integrale di Riemann di* f^* *esteso ad* $[a,b]$ *coincide con l'integrale improprio di* f *esteso ad* (a,b)*, cioè:*

$$\int_a^b f^*(x)\ \mathrm{d}\,x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}\,x\ .$$

Osservazione 10: Dal Teorema precedente consegue immediatamente che l'integrale improprio è una generalizzazione dell'integrale di Riemann.
Tuttavia, per alcuni motivi che presto vedremo, l'integrale improprio è una generalizzazione *imperfetta* dell'integrale di Riemann. ♦

2.2. **Esempi Significativi.**

`Esempio 5:` Consideriamo l'integrale:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\ \mathrm{d}\,x$$

con $\alpha > 0$, il quale è improprio perché l'integrando è definito in $]0,1]$ e non si mantiene limitato intorno a 0.

Un semplice calcolo mostra che:

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}\,t = \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha}\right]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \left(1 - x^{1-\alpha}\right)$$

se $\alpha \neq 1$, e che:

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\ \mathrm{d}\,t = [\log |t|]_x^1 = -\log x$$

se $\alpha = 1$; pertanto risulta:

$$\lim_{x \to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}\,t = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{, se } 0 < \alpha < 1 \\ +\infty & \text{, se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

e perciò la funzione $1/x^\alpha$ è impropriamente integrabile in $]0,1]$ se e solo se $0 < \alpha < 1$ ed il suo integrale vale:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\ \mathrm{d}\,x = \frac{1}{1-\alpha}\ .$$

$\diamondsuit$

Osservazione 11: Osserviamo esplicitamente che l'`Esempio` precedente si può usare per stabilire la somabilità di funzioni potenze del tipo:

$$f(x) := \frac{1}{|x - x_0|^\alpha}\ ,$$

con $x_0 \in \mathbb{R}$, in intervalli impropri che abbiano x_0 come estremo.
Ad esempio, per studiare se f è integrabile in $[x_1, x_0[$ (con $x_1 < x_0$) possiamo sfruttare l'integrazione per sostituzione per stabilire:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_0} \frac{1}{|x-x_0|^\alpha}\ \mathrm{d}\,x &= \lim_{x \to x_0^-} \int_{x_1}^{x} \frac{1}{|t-x_0|^\alpha}\ \mathrm{d}\,t \\ &\overset{\tau = x_0 - t}{=} \lim_{x \to x_0^-} \int_{x_0-x_1}^{x_0-x} \frac{-1}{|-\tau|^\alpha}\ \mathrm{d}\,\tau \\ &= \lim_{x \to x_0^-} \int_{x_0-x}^{x_0-x_1} \frac{1}{\tau^\alpha}\ \mathrm{d}\,\tau \\ &\overset{y = x_0 - x}{=} \lim_{y \to 0^+} \int_{y}^{x_0-x_1} \frac{1}{\tau^\alpha}\ \mathrm{d}\,\tau \\ &= \int_0^{x_0-x_1} \frac{1}{\tau^\alpha}\ \mathrm{d}\,\tau \end{aligned}$$

cosicché le funzioni potenza $1/|x-x_0|^\alpha$ sono sempre integrabili intorno ad x_0 se $0 < \alpha < 1$ e non lo sono per $\alpha \geq 1$. $\blacklozenge$

`Esempio 6:` Consideriamo l'integrale:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\ \mathrm{d}\,x$$

con $\alpha > 0$, il quale è improprio perché l'integrando è definito in $[1, +\infty[$, che non è compatto.
Un semplice calcolo mostra che:

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}\,t = \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha}\right]_1^x = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \left(x^{1-\alpha} - 1\right)$$

se $\alpha \neq 1$, e che:

$$\int_1^x \frac{1}{t}\ \mathrm{d}\,t = [\log |t|]_1^x = \log x$$

se $\alpha = 1$; pertanto risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}\,t = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{, se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{, se } 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

e perciò la funzione $1/x^\alpha$ è impropriamente integrabile in $[1, +\infty[$ se e solo se $\alpha > 1$ ed il suo integrale vale:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\ \mathrm{d}\,x = \frac{1}{\alpha - 1}\ .$$

$\diamondsuit$

`Esempio 7:` Consideriamo l'integrale:

$$\int_{\mathbf{e}}^{+\infty} \frac{1}{x\ \log^\beta x}\ \mathrm{d}\,x$$

improprio in quanto l'intervallo d'integrazione non è compatto.
Fissato un punto $x > \mathbf{e}$, calcoliamo:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{e}}^x \frac{1}{t\ \log^\beta t}\ \mathrm{d}\,t &\overset{u=\log t}{=} \int_1^{\log x} \frac{1}{u^\beta}\ \mathrm{d}\,u \\ &= \frac{1}{1-\beta}\left[u^{1-\beta}\right]_1^{\log x} \\ &= \frac{1}{1-\beta}\left(\log^{1-\beta} x - 1\right) \end{aligned}$$

se $\beta \neq 1$ e:

$$\begin{aligned} \int_x^\xi \frac{1}{t\ \log t}\ \mathrm{d}\,t &\overset{u=\log t}{=} \int_1^{\log x} \frac{1}{u}\ \mathrm{d}\,u \\ &= [\log |u|]_1^{\log x} \\ &= \log\log x \end{aligned}$$

se $\beta = 1$; dunque:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{\mathbf{e}}^x \frac{1}{t\ \log^\beta t}\ \mathrm{d}\,t = \begin{cases} \frac{1}{\beta-1} & \text{, se } \beta > 1 \\ +\infty & \text{, se } 0 < \beta \leq 1 \end{cases}\ ;$$

conseguentemente, la funzione $1/(x \log^\beta x)$ è impropriamente integrabile in $[\mathbf{e}, +\infty[$ solo se $\beta > 1$ e:

$$\int_{\mathbf{e}}^{+\infty} \frac{1}{x \log^\beta x}\ \mathrm{d}\,x = \frac{1}{\beta - 1}\ .$$

$\diamondsuit$

`Esempio 8:` Consideriamo l'integrale:

$$\int_1^{\mathbf{e}} \frac{1}{x\ \log^\beta x}\ \mathrm{d}\,x$$

con $\beta > 0$, il quale è improprio perché l'integrando è definito in $]1, \mathbf{e}]$ non compatto e non si mantiene limitato intorno a 1.

