

ALCUNI ESERCIZI SUL CALCOLO INTEGRALE

G. DI MEGLIO

INDICE

Introduzione	1
1. Integrali Immediati	1
2. Integrali che si Calcolano per Parti	3
3. Integrali Razionali	4
4. Integrali che si Calcolano per Sostituzione	8
5. Integrali Impropri	10
6. Calcolo Integrale	13
Appendice A. Tabelle di Integrali Fondamentali ed Immediati	25
Appendice B. Regole di Integrazione Indefinita e Definita	27
Appendice C. Integrazione di Funzioni Razionali	27
Riferimenti bibliografici	32

INTRODUZIONE

In questi fogli, che accompagnano le mie note [DM1], sono proposti alcuni esercizi sull'integrazione indefinita, definita ed impropria.

Lo spettro di tali esercizi, seppur ampio, non esaurisce tutte le possibili eventualità che si possono presentare nel Calcolo. È lasciato allo studioso lettore il compito di reperire e svolgere ulteriori esercizi¹, qualora egli non si sentisse ancora padrone delle tecniche di integrazione indefinita elementare.

Infine, nell'ultimo paragrafo sono proposti alcuni esercizi *teorici* sull'integrazione definita, i quali servono a prendere confidenza con la teoria svolta a lezione e le sue potenzialità.

Avvertenza: Nei presenti fogli, quando non è specificato altrimenti, i simboli a, b, λ, ω, p denotano numeri reali (con $a, p \neq 0$ e $\lambda, \omega > 0$) ed n denota un numero naturale ≥ 1 .

1. INTEGRALI IMMEDIATI

Esercizio 1: I seguenti integrali si calcolano come integrali “della tabella” (cfr. TABELLE 1 e 2).

$$(1) \quad \int \sqrt[n]{ax+b} \, dx = \frac{n}{a(n+1)} \sqrt[n]{(ax+b)^{n+1}} + C,$$

Date: 9 agosto 2018.

¹Tali esercizi si trovano su un qualsiasi eserciziario di Analisi I, ivi compresi quelli consigliati a lezione, ed anche in rete.

- (2)
$$\int \frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}} dx = \frac{n}{a(n-1)} \sqrt[n]{(ax+b)^{n-1}} + C,$$
- (3)
$$\int x \sqrt[n]{ax^2+b} dx = \frac{n}{2a(n+1)} \sqrt[n]{(ax^2+b)^{n+1}} + C,$$
- (4)
$$\int \frac{x^2}{\sqrt[n]{ax^3+b}} dx = \frac{n}{3a(n-1)} \sqrt[n]{(ax^3+b)^{n-1}} + C,$$
- (5)
$$\int e^{e^{px}+px} dx = \frac{1}{p} e^{e^{px}} + C,$$
- (6)
$$\int \frac{\sqrt[n]{\log x}}{x} dx = \frac{n}{n+1} \sqrt[n]{\log^{n+1} x} + C,$$
- (7)
$$\int \frac{\log^b x}{x} dx = \begin{cases} \frac{1}{b+1} \log^{b+1} x + C & , \text{ se } b \neq -1 \\ \log |\log x| + C & , \text{ se } b = -1 \end{cases},$$
- (8)
$$\int \sin^b(\omega x) \cos(\omega x) dx = \begin{cases} \frac{1}{\omega(b+1)} \sin^{b+1}(\omega x) + C & , \text{ se } b \neq -1 \\ \frac{1}{\omega} \log |\sin(\omega x)| + C & , \text{ se } b = -1 \end{cases},$$
- (9)
$$\int \sin(\omega x) \cos^b(\omega x) dx = \begin{cases} -\frac{1}{\omega(b+1)} \cos^{b+1}(\omega x) + C & , \text{ se } b \neq -1 \\ -\frac{1}{\omega} \log |\cos(\omega x)| + C & , \text{ se } b = -1 \end{cases},$$
- (10)
$$\int \frac{\sin^4(\omega x)}{\cos^6(\omega x)} dx = \frac{1}{5} \tan^5(\omega x) + C,$$
- (11)
$$\int \frac{1}{\cos^2(\omega x) \sqrt[n]{\tan(\omega x)}} dx = \frac{n}{\omega(n-1)} \sqrt[n]{\tan^{n-1}(\omega x)} + C,$$
- (12)
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+\omega^2}} dx = \operatorname{settsinh}\left(\frac{x}{\omega}\right) + C,$$
- (13)
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-\omega^2}} dx = \operatorname{settcosh}\left(\frac{x}{\omega}\right) + C,$$
- (14)
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^4+\omega^2}} dx = \frac{1}{2} \operatorname{settsinh}\left(\frac{x^2}{\omega}\right) + C,$$
- (15)
$$\int \frac{e^{px}}{\sqrt{e^{2px}-\omega^2}} dx = \frac{1}{p} \operatorname{settcosh}\left(\frac{e^{px}}{\omega}\right) + C,$$
- (16)
$$\int \frac{\operatorname{setttanh}\left(\frac{x}{\omega}\right)}{\omega^2-x^2} dx = \begin{cases} \frac{1}{\omega(b+1)} \operatorname{setttanh}^{b+1}\left(\frac{x}{\omega}\right) + C & , \text{ se } b \neq -1 \\ \frac{1}{\omega} \log |\operatorname{setttanh}\left(\frac{x}{\omega}\right)| + C & , \text{ se } b = -1 \end{cases},$$
- (17)
$$\int \frac{e^{\operatorname{setttanh}(\frac{x}{\omega})}}{\omega^2-x^2} dx = \frac{1}{\omega} e^{\operatorname{setttanh}(\frac{x}{\omega})} + C,$$
- (18)
$$\int \frac{e^{p\sqrt{ax+b}}}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2}{ap} e^{p\sqrt{ax+b}} + C,$$
- (19)
$$\int \frac{e^{p\arctan(ax+b)}}{1+(ax+b)^2} dx = \frac{1}{ap} e^{p\arctan(ax+b)} + C,$$
- (20)
$$\int 2^{ax+b} dx = \frac{1}{a \log 2} 2^{ax+b} + C,$$
- (21)
$$\int \sin(\omega x) \pi^{\cos(\omega x)} dx = -\frac{1}{\omega \log \pi} \pi^{\cos(\omega x)} + C,$$
- (22)
$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Esercizio 2: Determinare una formula di ricorrenza per:

$$I(n) := \int \tan^n(\omega x) \, dx$$

e dimostrare che l'integrale in questione è elementare.

[**Suggerimento:** Ricordare che $\tan^2(\omega x) = \frac{1}{\cos^2(\omega x)} - 1$, sfruttare le proprietà delle potenze e decomporre in somma.]