Fissato un punto $1 < x < \mathbf{e}$, calcoliamo:

$$\begin{aligned}\int_x^{\mathbf{e}} \frac{1}{t\ \log^\beta t}\ \mathrm{d}\,t &\overset{u=\log t}{=} \int_{\log x}^1 \frac{1}{u^\beta}\ \mathrm{d}\,u \\ &= \frac{1}{1-\beta}\left[u^{1-\beta}\right]_{\log x}^1 \\ &= \frac{1}{1-\beta}\left(1-\log^{1-\beta} x\right)\end{aligned}$$

se $\beta \neq 1$ e:

$$\begin{aligned}\int_x^{\mathbf{e}} \frac{1}{t\ \log t}\ \mathrm{d}\,t &\overset{u=\log t}{=} \int_{\log x}^1 \frac{1}{u}\ \mathrm{d}\,u \\ &= [\log|u|]_{\log x}^1 \\ &= -\log|\log x|\end{aligned}$$

se $\beta = 1$; dunque:

$$\lim_{x\to 1^+} \int_x^{\mathbf{e}} \frac{1}{t\ \log^\beta t}\ \mathrm{d}\,t = \begin{cases} \frac{1}{1-\beta} & \text{, se } 0<\beta<1 \\ +\infty & \text{, se } \beta \geq 1 \end{cases} .$$

Conseguentemente, la funzione $1/(x\log^\beta x)$ è impropriamente integrabile in $]1,\mathbf{e}]$ solo se $0 < \beta < 1$ ed in tal caso si ha:

$$\int_1^{\mathbf{e}} \frac{1}{x\log^\beta x}\ \mathrm{d}\,x = \frac{1}{1-\beta}\ .$$

$\diamondsuit$

`Esempio 9:` Consideriamo l'integrale:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\log^\beta x}\ \mathrm{d}\,x$$

che è improprio perché l'integrando è definito in $]1,+\infty[$ non compatto e non è limitato intorno ad 1. Per quanto detto più sopra, gli integrali impropri:

$$\int_1^{\mathbf{e}} \frac{1}{x\log^\beta x}\ \mathrm{d}\,x \qquad \text{e} \qquad \int_{\mathbf{e}}^{+\infty} \frac{1}{x\log^\beta x}\ \mathrm{d}\,x$$

esistono, rispettivamente, solo se $0 < \beta < 1$ e solo se $\beta > 1$; dunque, poiché non esiste alcun valore di β per il quale esistano contemporaneamente entrambi gli integrali impropri, concludiamo che $1/(x\log^\beta x)$ non è impropriamente integrabile in $]1,+\infty[$. $\diamondsuit$

`Esempio 10:` Consideriamo l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \arctan x\ \ \mathrm{d}\,x\ ,$$

il quale è improprio perché la funzione integranda è definita in un intervallo non compatto.

Fissato per comodità $\xi = 0$, per $x < 0 < y$ abbiamo:

$$\begin{aligned}\int_x^0 \arctan t \ \mathrm{d}\,t &= [t\arctan t]_x^0 - \int_x^0 \frac{t}{1+t^2} \ \mathrm{d}\,t \\ &= \left[t\arctan t - \frac{1}{2} \ \log(1+t^2)\right]_x^0 \\ &= \frac{1}{2} \ \log(1+x^2) - x\arctan x \ , \\ \int_0^y \arctan t \ \mathrm{d}\,t &= [t\arctan t]_0^y - \int_0^y \frac{t}{1+t^2} \ \mathrm{d}\,t \\ &= \left[t\arctan t - \frac{1}{2} \ \log(1+t^2)\right]_0^y \\ &= y\arctan y - \frac{1}{2} \ \log(1+y^2) \ ,\end{aligned}$$

cosicché:

$$\lim_{x\to-\infty} \int_x^0 \arctan t \ \mathrm{d}\,t = -\infty$$
$$\lim_{y\to+\infty} \int_0^y \arctan t \ \mathrm{d}\,t = +\infty$$

e perciò la funzione $\arctan x$ non è impropriamente integrabile in $\mathbb{R}$. $\diamondsuit$

2.3. **L'Integrale a Valore Principale di Cauchy *.** Un'ulteriore generalizzazione dell'integrale di Riemann si ottiene considerando quello che si chiama integrale "a valore principale" (o integrale "di Cauchy"):

Definizione 5
Siano $a < b \in \mathbb{R}$, $c \in]a, b[$ ed $f : [a, b] - \{c\} \to \mathbb{R}$.
Si dice che f è *integrabile in* $[a, b]$ *nel senso del valore principale* (o *nel senso di Cauchy*) se e solo se essa è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo del tipo $[a, c-r]$ e $[c+r, b]$ (con $r > 0$ "piccolo") e se esiste finito il:

$$\lim_{r\to0^+} \int_a^{c-r} f(x) \ \mathrm{d}\,x + \int_{c+r}^b f(x) \ \mathrm{d}\,x \ .$$

In tal caso si pone:

$$\mathrm{v.\,p.} \int_a^b f(x) \ \mathrm{d}\,x = \lim_{r\to0^+} \int_a^{c-r} f(x) \ \mathrm{d}\,x + \int_{c+r}^b f(x) \ \mathrm{d}\,x$$

ed il primo membro si chiama *integrale a valore principale di* f *esteso all'intervallo* $[a, b]$.