2. INTEGRALI CHE SI CALCOLANO PER PARTI

Esercizio 3: Calcolare i seguenti integrali usando la formula d'integrazione per parti:

$$(23) \quad \int (x^2 + 1) e^x \, dx = e^x (x^2 - 2x + 3) + C,$$

$$(24) \quad \int (x^3 - x) e^{x^2+1} \, dx = \frac{1}{2} e^{x^2+1} (x^2 - 2) + C,$$

$$(25) \quad \int (x^2 - 2ax + a^2) \sin(\omega x) \, dx = \frac{1}{\omega^3} \left(2\omega(x - a) \sin(\omega x) \right. \\ \left. + (2 - \omega^2(x - a)^2) \cos(\omega x) \right) + C,$$

$$(26) \quad \int (ax + b) \cos(\omega x) \, dx = \frac{1}{\omega} (ax + b) \sin(\omega x) + \frac{a}{\omega^2} \cos(\omega x) + C,$$

$$(27) \quad \int \log^2 x \, dx = x (\log^2 x - 2 \log x + 2) + C,$$

$$(28) \quad \int (x^2 + a^2) \log^2 x \, dx = \frac{2}{27} x \left(27a^2 + x^2 - 27a^2 \log x \right. \\ \left. - 3x^2 \log x + \frac{27a^2}{2} \log^2 x \right. \\ \left. + \frac{9}{2} x^2 \log^2 x \right) + C,$$

$$(29) \quad \int \arcsin(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \left((ax + b) \arcsin(ax + b) \right. \\ \left. - \sqrt{1 - (ax + b)^2} \right) + C,$$

$$(30) \quad \int \operatorname{settsinh}(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \left((ax + b) \operatorname{settsinh}(ax + b) \right. \\ \left. - \sqrt{1 + (ax + b)^2} \right) + C,$$

$$(31) \quad \int \arccos^2 x \, dx = x \arccos^2 x - 2\sqrt{1 - x^2} \arccos x - 2x + C,$$

$$(32) \quad \int \operatorname{setttanh} x \, dx = x \operatorname{setttanh} x + \frac{1}{2} \log(1 - x^2) + C.$$

Esercizio 4: Calcolare gli integrali ciclici:

$$(33) \quad \int \sin(\omega x) e^{px} \, dx = \frac{1}{\omega^2 + p^2} e^{px} (p \sin(\omega x) - \omega \cos(\omega x)) + C,$$

$$(34) \quad \int \cos(\omega x) e^{-px} \, dx = \frac{1}{\omega^2 + p^2} e^{-px} (\omega \sin(\omega x) - p \cos(\omega x)) + C,$$

$$(35) \quad \int \sin(\lambda x) \cos(\omega x) \, dx = -\frac{1}{\lambda^2 - \omega^2} \left(\omega \sin(\lambda x) \sin(\omega x) + \lambda \cos(\lambda x) \cos(\omega x) \right) + C,$$

$$(36) \quad \int \sin(\lambda x) \sin(\omega x) \, dx = \frac{1}{\lambda^2 - \omega^2} \left(\omega \sin(\lambda x) \cos(\omega x) - \lambda \cos(\lambda x) \sin(\omega x) \right) + C,$$

$$(37) \quad \int \cos(\lambda x) \cos(\omega x) \, dx = \frac{1}{\lambda^2 - \omega^2} \left(\lambda \sin(\lambda x) \cos(\omega x) - \omega \cos(\lambda x) \sin(\omega x) \right) + C,$$

$$(38) \quad \int e^{\arcsin \omega x} \, dx = \frac{1}{2\omega} e^{\arcsin \omega x} \left(\omega x + \sqrt{1 - \omega^2 x^2} \right) + C,$$

$$(39) \quad \int \sqrt{1 - x^2} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + C,$$

$$(40) \quad \int \sqrt{x^2 + \omega^2} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + \omega^2} + \frac{\omega^2}{2} \log \left(x + \sqrt{x^2 + \omega^2} \right) + C, .$$

[Suggerimento: In (39) e (40) si consiglia di integrare per parti con fattore differenziale 1; inoltre, in (40) conviene far comparire al numeratore del nuovo integrale la derivata del radicando presente al denominatore; ciò consente di riottenere l'integrale di partenza al secondo membro.]

Inoltre, provare che gli integrali (35)–(37) si possono ricondurre ad integrali immediati usando le *formule di Werner* della Trigonometria Elementare.

3. INTEGRALI RAZIONALI

Esercizio 5: 1. Dopo aver verificato che ognuno dei polinomi di secondo grado elencati in seguito ha $\Delta < 0$, usare la tecnica del *completamento del quadrato* per scrivere tali polinomi come somma di due quadrati:

$$(41) \quad x^2 + 2x + 3, \quad x^2 - 2x + 5, \quad x^2 + x + \pi,$$

$$(42) \quad 2x^2 + \sqrt{2}x + 1, \quad \pi^2 x^2 + \sqrt{3}x + \pi^2, \quad e^4 x^2 - x + 2.$$

2. Sfruttare la tecnica del *completamento del quadrato* per scomporre i seguenti polinomi di grado pari:

$$(43) \quad x^4 + 4, \quad x^8 - 1, \quad x^8 + \pi^8.$$

Esercizio 6: Calcolare i seguenti integrali di fratti semplici:

$$(44) \quad \int \frac{1}{x+2} \, dx = \log |x+2| + C,$$

$$(45) \quad \int \frac{1}{2x-3} \, dx = \frac{1}{2} \log \left| x - \frac{3}{2} \right| + C,$$

$$(46) \quad \int \frac{3}{x^2+2} \, dx = \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C,$$

$$(47)$$

$$(48) \quad \int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C,$$

$$(49) \quad \int \frac{x}{x^2 + x + 3} dx = \frac{1}{2} \log(x^2 + x + 3) - \frac{1}{\sqrt{11}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{11}} + C,$$

$$(50) \quad \int \frac{3x+2}{2x^2+x+1} dx = \frac{3}{4} \log(2x^2+x+1) + \frac{5}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{4x+1}{\sqrt{7}} + C.$$

Esercizio 7: Calcolare i seguenti integrali di funzioni razionali usando la tecnica di scomposizione in fratti semplici²:

$$(51) \quad \int \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx = -3 \log|x-2| + 4 \log|x-3| + C,$$

$$(52) \quad \int \frac{1}{x^2-2x-3} dx = \frac{1}{4} \log \left| \frac{x-3}{x+1} \right| + C,$$

$$(53) \quad \int \frac{x-7}{x^2+4x-5} dx = -\log|x-1| + 2 \log|x+5| + C,$$

$$(54) \quad \int \frac{2x-1}{3x^2+7x+2} dx = \log|x+2| - \frac{1}{3} \log|3x+1| + C,$$

$$(55) \quad \int \frac{1}{4x^2-8x-5} dx = \frac{1}{12} \log \left| \frac{2x-5}{2x+1} \right| + C,$$

$$(56) \quad \int \frac{1}{2x^2-3x} dx = \frac{1}{3} \log \left| \frac{2x-3}{x} \right| + C,$$

$$(57) \quad \int \frac{1}{2x^3+3x} dx = \frac{1}{6} \log \frac{x^2}{2x^2+3} + C,$$

$$(58) \quad \int \frac{1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)} dx = \frac{1}{4} \log \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \\ + \frac{\sqrt{3}}{6} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ - \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C,$$

$$(59) \quad \int \frac{x^2}{x^4+4} dx = \frac{1}{8} \log \frac{x^2-2x+2}{x^2+2x+2} \\ + \frac{1}{4} \arctan(x+1) + \frac{1}{4} \arctan(x-1) + C,$$

²Si ricordi che un polinomio di secondo grado *non monico*, cioè un polinomio del tipo ax^2+bx+c con $a \neq 1$, avente $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ può essere fattorizzato come:

$$\begin{cases} a(x-x_1)(x-x_2) & , \text{ se } \Delta > 0 \text{ e } x_1 \neq x_2 \text{ sono le radici del polinomio} \\ a(x-x_1)^2 & , \text{ se } \Delta = 0 \text{ e } x_1 = -\frac{b}{2a} \text{ è l'unica radice del polinomio} \end{cases}.$$

Inoltre, si ricordi che il *Teorema di Ruffini* garantisce che:

“Un polinomio $p(x)$ è divisibile per $x - \alpha$ se e solo se α è radice di $p(x)$ (cioè se $p(\alpha) = 0$).”