Definizione 6
Siano $a < b \in \mathbb{R}$ ed $f :]a, b[\to \mathbb{R}$.
Si dice che f è *integrabile in* $]a, b[$ *nel senso del valore principale* (o *nel senso di Cauchy*) se essa è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $[a+r, b-r]$ (con $r > 0$ "piccolo") e se esiste finito il:

$$\lim_{r\to0^+} \int_{a+r}^{b-r} f(x) \ \mathrm{d}\,x \ .$$

In tal caso si pone:

$$\mathrm{v.\,p.} \int_a^b f(x) \ \mathrm{d}\,x = \lim_{r\to0^+} \int_{a+r}^{b-r} f(x) \ \mathrm{d}\,x \ ,$$

ed il primo membro si chiama *integrale a valore principale di f esteso ad* $]a,b[$.

Definizione 7
Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
Si dice che f è *integrabile in* $\mathbb{R}$ *nel senso del valore principale* (o *nel senso di Cauchy*) se essa è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo del tipo $[-R,R]$ (con $R>0$) e se esiste finito il:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\ \mathrm{d}\,x\ .$$

In tal caso, si pone:

$$\mathrm{v.\,p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}\,x=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\ \mathrm{d}\,x$$

ed il primo membro si chiama *integrale a valore principale di f esteso ad* $\mathbb{R}$.

Osservazione 12: Come nei casi precedenti, anche le Definizioni 5 – 7 possono essere combinate per ottenere la definizione dell'integrale a valore principale in casi non coperti dalle stesse.
Ad esempio, l'integrale a valore principale della funzione $1/(x^2-1)$ esteso ad $\mathbb{R}$ si definisce ponendo:

$$\begin{aligned}\mathrm{v.\,p.}&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2-1}\ \mathrm{d}\,x\\ &=\lim_{R\to+\infty,r\to0^+}\int_{-R}^{-1-r} f(x)\ \mathrm{d}\,x+\int_{-1+r}^{1-r} f(x)\ \mathrm{d}\,x+\int_{1+r}^{R} f(x)\ \mathrm{d}\,x\ .\end{aligned}$$

♦

Osservazione 13: La differenza principale tra l'integrale improprio e l'integrale a valore principale è che per il calcolo di quest'ultimo si omettono dal calcolo o si utilizzano per il calcolo intervalli con un certo grado di simmetria.
Per chiarire tale affermazione, soffermiamoci dapprima sul caso di una funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann su ogni compatto contenuto in $\mathbb{R}$. Nel calcolo dell'integrale improprio di f si considera, in fin dei conti, l'integrale di f esteso ad un qualsiasi intervallo $[x,y]$, i.e.:

$$\int_{x}^{y} f(t)\ \mathrm{d}\,t\ ,$$

e poi si mandano *indipendentemente* $x\to-\infty$ e $y\to+\infty$; d'altra parte, nel calcolo dell'integrale a valore principale di f si considera l'integrale di Riemann di f esteso ad intervalli simmetrici $[-R,R]$, cioè:

$$\int_{-R}^{R} f(t)\ \mathrm{d}\,t$$

e poi si manda $R\to+\infty$.
Analogamente, consideriamo una funzione $f:[a,b]-\{c\}\to\mathbb{R}$ limitata ed integrabile secondo Riemann sui compatti contenuti in $[a,c[$ ed in $]c,b]$. Nel calcolo dell'integrale improprio di f si considera la somma:

$$\int_{a}^{x} f(t)\ \mathrm{d}\,t+\int_{y}^{b} f(t)\ \mathrm{d}\,t\ ,$$

il che equivale ad escludere dal computo dell'integrale il generico intervallo $]x,y[\subseteq[a,b]$ contenente il punto "singolare" c, e successivamente si mandano *indipendentemente* $x\to c^-$ ed $y\to c^+$; invece, nel calcolo dell'integrale a valore principale di f

si considera la somma:

$$\int_a^{c-r} f(t)\ \mathrm{d}\,t + \int_{c+r}^{b} f(t)\ \mathrm{d}\,t\ ,$$

il che equivale ad escludere dal computo dell'integrale il generico intorno simmetrico $]c-r, c+r[\subseteq [a,b]$ contenente il punto "singolare" c, e successivamente si manda $r \to 0^+$.
Considerazioni del tutto simili valgono nel caso di $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, in cui si usa per calcolare l'integrale a valore principale l'intervallo $[a+r, b-r]$ simetrico rispetto al punto medio $\frac{a+b}{2}$.
Quindi, in generale, nei casi base possiamo affermare che l'integrale a valore principale di f si calcola come quello improprio, ma aggirando i "punti singolari" od avvicinandosi ad essi *in maniera simmetrica.* ♦

L'**Osservazione** precedente mostra che l'integrale a valore principale può essere considerato come un caso particolare di integrale improprio; ciò è vero in generale ed il risultato che segue getta luce sul legame tra i due tipi di integrali:

Proposizione 3
Se f è integrabile in senso improprio in (a,b) allora essa è integrabile anche nel senso del valore principale ed i due integrali coincidono, i.e.:

$$\mathrm{v.\,p.} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}\,x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}\,x\ .$$

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione nel caso coperto dalla Definizione 5. Supponiamo che $f : [a,b] - \{c\} \to \mathbb{R}$ sia impropriamente integrabile in $[a,b]$: ciò, per definizione significa che esistono i due integrali impropri:

$$\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}\,x = \lim_{x\to c^-} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}\,t \qquad \text{e} \qquad \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}\,x = \lim_{y\to c^+} \int_y^b f(t)\ \mathrm{d}\,t\ ;$$

facendo nei due limiti i cambiamenti di variabile $x = c-r$ ed $y = c+r$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}\,x &= \lim_{r\to 0^+} \int_a^{c-r} f(t)\ \mathrm{d}\,t \\ \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}\,x &= \lim_{r\to 0^+} \int_{c+r}^b f(t)\ \mathrm{d}\,t\ , \end{aligned}$$

onde, visti i teoremi sulle operazioni coi limiti, traiamo:

$$\begin{aligned} \mathrm{v.\,p.} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}\,x &= \lim_{r\to 0^+} \int_a^{c-r} f(x)\ \mathrm{d}\,x + \int_{c+r}^b f(x)\ \mathrm{d}\,x \\ &= \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x) \\ &= \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}\,x \end{aligned}$$

che è la tesi. □

Il viceversa, in generale, non vale; in altre parole, esistono funzioni integrabili nel senso del valore principale che non sono dotate di integrale improprio. Gli esempi che seguono illustrano il verificarsi di tale circostanza.