In particolare, ciò implica che:

“Se $p(x)$ ha coefficienti *interi*, α è *intero* e se $p(x)$ si divide per $x - \alpha$, allora α è un divisore del termine noto di $p(x)$.”

pertanto, le radici intere di un polinomio a coefficienti interi vanno necessariamente ricercate tra i divisori del termine noto.

$$(60) \quad \int \frac{2}{x(x-1)(x-2)} dx = \log|x-2| - 2\log|x-1| + \log|x| + C,$$

$$(61) \quad \int \frac{6}{x(x-1)(x-2)(x-3)} dx = \log|x-3| - 3\log|x-2| + 3\log|x-1| - \log|x| + C,$$

$$(62) \quad \int \frac{24}{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} dx = \log|x-4| - 4\log|x-3| + 6\log|x-2| - 4\log|x-1| + \log|x| + C,$$

$$(63) \quad \int \frac{n!}{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)} dx = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \log|x-n+k| + C.^3$$

Esercizio 8: Calcolare i seguenti integrali usando la *formula di Hermite*:

$$(64) \quad \int \frac{x^3 - 2x^2 - x + 3}{(x-2)^2(x-1)^3} dx = -\frac{2x^2 - 3x - 4}{2(x-2)(x-1)^2} + C,$$

$$(65) \quad \int \frac{x^3}{(x^4-1)(x-1)} dx = \frac{3}{8} \log|x-1| - \frac{1}{8} \log|x+1| + \frac{1}{4} \arctan x - \frac{1}{8} \log(x^2+1) - \frac{1}{4(x-1)} + C,$$

$$(66) \quad \int \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 2}{x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 7x^2 + 2x} dx = \log \left| \frac{x}{x+2} \right| + \frac{1}{2(x+1)^2} + C,$$

$$(67) \quad \int \frac{2x^4 - 10x^3 + 18x^2 - 15x + 5}{(x-1)^4(x-3)^2} dx = \frac{11}{16} \log \left| \frac{x-3}{x-1} \right| - \frac{5x^2 - 7x + 4}{8(x-3)(x-1)^2} + C.$$

³Il coefficiente binomiale di indici n e k (con $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $k \leq n$) è il numero definito ponendo:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! (n-k)!}.$$

Si può provare che ogni coefficiente $\binom{n}{k}$ è un numero naturale e che i coefficienti soddisfano le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} &= 1 = \binom{n}{n}, & \binom{n}{1} &= n = \binom{n}{n-1}, \\ \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k}, & \binom{n+1}{k} &= \frac{n+1}{n+1-k} \binom{n}{k}, \\ \binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} & & \text{per } k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Tali proprietà consentono di identificare i coefficienti binomiali con i coefficienti che figurano nel cosiddetto *triangolo di Tartaglia*, ossia coi coefficienti nello sviluppo della potenza n -esima del binomio; da ciò ne deriva il nome.

Esercizio 9: Calcolare i seguenti integrali di funzioni razionali con quoziente non nullo⁴:

$$(68) \quad \int \frac{3x^3 + 7x^2 + 4x - 1}{3x^2 + 7x + 2} dx = \frac{1}{2} x^2 + \log |x + 2| - \frac{1}{3} \log |3x + 1| + C,$$

$$(69) \quad \int \frac{3x^4 - 10x^2 + 9x - 4}{(x - 1)^2} dx = x^3 + 3x^2 - x + \log |x - 1| + \frac{2}{x - 1} + C,$$

$$(70) \quad \int \frac{x^6 - x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x - 1}{(x + 1)(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} x^2 - 2x + 3 \log |x + 1| - \arctan x - \frac{x}{x^2 + 1} + C,$$

$$(71) \quad \int \frac{3x^7 + 7x^5 + 4x^3 - x}{3x^4 + 7x^2 + 2} dx = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} \log |x^2 + 2| - \frac{1}{6} \log |3x^2 + 1| + C.$$

[**Suggerimento:** Nell'ultimo integrale, sarebbe opportuno fare una sostituzione prima di avventurarsi nella decomposizione dell'integrando.]

Esercizio 10: Siano $p(x)$ e $q(x)$ polinomi di grado ≥ 1 .

1. Provare che la funzione $f_1(x) := p(x) \cdot \arctan q(x)$ è elementarmente integrabile in $\mathbb{R}$.
2. Se $q(x)$ non è ovunque ≤ 0 , provare che la funzione $f_2(x) := p(x) \cdot \log q(x)$ è elementarmente integrabile.
3. Se $|q(x)|$ non è ovunque ≥ 1 , provare che la funzione $f_3(x) := p(x) \cdot \operatorname{sech} q(x)$ è elementarmente integrabile.

[**Suggerimento:** Per le ipotesi fatte su q , ogni funzione f_k ($k = 1, 2, 3$) è definita almeno in un intervallo della retta reale ed è ivi continua; ergo essa ha qualche primitiva. Per mostrare che ogni primitiva è una funzione elementare basta integrare $\int f_k(x) dx$ per parti con fattore differenziale $p(x)$.]

⁴Ciò accade *sempre* quando il grado del numeratore è maggiore o tutt'al più uguale al grado del denominatore.

Infatti, se $f(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ con $\operatorname{gr} p_1 \geq \operatorname{gr} p_2$, l'*algoritmo della divisione* assicura l'esistenza di due polinomi $q(x)$ ed $r(x)$ che soddisfano le proprietà:

$$\begin{cases} p_1(x) = q(x) \cdot p_2(x) + r(x) \\ \operatorname{gr} q = \operatorname{gr} p_1 - \operatorname{gr} p_2 \\ \operatorname{gr} r < \operatorname{gr} p_2 \end{cases}$$

(tali polinomi sono chiamati, rispettivamente, *quoziente* e *resto della divisione di p_1 per p_2*) e ciò importa che:

$$f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{p_2(x)},$$

con $q(x)$ non identicamente nullo.

Esercizio 11 (Integrale di Dalzell⁵): Seguendo lo schema proposto qui di seguito, provare che $\frac{22}{7}$ è una buona approssimazione di π per eccesso.

1. Posto:

$$I(1) := \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{x^2+1} dx \quad \text{e} \quad J(1) := \int_0^1 x^4(1-x)^4 dx,$$

provare che $I_1 > 0$.

2. Calcolare esplicitamente $I(1)$ sfruttando la scomposizione in fratti semplici e dimostrare che $\frac{22}{7}$ è un'approssimazione per eccesso di π sfruttando il punto 1.

3. Mostrare che:

$$\frac{1}{2} J(1) < I(1) < J(1)$$

e, calcolando esplicitamente $J(1)$, ottenere delle stime per l'errore di approssimazione $\frac{22}{7} - \pi$.

4. Posto:

$$\begin{aligned} I(2) &:= \int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8}{x^2+1} dx & \text{e} & \quad J(2) := \int_0^1 x^8(1-x)^8 dx \\ I(3) &:= \int_0^1 \frac{x^{12}(1-x)^{12}}{x^2+1} dx & \text{e} & \quad J(3) := \int_0^1 x^{12}(1-x)^{12} dx, \end{aligned}$$

provare ad usare lo stesso schema precedente per ottenere approssimazioni di π e confrontare i risultati con quanto già acquisito nei punti 1 – 3.

Le approssimazioni sono sempre per eccesso? Migliorano? Peggiorano?

Descrivere la situazione e proporre qualche congettura per il caso generale, i.e. quello che coinvolge gli integrali:

$$I(n) := \int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{x^2+1} dx \quad \text{e} \quad J(n) := \int_0^1 x^{4n}(1-x)^{4n} dx.$$

4. INTEGRALI CHE SI CALCOLANO PER SOSTITUZIONE

Esercizio 12: Con l'ausilio di opportune sostituzioni, calcolare i seguenti integrali:

$$(72) \quad \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} \log(\arctan e^x) dx = \arctan e^x (\log(\arctan e^x) - 1) + C,$$

$$(73) \quad \int \frac{e^{2x}-2}{e^{2x}-9} dx = \frac{2}{9} x + \frac{7}{18} \log |e^{2x}-9| + C,$$

⁵Donald Percy Dalzell (1898 – 1988), matematico ed ingegnere inglese, impiegato alla Standard Telephone and Cables Company di Londra e proprietario di alcuni brevetti su cavi di comunicazioni elettriche.

$$(74) \quad \int \frac{e^x}{e^{2x} + 4e^x + 16} dx = \frac{1}{2} \log(e^{2x} + 4e^x + 16) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{e^x + 2}{2\sqrt{3}} + C,$$

$$(75) \quad \int \frac{\log^2 x + 2}{x(2\log^2 x - 1)} dx = \frac{1}{2} \log x + \frac{5\sqrt{2}}{8} \log \left| \frac{\sqrt{2} - 2\log x}{\sqrt{2} + 2\log x} \right| + C,$$

$$(76) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(1 - \arcsin^2 x)(1 - x^2)}} = \arcsin(\arcsin x) + C,$$

$$(77) \quad \int \frac{\sqrt[3]{x} + 3}{\sqrt[3]{x^2} (1 + \sqrt[3]{x})^2} dx = 3 \log |1 + \sqrt[3]{x}| - \frac{6}{1 + \sqrt[3]{x}} + C,$$

$$(78) \quad \int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x - 1} dx = -3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} + \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt{3}} \right) - \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2\sqrt[6]{x} + 1}{\sqrt{3}} \right) - 2 \log(\sqrt[6]{x} + 1) - \frac{1}{2} \log(\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} + 1) + \frac{3}{2} \log(\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} + 1) + C,$$

$$(79) \quad \int \frac{\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} + 1}{x+2} dx = \log \left(2(x-1) \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} - 3x \right) + \sqrt{2} \log \left(2(x-1) \sqrt{\frac{4x+2}{x-1}} + 4x - 1 \right) + C,$$

$$(80) \quad \int \frac{1}{1 - \cos x - 3 \sin x} dx = \frac{1}{3} \log \left| \frac{\tan(x/2) - 3}{\tan(x/2)} \right| + C,$$

$$(81) \quad \int \frac{1}{\sin(\omega x) - \cos(\omega x) - 1} dx = \frac{1}{\omega} \log \left| \tan \left(\frac{\omega x}{2} \right) - 1 \right| + C,$$

$$(82) \quad \int \frac{1 + \tan^2(\omega x)}{\tan^2(\omega x) - 5 \tan(\omega x) + 6} dx = \frac{1}{\omega} \log \left| \frac{\tan(\omega x) - 3}{\tan(\omega x) - 2} \right| + C,$$

$$(83) \quad \int \frac{5 \sin 2x - 1}{\cos x (\sin x - 2 \cos x)} dx = 3 \log |\tan x - 2| + 4 \log |\cos x| + 2x + C,$$

$$(84) \quad \int \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1} - 1} dx = \frac{1}{2} \log \left(2x + \sqrt{4x^2 + 1} \right) - \frac{1}{2x - 1 + \sqrt{4x^2 + 1}} + C,$$

$$(85) \quad \int \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 2} - 1} dx = \frac{1}{2} \log \left(2x + \sqrt{4x^2 + 2} \right) + \arctan \left(2x + \sqrt{4x^2 + 2} - 1 \right) + C,$$

$$(86) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{4x + 2} - 1)} dx = \log (2\sqrt{x} + \sqrt{4x + 2}) + 2 \arctan (2\sqrt{x} + \sqrt{4x + 2} - 1) + C,$$

$$(87) \quad \int \frac{\cos x \sin x}{1 + \tan x} \, dx = \frac{1}{8} \left(\sin 2x - \cos 2x - 2 \log |\cos x + \sin x| \right) + C.$$

Esercizio 13 (Integrali Abeliani⁶): Alcuni integrali calcolati nell'Esercizio precedente si inquadrano in una tipologia più generale. Ogni integrale nella forma:

$$\int R(x, y) \, dx,$$

in cui R è una funzione razionale dei suoi argomenti e le variabili x ed y sono legate da una relazione del tipo:

$$(88) \quad p(x, y) = 0$$

con p polinomio di grado ≥ 1 , si chiama *integrale abeliano associato alla curva algebrica di equazione* (88). Ad esempio gli integrali:

$$\int R(x, \sqrt[3]{x}) \, dx \text{ o } \int R(x, \sqrt{x^2 + 2x + 2}) \, dx$$

sono integrali abeliani associati, rispettivamente, alle curve $y^3 - x = 0$ ed $x^2 - y^2 + 2x + 2 = 0$.

Provare che se esistono due funzioni razionali $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ tali che $p(\varphi(t), \psi(t)) = 0$ allora l'integrale abeliano $\int R(x, y) \, dx$ associato alla curva algebrica di equazione $p(x, y) = 0$ è *razionalizzabile* con le sostituzioni $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$.

Trovare l'espressione dell'integrale $\int R(x, y) \, dx$ rispetto alla variabile ausiliaria t .