`Esempio 11:` Abbiamo già mostrato che $\arctan x$ non è impropriamente integrabile in $\mathbb{R}$.

D'altra parte, la disparità dell'integrando rende di banale verifica l'uguaglianza:

$$\mathrm{v.\,p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \arctan x \ \mathrm{d}\,x = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} \arctan x \ \mathrm{d}\,x = 0\ ,$$

cosicché $\arctan x$ è integrabile su $\mathbb{R}$ nel senso del valore principale. $\diamondsuit$

`Esempio 12:` Abbiamo già osservato che la funzione $1/x$ non è impropriamente integrabile in $]0,1]$ e ciò importa che essa non è integrabile in senso improprio nemmeno sull'intervallo $[-1,1]$.
D'altra parte, la disparità dell'integrando rende di banale verifica l'uguaglianza:

$$\mathrm{v.\,p.}\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} \ \mathrm{d}\,x = \lim_{r\to 0^+}\int_{-1}^{-r} \frac{1}{x} \ \mathrm{d}\,x + \int_{r}^{1} \frac{1}{x} \ \mathrm{d}\,x = 0\ ,$$

cosicché $1/x$ è integrabile su $[-1,1]$ nel senso del valore principale. $\diamondsuit$

3. Criteri d'Integrabilità Impropria

3.1. **Criterio di Convergenza di Cauchy.** Una volta capito che l'integrabilità in senso improprio equivale alla convergenza di opportune funzioni integrali, possiamo stabilire un criterio di integrabilità basato sul criterio di convergenza di Cauchy.
Prendiamo ad esempio un caso modello, potendosi il discorso generalizzare in maniera abbastanza immediata:

Teorema 3 (Criterio di Cauchy per l'Integrale Improprio)
Sia $f:[a,b[\to\mathbb{R}$ (qui può essere anche $b=+\infty$) una funzione integrabile secondo Riemann sui compatti $[\alpha,\beta]\subset[a,b[$.
La f è impropriamente integrabile in $[a,b[$ se e solo se è soddisfatta la seguente proprietà:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists I \text{ intorno di } b:\quad \forall x_1,x_2\in[a,b[\cap I,\ \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\ \mathrm{d}\,t\right|<\varepsilon\ . \tag{6}$$

Dimostrazione. Abbiamo già osservato che f è impropriamente integrabile su $[a,b[$ se e solo se la funzione integrale F con piede in a è convergente in b (da sinistra ovviamente); d'altra parte, tale funzione è convergente in b se e solo se essa soddisfa la proprietà di Cauchy:

$$\forall\varepsilon>0:\ \exists I \text{ intorno di } b:\quad \forall x_1,x_2\in[a,b[\cap I,\ |F(x_2)-F(x_1)|<\varepsilon\ ,$$

la quale coincide con la (6) per la proprietà additiva dell'integrale, che assicura:

$$F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(t)\ \mathrm{d}\,t\ .$$

$\square$

Il *Criterio di Cauchy* è difficilmente applicabile nella pratica ma le sue conseguenze, come vedremo, sono di vasta portata. Una delle prime conseguenze è quella riportata nella seguente:

Osservazione 14: Dal *Criterio di Cauchy* segue immediatamente che se $b\in\mathbb{R}$ ed $f:[a,b[\to\mathbb{R}$ è limitata intorno a b, allora f è impropriamente integrabile in $[a,b[$.
Infatti, se esistono $M\geq 0$ e $\delta'>0$ tale che $|f(x)|\leq M$ in $[a,b[\cap]b-\delta',b+\delta'[$, a patto di prendere $x_1<x_2\in[a,b[\cap]b-\delta',b+\delta'[$ per disuguaglianza triangolare e proprietà di confronto abbiamo:

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\ \mathrm{d}\,x\right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\ \mathrm{d}\,x \leq M(x_2-x_1)\ ;$$

in corrispondenza di $\varepsilon > 0$ è possibile determinare $\delta = \min\{\delta', \frac{\varepsilon}{M+1}\} > 0$ in modo che per ogni $x_1 < x_2 \in [a,b[\cap]b-\delta, b+\delta[$ si ha:

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, \mathrm{d}\,x \right| \leq \frac{M}{M+1} \varepsilon < \varepsilon \ ,$$

perciò f soddisfa il *Criterio di Cauchy per l'Integrale* ed è impropriamente integrabile in $[a,b[$. ♦

3.2. **Criteri di Integrabilità per Funzioni non negative.** Una delle classi di funzioni che maggiormente ci interessano è quella costituita dalle funzioni non negative nel proprio intervallo di definizione. L'interesse in tali funzioni risiede nel fatto che esse godono di numerose buone proprietà rispetto all'integrazione impropria. Ciò è, a ben vedere, conseguenza del seguente e semplicissimo:

Lemma 1 (Monotònia delle Funzioni Integrali)
Siano $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione limitata ed integrabile sui compatti contenuti in (a,b) ed $x_0 \in (a,b)$.
Posto:

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t) \, \mathrm{d}\,t$$

per $x \in (a,b)$, se $f(x) \geq 0$ [risp. ≤ 0] ovunque in (a,b) allora F è crescente [risp. decrescente] in (a,b).