5. INTEGRALI IMPROPRI

Esercizio 14: Usando l'opportuna definizione ed i metodi di integrazione noti, calcolare i seguenti integrali impropri:

$$(89) \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$(90) \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx = \frac{\pi-2}{8}$$

$$(91) \quad \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{3}}{1+x^3} \, dx = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \log 3$$

$$(92) \quad \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} \, dx = \frac{1}{2}$$

⁶Niels Henrik Abel (1802 – 1829), matematico norvegese.

$$(93) \quad \int_0^1 \log x \, dx = -1$$

$$(94) \quad \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} \, dx = \frac{1}{(\alpha-1)^2} \quad (\alpha > 1)$$

$$(95) \quad \int_0^1 \frac{\log x}{x^\alpha} \, dx = -\frac{1}{(\alpha-1)^2} \quad (\alpha < 1)$$

$$(96) \quad \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3 - x^2} \, dx = \log 2 - 1$$

$$(97) \quad \int_0^4 \frac{4-x}{\sqrt{x}(1+x)^2} \, dx = 2 + 3 \arctan 2^7$$

$$(98) \quad \int_0^{+\infty} \frac{4-x}{\sqrt{x}(1+x)^2} \, dx = \frac{3\pi}{2}$$

$$(99) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 5x^2 + 4} \, dx = \frac{\pi}{6}$$

$$(100) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x + a^2 e^{-x}} \, dx = \frac{\pi}{2a} \quad (a > 0)$$

$$(101) \quad \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}} \, dx = \log \left(\frac{2 + \sqrt{7}}{3} \right)$$

$$(102) \quad \int_0^{+\infty} x e^{-sx} \, dx = \frac{1}{s^2} \quad (s > 0)$$

$$(103) \quad \int_0^{+\infty} x^3 e^{-sx} \, dx = \frac{6}{s^4} \quad (s > 0)$$

$$(104) \quad \int_0^{+\infty} \cos(\omega x) e^{-sx} \, dx = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (s > 0, \omega \in \mathbb{R})$$

$$(105) \quad \int_0^{+\infty} \sin(\omega x) e^{-sx} \, dx = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (s > 0, \omega \in \mathbb{R})^8$$

⁷Si ricordi che $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$ per $x > 0$.

⁸Gli ultimi quattro integrali sono importanti, poiché definiscono la *trasformata di Laplace unilatera* delle funzioni x , x^3 , $\cos(\omega x)$ e $\sin(\omega x)$. Lo studio della trasformata di Laplace, utilissima nella risoluzione delle equazioni differenziali lineari, sarà affrontato nel corso di METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA.

Esercizio 15: Usando il *Principio d'Induzione*, dimostrare che:

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-sx} \, dx = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (s > 0)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 16: Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esistono i seguenti integrali impropri:

$$(106) \quad \int_a^{+\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x-3}(x-1)} \, dx, \quad \int_a^{a+2} \frac{1}{(x^2-1)^2} \, dx,$$

$$(107) \quad \int_0^a \frac{1}{1-x^2} \, dx, \quad \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx.$$

[**Suggerimento:** Tenere sempre presente il *Criterio dell'Ordine di Infinito/Infinitesimo*.]

Esercizio 17: Sia $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Dire per quali valori di α esiste l'integrale improprio:

$$(108) \quad \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}|x-1|^\alpha} \, dx,$$

e calcolarlo (se possibile) per $\alpha = 1/2$.

2. Dire per quali valori di α esiste l'integrale improprio:

$$(109) \quad \int_{-1}^{+\infty} \frac{x}{(x^3+1)^\alpha} \, dx,$$

e calcolarlo (se possibile) per $\alpha = 1$.

3. Dire per quali valori di α esiste l'integrale improprio:

$$(110) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}(x-4)}{x^\alpha(1+x)^2} \, dx,$$

e calcolarlo (se possibile) per $\alpha = 1$.

[**Suggerimento:** Tenere sempre presente il *Criterio dell'Ordine di Infinito/Infinitesimo*.]

Esercizio 18: Stabilire se ognuna delle funzioni indicate qui di seguito è sommabile nell'intervallo indicato a fianco (al variare dei parametri, ove presenti):

$$(111) \quad f_1(x) := \frac{x}{\sqrt[3]{|x-1|} \sqrt[4]{|x+1|}} \quad \text{in } [-2, 2]$$

$$(112) \quad f_2(x) := \frac{x}{(x+1)^3 \sqrt{|x-e|}} \quad \text{in } [1, +\infty[$$

$$\begin{aligned}
(113) \quad f_3(x) &:= \frac{1}{x \log^2 x} && \text{in } [1/2, 1] \\
(114) \quad f_4(x) &:= \frac{e^{-1/x^2}}{x^2 (x^2 + 1)} && \text{in } [-1, +\infty[\\
(115) \quad f_5(x) &:= \frac{x}{|x-1|^\alpha |x-2|^\beta} && \text{in }]1, 3] \\
(116) \quad f_6(x) &:= \frac{\sin x^\beta}{x^\alpha |x-1|^\beta} && \text{in }]0, 1[\\
(117) \quad f_7(x) &:= \frac{1 - \cos x^\alpha}{x^\beta} && \text{in }]0, +\infty[\\
(118) \quad f_8(x) &:= \frac{(e^{x^2} - 1)^{\sqrt{2}}}{\sin x^\alpha e^{2x^2}} && \text{in }]0, +\infty[\\
(119) \quad f_9(x) &:= \frac{\arctan |x|^\alpha}{\tan^\beta(\frac{x^2}{4}) |x^2 - 1|^{1/\beta}} && \text{in }]-2, 2[.
\end{aligned}$$

[**Suggerimento:** Sfruttare il *Criterio dell'Ordine di Infinito/Infinitesimo* ed i limiti notevoli.]

6. CALCOLO INTEGRALE

Esercizio 19: Siano $a < b \in \mathbb{R}$ ed $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo:

$$f(x) := \int_a^b |t - x| \, dt.$$

1. Provare che f è continua in $[a, b]$.

[**Suggerimento:** Si può calcolare esplicitamente il valore di $f(x)$. Altrimenti, bisogna verificare che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ per ogni $x_0 \in [a, b]$: ciò si può fare sfruttando la *disuguaglianza triangolare*.]

2. Provare che f è derivabile in $]a, b[$.

[**Suggerimento:** Sfruttare l'espressione esplicita di $f(x)$.]

3. Determinare i punti di estremo assoluto e gli estremi assoluti di f in $[a, b]$, cioè calcolare $\min_{[a,b]} f$ e $\max_{[a,b]} f$ ed i punti in cui tali valori sono assunti da f .

4. Fornire un'interpretazione geometrica del valore della funzione f e del risultato di cui al punto 3.

Esercizio 20: Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $\mathbb{R}$.

1 Provare che se f è *pari* allora risulta:

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx$$

per ogni $a > 0$.

2. Provare che se f è *dispari* allora risulta:

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$$

per ogni $a > 0$.

3. Provare che se f è *periodica di periodo* $T > 0$ allora risulta:

$$\int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \, dx = \int_0^T f(x) \, dx$$

per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

[**Suggerimento:** Usare appropriati cambiamenti di variabile e le proprietà dell'integrale definito.]

Esercizio 21: Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$. Provare che le tre condizioni seguenti sono equivalenti:

(i) f è identicamente nulla in $[a, b]$;

(ii) esiste un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che:

$$\forall x \in [a, b], \quad \int_{x_0}^x f(t) \, dt = 0.$$

(iii) per ogni $x_1 < x_2 \in [a, b]$ risulta:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t) \, dt = 0.$$

[**Suggerimento:** Provare le implicazioni (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i). Per mostrare che (ii) $\Rightarrow$ (iii) tenere presente la proprietà additiva dell'integrale; per dimostrare la (iii) $\Rightarrow$ (i) procedere per assurdo.]

Esercizio 22: Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$.

1. Dimostrare che il rettangoloide “generalizzato” $\mathcal{R}_f$ relativo ad f di base $[a, b]$, cioè l'insieme:

$$\mathcal{R}_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ e } f^-(x) \leq y \leq f^+(x)\},$$

è limitato e misurabile secondo Peano-Jordan.

[**Suggerimento:** Per la limitatezza, usare opportunamente il *Teorema di Weierstrass*. Per la misurabilità, notare che $\mathcal{R}_f$ è unione di $\mathcal{R}_{f^+}$ e del simmetrico (rispetto all'asse x) del rettangoloide $\mathcal{R}_{-f^-}$.]

2 Provare che $\mathcal{R}_f$ si può dividere in due parti di ugual misura usando una retta parallela all'asse delle ordinate.

[**Suggerimento:** Fissato $x \in [a, b]$, la misura della parte di $\mathcal{R}_f$ a sinistra di x è uguale a $\int_a^x |f(t)| \, dt$ (perché?). Usare le proprietà della funzione integrale per stabilire che esiste un valore ξ in guisa che tale misura uguagli $\frac{1}{2}m(\mathcal{R}_f)$.]

3. Si può fare la stessa suddivisione usando rette con inclinazione qualsiasi?

In altre parole, fissato $m \in \mathbb{R}$, è vero che $\mathcal{R}_f$ si può dividere in due parti di ugual misura usando una retta con coefficiente angolare m ?

Esercizio 23 (Teorema della Media Integrale Pesata): Siano $f, w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue in $[a, b]$ e $w(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

Provare che esiste un punto $\xi \in [a, b]$ tale che:

$$f(\xi) = \frac{1}{\int_a^b w(x) \, dx} \cdot \int_a^b f(x) \cdot w(x) \, dx.$$

La quantità a secondo membro è detta *media integrale di f rispetto al peso w* .

[**Suggerimento:** Ricalcare la dimostrazione del *Teorema della Media Integrale*.]

Esercizio 24: Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$.

Provare che se:

$$f(a) = 0$$

$$f(b) = 0$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = 0$$

allora esistono almeno due punti $c_1, c_2 \in]a, b[$ tali che $f'(c_1) = 0 = f'(c_2)$.

[**Suggerimento:** Applicare il *Teorema di Rolle* alla funzione $F(x) := \int_a^x f(t) \, dt$.]

Esercizio 25: Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $\mathbb{R}$. Provare che se si ha:

$$\int_a^b f(x) \, dx < \int_{a+h}^{b+h} f(x) \, dx$$

per ogni $a < b \in \mathbb{R}$ ed $h > 0$, allora f è crescente in $\mathbb{R}$.

[**Suggerimento:** Fissati $a = x_1 < x_2 = b$, considerare la funzione ausiliaria $\varphi(h) := \int_{x_1+h}^{x_2+h} f(x) \, dx$ definita in $[0, +\infty[$; mostrare che φ è continua in 0 ed è derivabile in 0 da destra; calcolare $\varphi'(0)$ e concludere.]

Esercizio 26: La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) := \cos x$ è continua in $\mathbb{R}$ e periodica di periodo 2π .

1. Scelto $x \geq 0$, calcolare la media integrale di f sull'intervallo $[0, x + 2n\pi]$ (con $n \in \mathbb{N}$)⁹ e provare che essa tende a zero quando $n \rightarrow \infty$.

[**Suggerimento:** Distinguere i casi $x = 0$ ed $x > 0$ quando si calcola l'integrale definito; sfruttare, se si ritiene opportuno, anche i risultati dell'**Esercizio 20**.]

2. Scelto $x \geq 0$, calcolare la radice quadrata della media integrale della funzione f^2 sullo stesso intervallo $[0, x + 2n\pi]$ (con $n \in \mathbb{N}$) e provare che essa tende a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ quando $n \rightarrow \infty$.

3. Siano $A, \omega > 0$ e $\varphi \in \mathbb{R}$.

Cambia qualcosa nei risultati acquisiti nei punti **1** e **2** quando si sostituisce f con la funzione $A \cos(\omega x + \varphi)$, continua e periodica di periodo $T = 2\pi/\omega$, e l'intervallo d'integrazione $[0, x + 2n\pi]$ con $[0, x + nT]$?

⁹Si ricordi che la *media integrale* di una funzione continua f su un intervallo $[a, b]$ è la quantità:

$$\int_a^b f(t) \, dt := \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(t) \, dt.$$

[**Suggerimento:** Fare un cambiamento di variabile nell'integrale definito per ricondursi ai casi precedenti.]

Esercizio 27: Sia $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo:

$$F(x) := \int_0^x \frac{e^t}{t^2 + 1} dt.$$

1. Verificare che F è strettamente monotona in $\mathbb{R}$.
2. Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ e provare che $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ esiste finito e negativo.

[**Suggerimento:** L'integrale non è calcolabile elementarmente, quindi bisogna procedere *con cautela*.

Dato che per $x \geq 0$ l'integrando ha minimo assoluto $m > 0$ (calcolarlo!), risulta $F(x) \geq mx$; concludere invocando il *Teorema del Confronto*.

D'altra parte, per $x \leq 0$ l'integrando è minore di e^t , dunque $F(x) \geq \int_0^x e^t dt$ (perché?); concludere usando il *Teorema di Regolarità delle Funzioni Monotone* ed un calcolo esplicito.]

3. Provare che l'immagine di F è un intervallo del tipo $] \alpha, +\infty[$, con $\alpha < 0$. Quali sono le soluzioni dell'equazione $F(x) = 0$?

4. Mostrare che F è invertibile in $\mathbb{R}$ e calcolare esplicitamente la derivata di F^{-1} in 0.

[**Suggerimento:** Usare il *Teorema di Derivazione della Funzione Inversa* ed il secondo risultato di cui al punto 3.]

Esercizio 28 (Funzione Massimale): Sia $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[0, +\infty[$.

Si definisca la funzione $\varphi:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ponendo:

$$\varphi(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

(di modo che $\varphi(x)$ coincide con la media integrale di f su $[0, x]$).

1. Provare che φ è continua in $]0, +\infty[$ e che essa si può prolungare su 0 con continuità. Supponendo che f sia regolare in $+\infty$, mostrare che anche φ lo è ed ha lo stesso limite.

[**Suggerimento:** Usare il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale* ed il *Teorema di de l'Hôpital*.]

2. D'ora in avanti, indichiamo con φ il prolungamento continuo su $[0, +\infty[$ della funzione definita in precedenza: tale funzione è usualmente detta *funzione massimale di Hardy*.

Provare che se f è crescente [risp. decrescente] in $[0, +\infty[$, allora $\varphi(x) \leq f(x)$ [risp. $f(x) \leq \varphi(x)$] in $[0, +\infty[$.

[**Suggerimento:** Ricordare che $f(x) = 1/x \int_0^x f(t) dt$.]