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione nel caso $f(x) \geq 0$ ovunque.
Scelti $x_1 < x_2 \in (a,b)$, per proprietà additiva e per confronto abbiamo:

$$\begin{aligned} F(x_2) - F(x_1) &= \int_{x_0}^{x_2} f(t) \, \mathrm{d}\,t - \int_{x_0}^{x_1} f(t) \, \mathrm{d}\,t \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{f(t)}_{\geq 0} \, \mathrm{d}\,t \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

sicché $F(x_1) \leq F(x_2)$. □

Il Lemma 1 implica che la funzione integrale:

$$F(x) := \int_{a}^{x} f(t) \, \mathrm{d}\,t$$

è monotòna, dunque regolare in b; pertanto, l'integrale improprio $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\,x$ o è convergente, cosicché f è impropriamente integrabile in $[a,b[$, oppure è divergente, ed f non è impropriamente integrabile in $[a,b[$.

Un'altra conseguenza del Lemma 1 è il fondamentale:

Teorema 4 (Criterio del Confronto)
Siano $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ funzioni integrabili sui compatti contenuti in $[a,b[$, ivi non negative e tali che $f(x) \leq g(x)$ in $[a,b[$.
Valgono i seguenti fatti:

i) se g è impropriamente integrabile in $[a,b[$, tale è anche f e risulta:

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\,x \leq \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}\,x \ .$$

ii) se f non è impropriamente integrabile in $[a,b[$, allora anche g non lo è.

Dimostrazione. Dette F e G, rispettivamente, le funzioni integrali di f e g con piede in a, F e G sono crescenti in $[a, b[$ e perciò sono entrambe regolari in b e tendono al proprio estremo superiore.
Proviamo la *i.* Per ogni $x \in [a, b[$ si ha:

$$F(x) \leq G(x) \leq \lim_{x \to b^-} \int_a^x g(t)\ \mathrm{d}\, t = \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}\, x\ ,$$

quindi l'integrale improprio di g è un maggiorante di F; ciò importa che F converge in b e che:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}\, x = \lim_{x \to b^-} F(x) \leq \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}\, x\ ,$$

come volevamo.
Proviamo la *ii.* Per confronto, abbiamo:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}\, t \leq \int_a^x g(t)\ \mathrm{d}\, t = G(x)$$

in $[a, b[$; per monotònia, se f non è impropriamente integrabile in $[a, b[$, risulta $F(x) \to +\infty$ per $x \to b^-$ e ciò implica, per confronto, $G(x) \to +\infty$; dunque g non è impropriamente integrabile in $[a, b[$. □

Osservazione 15: L'ipotesi $f(x) \leq g(x)$ in $[a, b[$ può essere leggermente indebolita, richiedendo che la disuguaglianza sia soddisfatta solo in un opportuno intorno sinistro $[b - \delta, b[$. Infatti, fissato $x \in]b - \delta, b[$ troviamo:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}\, t \\
&= \int_a^{b-\delta} f(t)\ \mathrm{d}\, t + \int_{b-\delta}^x \underbrace{f(t)}_{\leq g(t)}\ \mathrm{d}\, t \\
&\leq \int_a^{b-\delta} f(t)\ \mathrm{d}\, t + \int_{b-\delta}^x g(t)\ \mathrm{d}\, t \\
&= \underbrace{\int_a^{b-\delta} f(t)\ \mathrm{d}\, t - \int_a^{b-\delta} g(t)\ \mathrm{d}\, t}_{=:C} \int_a^x g(t)\ \mathrm{d}\, t \\
&= C + G(x)\ ,
\end{aligned}$$

cosicché se G converge in b anche F vi converge, dunque f è impropriamente integrabile in $[a, b[$, e viceversa se F diverge in b anche G vi diverge, cosicché g non è impropriamente integrabile in $[a, b[$. ♦

Il *Criterio del Confronto* ha una versione asintotica, la quale risulta molto utile nelle applicazioni:

PROPOSIZIONE 4 (Criterio del Confronto Asintotico)
Siano $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ funzioni integrabili sui compatti contenuti in $[a, b[$, ivi non negative e tali che:

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in]0, +\infty[\ .$$

allora o f e g sono entrambe integrabili impropriamente in $[a, b[$ oppure entrambe non lo sono.

Dimostrazione. Dalla definizione di limite con $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$ segue immediatamente che esiste un $\delta > 0$ tale che:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \frac{l}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{l}{2}\, g(x) < f(x) < \frac{3l}{2}\, g(x)$$

per ogni $x \in [a,b[\cap]b-\delta, b+\delta[$; detto ξ un punto di $[a,b[\cap]b-\delta, b+\delta[$, le disuguaglianze $\frac{l}{2}\, g(x) < f(x) < \frac{3l}{2}\, g(x)$ valgono in $[\xi, b[$ e ciò, per il *Criterio del Confronto*, implica la contemporanea convergenza o divergenza dei due integrali impropri:

$$\int_\xi^b f(x)\ \mathrm{d}\,x \qquad \text{e} \qquad \int_\xi^b g(x)\ \mathrm{d}\,x.$$

La tesi segue per proprietà additiva dell'integrale. □

Osservazione 16: Nelle ipotesi del Criterio del Confronto Asintotico abbiamo supposto tacitamente che $g(x) > 0$ almeno in un opportuno intorno sinistro di b (altrimenti, la funzione $f(x)/g(x)$ non sarebbe ben definita intorno a b).
Volendo ovviare a questo fatto, è possibile sostituire l'ipotesi:

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in]0, +\infty[\ .$$

con la relazione $f(x) = lg(x) + \mathrm{o}\big(g(x)\big)$ per $x \to b$. ♦

Il *Criterio del Confronto Asintotico* ha come pressoché immediata conseguenza due criteri di integrabilità basati sull'ordine di infinito/infinitesimo.