3. Provare che φ è derivabile in $]0, +\infty[$ e che essa è derivabile in 0 da destra solo se f lo è; calcolare $\varphi'_+(0)$.

Dimostrare che se f è monotona in $[0, +\infty[$, anche φ è monotona in $[0, +\infty[$ ed ha la stessa monotonia.

[**Suggerimento:** Sfruttare il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale* per calcolare φ' . Per la derivabilità in 0, formare il rapporto incrementale e calcolarne il limite usando il *Teorema di de l'Hôpital*. Sfruttare il risultato di cui al punto 2 per analizzare il segno di φ' .]

4. Provare che se f è derivabile due volte in $]0, +\infty[$, anche φ lo è.

Inoltre, provare che se f è convessa [risp. concava] in $[0, +\infty[$, allora anche φ lo è. È vero il viceversa?

[**Suggerimento:** Calcolare esplicitamente la derivata seconda ricordando il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale*. Studiare il segno di φ'' . Per il viceversa, studiare cosa accade scegliendo $f(x) = ax^4 + bx^3$, con $a, b \in \mathbb{R}$.]

Esercizio 29: Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte in $\mathbb{R}$ tale che risulti:

$$f''(x) + f(x) = 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

1. Dimostrare che f'' è continua e che f è indefinitamente derivabile in $\mathbb{R}$.

[**Suggerimento:** Usare la tecnica di *bootstrap*, tenendo presente che f ed f' sono continue e derivabili in $\mathbb{R}$.]

2. Provare che se esiste un punto $a \in \mathbb{R}$ tale che $f(a) = f'(a) = 0$, allora $f(x) = 0$ ovunque in $\mathbb{R}$.

[**Suggerimento:** Moltiplicare la relazione $f''(x) + f(x) = 0$ per $2f'(x)$, integrare membro a membro l'uguaglianza ottenuta sull'intervallo di estremi a (fisso) ed x (variabile) e concludere.]

Esercizio 30: Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile una volta in $\mathbb{R}$.

Provare che se $f'(x) \geq f^2(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $f(x) \leq 0$ in tutto $\mathbb{R}$.

[**Suggerimento:** Osservare che f è monotona in $\mathbb{R}$, dunque regolare in $+\infty$; provare che il limite $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ deve essere nullo escludendo via via i casi (a) $l = +\infty$, (b) $l > 0$ e (c) $l < 0$; concludere.

Per escludere (a), procedere per assurdo: supposto $l = +\infty$, osservare che la funzione $\varphi(x) := 1/f(x)$ sarebbe definita e derivabile in un intorno di $+\infty$ e la sua derivata verificherebbe $\varphi'(x) \leq -1$ e dunque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty$, contro il fatto che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0.$$

Per escludere (b), osservare che intorno a $+\infty$ si avrebbe $f(x) > l/2$, quindi $f'(x) \geq l^2/4$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ contro il fatto che $l \neq +\infty$.

L'eventualità (c) si esclude allo stesso modo.]

Esercizio 31 (Resto nella Forma Integrale): Siano $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile $n + 1$ volte in I con derivata $n + 1$ -esima continua in I , x_0 un punto

interno ad I ed $x \in I - \{x_0\}$.

1. Provare che:

$$r_n(x; x_0) = \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

[**Suggerimento:** Fare induzione su n , usare la *formula di integrazione per parti* e la *formula fondamentale del Calcolo Integrale*.]

2. Usare la forma integrale del resto della formula di Taylor per trovare una dimostrazione alternativa del *Teorema di Caratterizzazione delle Funzioni con Derivata n -esima nulla* [DM2, § 3, Teo. 3].

Esercizio 32: Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo non banale, $x_0 \in I$ ed $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

1. Provare che la funzione $F_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo:

$$F_2(x) := \int_{x_0}^x f(t) (x-t) dt$$

è derivabile due volte in I , si annulla in x_0 insieme alla sua derivata prima (cioè risulta $F(x_0) = F'(x_0) = 0$) ed ha derivata seconda uguale ad f in I .

[**Suggerimento:** Si può calcolare esplicitamente $F_2(x)$ sfruttando le proprietà dell'integrale definito.]

2. Dimostrare che F_2 è l'unica funzione che gode delle proprietà di cui al punto 1.

[**Suggerimento:** Usare il *Teorema di Caratterizzazione delle Funzioni con Derivata n -esima Nulla* [DM2, § 3, Teo. 3].]

Esercizio 33: Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e sommabile in $\mathbb{R}$, i.e. tale che $|f|$ è impropriamente integrabile in $\mathbb{R}$.

Provare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\rho > 0$ tale che:

$$\left| \int_{-\infty}^{-R} f(x) dx + \int_R^{+\infty} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

per ogni $R > \rho$.

Esercizio 34: Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sommabile in $\mathbb{R}$, i.e. tale che $|f|$ è impropriamente integrabile in $\mathbb{R}$.

1. Provare che l'integrale improprio:

$$F(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx$$

esiste per ogni $\omega \in \mathbb{R}$.

[**Suggerimento:** Maggiorare il valore assoluto dell'integrando con una funzione sommabile ed usare risultati di confronto.]

2. Calcolare $F(\omega)$ in corrispondenza delle funzioni:

$$f_1(x) := e^{-|x|} \quad \text{e} \quad f_2(x) := \begin{cases} 1 & , \text{ se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{ altrimenti} \end{cases}.$$

Esercizio 35 (Lemma Fondamentale del Calcolo delle Variazioni): Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$.

Provare che se risulta:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx = 0$$

per ogni funzione $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ con $g(a) = 0 = g(b)$, allora è $f(x) = 0$ ovunque in $[a, b]$.

[Suggerimento: *Per assurdo*, si supponga che risulti $f(x_0) \neq 0$ almeno in un punto di $]a, b[$; detto $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ un “piccolo” intorno di x_0 in cui $f(x)$ conservi lo stesso segno di $f(x_0)$, si consideri la funzione g_δ definita per casi ponendo:

$$g_\delta(x) := \begin{cases} 0 & , \text{ se } a \leq x \leq x_0 - \delta \\ \frac{2}{\delta}(x - x_0 + \delta) & , \text{ se } x_0 - \delta \leq x \leq x_0 - \frac{\delta}{2} \\ 1 & , \text{ se } x_0 - \frac{\delta}{2} \leq x \leq x_0 + \frac{\delta}{2} \\ -\frac{2}{\delta}(x - x_0 - \delta) & , \text{ se } x_0 + \frac{\delta}{2} \leq x \leq x_0 + \delta \\ 0 & , \text{ se } x_0 + \delta \leq x \leq b \end{cases}$$

(il cui rettangoloide è costituito da un trapezio isoscele con base $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ed altezza 1) e si mostri che g_δ può essere usata come “test” nella uguaglianza integrale in ipotesi, ottenendo una contraddizione.]

Esercizio 36 (Disuguaglianza di Cauchy¹⁰-Schwarz¹¹): Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue in $[a, b]$.