Proposizione 5 (Criterio dell'Ordine di Infinito)
Siano $a < b \in \mathbb{R}$ ed $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ una funzione non negativa in $[a,b[$ ed integrabile sugli intervalli $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b[$.
Se f è un infinito in b d'ordine $p > 0$, i.e.:

$$\lim_{x\to b^-} |x-b|^p\ f(x) = l \in]0, +\infty[\ ,$$

allora:

(1) se $p < 1$, allora f è impropriamente integrabile in $[a,b[$;

(2) se $p \geq 1$, allora f non è impropriamente integrabile in $[a,b[$.

Proposizione 6 (Criterio dell'Ordine di Infinitesimo)
Siano $a \in \mathbb{R}$ ed $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione non negativa in $[a,+\infty[$ ed integrabile sugli intervalli $[\alpha,\beta] \subseteq [a,+\infty[$.
Se f è un infinitesimo in $+\infty$ d'ordine $p > 0$, i.e.:

$$\lim_{x\to +\infty} x^p\ f(x) = l \in]0, +\infty[\ ,$$

allora:

(1) se $p > 1$, allora f è impropriamente integrabile in $[a,+\infty[$;

(2) se $p \leq 1$, allora f non è impropriamente integrabile in $[a,+\infty[$.

Proviamo il primo dei due, potendosi ragionare analogamente per l'altro.

Dimostrazione. Supponiamo che $|x-b|^p f(x) \to l > 0$ per $x \to b^-$.
Per definizione di limite, in corrispondenza di $\varepsilon = l/2$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in [b-\delta, b[$ risulta:

$$||x-b|^p f(x) - l| < \frac{l}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{l}{2(b-x)^p} \leq f(x) \leq \frac{3l}{2(b-x)^p} \ .$$

Se $p < 1$, dalla disuguaglianza superiore segue che f è maggiorata da una funzione potenza impropriamente integrabile in $[b-\delta, b[$ (cfr. `Esempio` 5 ed **Osservazione 11**) e tanto basta per concludere l'integrabilità di f in $[a, b[$ via il *Criterio del Confronto*.
Analogamente, se $p \geq 1$, dalla disuguaglianza inferiore segue che f è minorata da una funzione potenza non impropriamente integrabile in $[b-\delta, b[$ (cfr. `Esempio` 5 ed **Osservazione 11**) e tanto basta per concludere la non integrabilità di f in $[a, b[$ per confronto. □

Le ipotesi delle PROPOSIZIONI precedenti si possono limare un po' per includere qualche caso d'interesse; infatti, vale il:

TEOREMA 5 (Criterio dell'Ordine di Infinito Migliorato)
Siano $a < b \in \mathbb{R}$ ed $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione non negativa in $[a, b[$ ed integrabile in ogni $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b[$.
Se f è un infinito d'ordine inferiore ad un $p < 1$ in b, allora f è impropriamente integrabile in $[a, b[$.
Se f è un infinito d'ordine non inferiore ad 1 in b, *allora f non è impropriamente integrabile in $[a, b[$.*

TEOREMA 6 (Criterio dell'Ordine di Infinitesimo Migliorato)
Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione non negativa in $[a, +\infty[$ ed integrabile in ogni $[\alpha, \beta] \subseteq [a, +\infty[$.
Se f è un infinitesimo d'ordine superiore ad un $p > 1$ in $+\infty$, allora f è impropriamente integrabile in $[a, +\infty[$.
Se f è un infinitesimo d'ordine non superiore ad 1 in $+\infty$, *allora f non è impropriamente integrabile in $[a, +\infty[$.*

Osservazione 17: Ricordiamo che una funzione non negativa f è un infinito d'ordine *non inferiore ad* 1 *in* b se e solo se una minorazione del tipo

$$|x-b| \ f(x) \geq m$$

con $m > 0$ sussiste in un opportuno intorno sinistro di b.
Analogamente, una funzione non negativa f è un infinitesimo d'ordine *non superiore ad* 1 *in* $+\infty$ se e solo se una minorazione del tipo:

$$|x| \ f(x) \geq m$$

con $m > 0$ sussiste in un opportuno intorno sinistro di $+\infty$. ♦

Proviamo di nuovo il primo, potendosi ragionare analogamente per l'altro.

Dimostrazione. Supponiamo f sia un infinito d'ordine inferiore ad $1/|x-b|^p$ con $p < 1$ per $x \to b^-$, ossia che:

$$\lim_{x \to b^-} |x-b|^p f(x) = 0 \ .$$

In corrispondenza di $\varepsilon = 1$ possiamo determinare un intorno sinistro di b in cui risulta:

$$|x-b|^p \ f(x) < 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) < \frac{1}{|x-b|^p}$$

con $p < 1$; da ciò e dal *Criterio del Confronto* si trae l'integrabilità di f in $[a, b[$.
Analogamente, supponiamo che f sia un infinito d'ordine non inferiore ad 1 in b: ciò accade quando esiste un intorno sinistro di b in cui risulta:

$$|x-b|\ f(x) \geq m \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq \frac{m}{|x-b|}\ ;$$

da ciò e dal *Criterio del Confronto* si trae che f non è integrabile in $[a, b[$. $\square$

`Esempio 13:` Il *Criterio dell'Ordine di Infinitesimo Migliorato* si può applicare, ad esempio, per stabilire che le funzioni:

$$\frac{|\sin x|}{x^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{|\cos x|}{x^2}$$

sono impropriamente integrabili su $[a, +\infty[$ (con $a > 0$).
Infatti, entrambe le funzioni sono continue (e dunque integrabili sugli intervalli compatti contenuti in $[a, +\infty[$) ed infinitesime all'infinito d'ordine superiore a $3/2 > 1$. $\diamondsuit$

`Esempio 14:` Più in generale, le funzioni:

$$\frac{|\sin x|}{x^\alpha} \qquad \text{e} \qquad \frac{|\cos x|}{x^\alpha}$$

sono impropriamente integrabili su $[a, +\infty[$ (con $a > 0$) se $\alpha > 1$ e non lo sono se $\alpha < 1$.
Infatti, entrambe le funzioni sono continue (e dunque integrabili sugli intervalli compatti contenuti in $[a, +\infty[$) ed infinitesime all'infinito d'ordine superiore a $\frac{\alpha+1}{2} > 1$ se $\alpha > 1$; mentre sono infinitesime d'ordine non superiore ad 1 se $\alpha < 1$. $\diamondsuit$

Osservazione 18: Per $\alpha = 1$ si dimostra che entrambe le funzioni dell'`Esempio` precedente non sono impropriamente integrabili su intervalli del tipo $[a, +\infty[$ (con $a > 0$).
Proviamo, a titolo d'esempio, che $\frac{|\sin x|}{x}$ non è integrabile in senso improprio su $[\pi/2, +\infty[$.
Innanzitutto, osserviamo che, essendo $\frac{|\sin x|}{x} \geq 0$ ovunque in $[\pi/2, +\infty[$, l'integrale improprio di tale funzione è regolare in $+\infty$ e che il suo valore può, a norma del *Teorema Ponte*, essere calcolato scegliendo un'arbitraria successione $R_n \to +\infty$ e passando la successione di termine generale $\int_{\pi/2}^{R_n} \frac{|\sin x|}{x}\, \mathrm{d}\, x$ al limite per $n \to +\infty$.
Consideriamo $R_n = n\pi$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e la successione di termine generale:

$$I_n := \int_{\pi/2}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\ \mathrm{d}\, x\ .$$

Tenendo presente che la funzione $1/x$ è decrescente, abbiamo:

$$\begin{aligned}
I_n &= \underbrace{\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{|\sin x|}{x}\ \mathrm{d}\,x}_{=:C} + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\ \mathrm{d}\,x \\
&\geq C + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}\ \mathrm{d}\,x \\
&= C + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\ \mathrm{d}\,x \\
&= C + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} (-1)^k \sin x\ \mathrm{d}\,x \\
&= C + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi}\ (-1)^k \big[\cos(k\pi) - \cos\big((k+1)\pi\big)\big] \\
&= C + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi}\ (-1)^k \big[(-1)^k 2\big] \\
&= C + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi} \\
&= C + \frac{2}{\pi}\ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \\
&\overset{h=k+1}{=} C + \frac{2}{\pi}\ \sum_{h=2}^{n} \frac{1}{h} \\
&= \underbrace{C - \frac{2}{\pi}}_{=C'} + \frac{2}{\pi}\ \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{h}\ ;
\end{aligned}$$

ne consegue che $I_n \geq C' + \frac{2}{\pi}\ s_n$, in cui C' è una costante ed s_n è la somma parziale n-esima della serie armonica [DM, § 1.4]. Dato che la serie armonica diverge positivamente, da $I_n \geq C' + \frac{2}{\pi} s_n$ per confronto segue $I_n \to +\infty$; dunque:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \int_{\pi/2}^{x} \frac{|\sin t|}{t}\ \mathrm{d}\,t &\overset{x=n\pi}{=} \lim_{n\to+\infty} \int_{\pi/2}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\ \mathrm{d}\,t \\
&= \lim_{n\to+\infty} I_n \\
&= +\infty\ ;
\end{aligned}$$

e perciò la funzione $\frac{|\sin x|}{x}$ non è impropriamente integrabile in $[a, +\infty[$. ♦

3.3. **Funzioni Sommabili e Criteri di Sommabilità.** La seguente definizione è fondamentale:

Definizione 8 (Funzioni Sommabili)
Si dice che una funzione f è sommabile in (a, b) se e solo se la funzione $|f|$ è impropriamente integrabile in (a, b).

L'importanza della precedente definizione risiede nel seguente:

TEOREMA 7 (Criterio di Integrabilità per Funzioni Sommabili)
Se f è sommabile in (a,b), allora essa è pure impropriamente integrabile in (a,b) e risulta:

$$\left| \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}\,x \right| \leq \int_a^b \left| f(x) \right|\ \mathrm{d}\,x\ .$$

Dimostrazione. Consideriamo, come modello, il caso di una funzione $f : [a,b[\to \mathbb{R}$. Dato che $|f|$ è sommabile in $[a,b[$, per il *Criterio di Cauchy* per l'integrale improprio abbiamo:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists I \text{ intorno di } b : \quad \forall x_1, x_2 \in [a,b[\cap I,\ \left| \int_{x_1}^{x_2} \left| f(t) \right|\ \mathrm{d}\,t \right| < \varepsilon$$

e dalla *disuguaglianza triangolare* per l'integrale di Riemann:

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\ \mathrm{d}\,t \right| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} \left| f(t) \right|\ \mathrm{d}\,t \right|$$

segue immediatamente che per l'integrale di f vale il *Criterio di Cauchy*; dunque f è impropriamente integrabile in $[a,b[$.
Per mostrare la disuguaglianza, basta ricordare che:

$$\left| \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}\,t \right| \leq \int_a^x \left| f(t) \right|\ \mathrm{d}\,t$$

e l'asserto segue passando al limite per $x \to b^-$. □

Osservazione 19 (Funzioni Integrabili ma non Sommabili)**:** Notiamo esplicitamente che si possono costruire esempi di funzioni impropriamente integrabili su un intervallo ma ivi non sommabili. Pertanto il TEOREMA esprime una condizione sufficiente, ma nient'affatto necessaria, all'integrabilità impropria.
Per lumeggiare tale circostanza, consideriamo l'integrale improprio:

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}\,x\ .$$

Sfruttando la definizione con il limite ed integrando per parti con fattore differenziale $\sin x$, troviamo:

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}\,x &= \lim_{R \to +\infty} \int_{\pi/2}^{R} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}\,x \\
&= \lim_{R \to +\infty} \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_{\pi/2}^{R} - \int_{\pi/2}^{R} \frac{\cos x}{x^2}\ \mathrm{d}\,x \\
&= \lim_{R \to +\infty} -\frac{\cos R}{R} - \int_{\pi/2}^{R} \frac{\cos x}{x^2}\ \mathrm{d}\,x\ .
\end{aligned}$$

Il primo addendo nel limite all'ultimo membro è infinitesimo per $R \to +\infty$; d'altro canto, si ha:

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

per $x \in [\pi/2, +\infty[$, con la funzione maggiorante impropriamente integrabile in tale intervallo, cosicché l'integrale improprio di $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right|$ esiste finito (per *Criterio del Confronto*) e la funzione $\frac{\cos x}{x^2}$ è sommabile per il *Criterio di Sommabilità*; ne consegue:

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}\,x &= \lim_{R\to+\infty} -\frac{\cos R}{R} - \int_{\pi/2}^{R} \frac{\cos x}{x^2}\ \mathrm{d}\,x \\ &= -\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\ \mathrm{d}\,x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

cosicché la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è impropriamente integrabile.
D'altra parte, $\frac{\sin x}{x}$ non è una funzione sommabile, poiché l'integrale improprio di $\frac{|\sin x|}{x}$ non converge. ♦

Osservazione 20: Il Teorema 7 aiuta a convincersi che l'integrale improprio è una generalizzazione *imperfetta* dell'integrale di Riemann, poiché per l'integrale di Riemann vale esattamente la proprietà opposta (cioè, se f è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$ tale è pure $|f|$).
Per convincersi che, in generale, la proprietà enunciata nel Teorema 7 non valga per l'integrale di Riemann basta meditare sul seguente semplice esempio.
Sappiamo che la funzione d di Dirichlet (la quale assume valore 1 sugli irrazionali e 0 sui razionali) non è integrabile secondo Riemann su $[0,1]$. Consideriamo la funzione $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definita ponendo $f(x):=d(x)-1/2$: tale funzione assume valore $1/2$ [risp. $-1/2$] sugli irrazionali [risp. sui razionali] e non è integrabile secondo Riemann in $[0,1]$ (poiché se lo fosse risulterebbe integrabile anche $d(x)=f(x)+1/2$).
D'altra parte, però, abbiamo $|f(x)|=1/2$ identicamente in $[0,1]$ cosicché $|f|$ è costante ed integrabile secondo Riemann in $[0,1]$. ♦

Tutti i criteri di convergenza stabiliti per gli integrali impropri di funzioni non negative si trasformano in criteri di sommabilità, semplicemente considerando al posto di una generica funzione non negativa il valore assoluto $|f|$ della funzione f della quale si vuole provare la sommabilità.
Ad esempio, molto utili nella pratica sono i criteri di somabilità per ordine di infinito/infinitesimo che riportiamo qui di seguito:

Proposizione 7 (Sommabilità per Ordine di Infinito)
Siano $a<b\in\mathbb{R}$ ed $f:[a,b[\to\mathbb{R}$ una funzione integrabile sugli intervalli $[\alpha,\beta]\subseteq[a,b[$.
Se $|f|$ è un infinito in b d'ordine $p>0$, i.e.:

$$\lim_{x\to b^-} |x-b|^p\ |f(x)| = l \in]0,+\infty[\ ,$$

allora:

(1) se $p<1$, allora f è sommabile in $[a,b[$;

(2) se $p\geq 1$, allora f non è sommabile in $[a,b[$.

Teorema 8 (Sommabilità per Ordine di Infinito Migliorato)
Siano $a<b\in\mathbb{R}$ ed $f:[a,b[\to\mathbb{R}$ una funzione integrabile in ogni $[\alpha,\beta]\subseteq[a,b[$.
Se $|f|$ è un infinito d'ordine inferiore ad un $p<1$ in b, allora f è sommabile in $[a,b[$.
Se $|f|$ è un infinito d'ordine non inferiore ad 1 in *b, allora f non è sommabile in $[a,b[$.*

Proposizione 8 (Sommabilità per Ordine di Infinitesimo)
Siano $a\in\mathbb{R}$ ed $f:[a,+\infty[\to\mathbb{R}$ una funzione integrabile sugli intervalli $[\alpha,\beta]\subseteq$

$[a, +\infty[$.
Se $|f|$ *è un infinitesimo in* $+\infty$ *d'ordine* $p > 0$*, i.e.:*

$$\lim_{x \to +\infty} x^p \ |f(x)| = l \in]0, +\infty[\ ,$$

allora:

(1) se $p > 1$*, allora* f *è sommabile in* $[a, +\infty[$*;*

(2) se $p \leq 1$*, allora* f *non è sommabile in* $[a, +\infty[$*.*

TEOREMA 9 (Sommabilità per Ordine di Infinitesimo Migliorato)
Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *una funzione integrabile in ogni* $[\alpha, \beta] \subseteq [a, +\infty[$*.*
Se $|f|$ *è un infinitesimo d'ordine superiore ad un* $p > 1$ *in* $+\infty$*, allora* f *è sommabile in* $[a, +\infty[$*.*
Se $|f|$ *è un infinitesimo d'ordine* non superiore ad 1 in $+\infty$*, allora* f *non è sommabile in* $[a, +\infty[$*.*

Riferimenti bibliografici

[AT] Alvino, A. & Trombetti, G. (1999) **Elementi di Matematica I**, Liguori, Napoli.

[DM] Di Meglio, G. (2017) *Complementi sulle Serie Numeriche* [reperibile su www.docenti.unina.it].

[MS] Marcellini, P. & Sbordone, C. (1998) **Analisi Matematica Uno**, Liguori, Napoli.

[P] Prodi, G. (1975) **Lezioni di Analisi Matematica I**, Bollati Boringhieri, Torino.

[PS] Pagani, C. D. & Salsa, S. (2015) **Analisi Matematica 1 - seconda edizione**, Zanichelli, Bologna.

GUGLIELMO DI MEGLIO, PHD
SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"
PIAZZALE TECCHIO 80
80126 NAPOLI – ITALY
EMAIL: guglielmo.dimeglio@unina.it