Provare che:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)| \cdot |g(x)| \, dx &\leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) \, dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x) \, dx} \\ \left| \int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx \right| &\leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) \, dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x) \, dx}. \end{aligned}$$

[Suggerimento: Basta provare la prima, poiché la seconda segue da essa sfruttando la *disuguaglianza triangolare*. Per la dimostrazione, osservare che la funzione $(|f(x)| + \lambda|g(x)|)^2$ è continua e non negativa in $[a, b]$, cosicché risulta $\int_a^b (|f(x)| + \lambda|g(x)|)^2 \, dx \geq 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$; riscrivere il primo membro come polinomio (di secondo grado) in λ e concludere esaminando il segno del discriminante Δ .]

Esercizio 37 (Disuguaglianze di tipo Sobolev¹²): Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile ed avente la derivata prima continua in $[a, b]$.

¹⁰Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857), matematico e fisico-matematico francese, pose la teoria dei limiti alla base del Calcolo Differenziale ed Integrale.

¹¹Hermann Schwarz (1843 – 1921), matematico tedesco.

¹²Sergei Sobolev (1908 – 1989), matematico russo.

1. Provare che se $f(a) = 0$, allora valgono le disuguaglianze:

$$\max_{[a,b]} |f| \leq \int_a^b |f'(x)| \, dx$$

$$\int_a^b |f(x)| \, dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \max_{[a,b]} |f'|$$

[**Suggerimento:** Ricordare che si ha $\int_a^x f'(t) \, dt = f(x) - f(a)$ (per il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale*) e sfruttare le proprietà dell'integrale definito.]

2. Provare che se $f(a) = 0 = f(b)$, la prima delle precedenti può essere “migliorata” come segue:

$$\max_{[a,b]} |f| \leq \frac{1}{2} \int_a^b |f'(x)| \, dx.$$

[**Suggerimento:** Oltre al suggerimento precedente, tenere presente che $f(x) = -\int_x^b f'(t) \, dt$ ed usare la *disuguaglianza triangolare per l'integrale*.]

Esercizio 38 (Disuguaglianza di Poincaré¹³): Siano $a < b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$, ivi derivabile con derivata prima anch'essa continua in $[a, b]$ ed:

$$\hat{f} := \int_a^b f(x) \, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

la media integrale di f su $[a, b]$.

1. Provare che vale la seguente disuguaglianza:

$$\int_a^b |f(x) - \hat{f}| \, dx \leq (b-a) \int_a^b |f'(x)| \, dx.$$

[**Suggerimento:** Per il *Teorema della Media Integrale*, esiste $\xi \in [a, b]$ tale che $\hat{f} = f(\xi)$, sicché l'integrando nel primo membro si può riscrivere come $|f(x) - \hat{f}| = |f(x) - f(\xi)| = \left| \int_\xi^x f'(t) \, dt \right|$; sfruttare la *disuguaglianza triangolare per l'integrale*, poi integrare e concludere.]

2. Provare che vale la seguente disuguaglianza:

$$\int_a^b |f(x) - \hat{f}|^2 \, dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |f'(x)|^2 \, dx.$$

[**Suggerimento:** Ragionando come sopra si trova $|f(x) - \hat{f}|^2 = \left| \int_\xi^x f'(t) \, dt \right|^2$; sfruttare la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz* (cfr. **Esercizio 36**), poi integrare e concludere.]

Esercizio 39 (Un'Altra Caratterizzazione delle Funzioni Costanti in un Intervallo): Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

Se risulta:

$$\int_a^b f(x) \cdot \varphi'(x) \, dx = 0$$

per ogni funzione $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 e con $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$, allora f è costante in $[a, b]$.

¹³Henri Poincaré (1854 – 1912), matematico francese.

[Suggerimento: Sia ψ una fissata funzione continua in $[a, b]$ tale che $\int_a^b \psi(x) \, dx = 1$ ¹⁴; scelta una funzione g continua in $[a, b]$ e tale che $g(a) = 0 = g(b)$, la funzione $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo:

$$h(x) := g(x) - \psi(x) \int_a^b g(t) \, dt$$

è anch'essa continua in $[a, b]$; la primitiva H di h che si annulla in a , cioè la funzione integrale:

$$H(x) := \int_a^x h(t) \, dt,$$

è una funzione di classe C^1 in $[a, b]$, ha $H(a) = 0$ per definizione e:

$$\begin{aligned} H(b) &= \int_a^b h(x) \, dx \\ &= \int_a^b \left(g(x) - \psi(x) \int_a^b g(t) \, dt \right) dx \\ &= \int_a^b g(x) \, dx - \underbrace{\int_a^b \psi(x) \, dx}_{=1} \int_a^b g(t) \, dt \\ &= 0, \end{aligned}$$

dunque $\varphi = H$ si può usare come “test” nell’uguaglianza integrale in ipotesi; concludere usando il *Lemma Fondamentale del Calcolo delle Variazioni*.]

Esercizio 40 (Disuguaglianza tra Integrali - 1): Sia $T > 0$.

1. Dimostrare che la disuguaglianza:

$$(\star) \quad \frac{1}{2} \left(\int_0^T f(t) \, dt \right)^2 \leq \int_0^T t f(t) \, dt$$

vale per ogni funzione $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che $0 \leq f(t) \leq 1$ in $[0, T]$.

[Suggerimento: Posto $F(x) := \int_0^x f(t) \, dt$, osservare che $\frac{1}{2} \left(\int_0^T f(t) \, dt \right)^2 = \int_0^T F(t) f(t) \, dt$; maggiore F sfruttando le limitazioni imposte ad f e concludere. Tuttavia, altri approcci sono possibili.¹⁵]

2. Determinare le funzioni continue per le quali la $(\star)$ è soddisfatta col segno di uguaglianza.

[Suggerimento: Ripercorrere la dimostrazione precedente supponendo sia soddisfatta l’uguaglianza.]

3. Come va modificata la $(\star)$ affinché rimanga valida per qualsiasi funzione continua e non negativa in $[0, T]$ (i.e., anche per quelle con massimo > 1)? E come affinché essa sia valida per ogni funzione continua in $[0, T]$?

¹⁴Funzioni di tal fatta esistono sempre: infatti, ad esempio, basta scegliere $\psi(x) := k \cdot (a - x)(x - b)$ con la costante $k \in \mathbb{R}$ fissata in modo che l’integrale di ψ risulti uguale ad 1.

¹⁵E.g., si può provare con le usuali tecniche del Calcolo Differenziale che la funzione $\Delta(x) := \int_0^x t f(t) \, dt - \frac{1}{2} \left(\int_0^x f(t) \, dt \right)^2$ è ≥ 0 ovunque in $[0, T]$.

Quali funzioni continue soddisfano la disuguaglianza generalizzata col segno d'uguaglianza?

[Suggerimento: Per il primo quesito, scrivere la $(\star)$ per la funzione normalizzata $\tilde{f}(x) := \frac{1}{\max f} f(x)$ e concludere con manipolazioni algebriche; per il secondo, considerare il valore assoluto.]

4. Generalizzare la $(\star)$. Provare che fissati due esponenti $\alpha \geq 1$ e $\beta > 0$, risulta:

$$(\star_{\alpha,\beta}) \quad \frac{1}{\alpha} \left(\int_0^T f^\beta(t) \, dt \right)^\alpha \leq \int_0^T t^{\alpha-1} f^\beta(t) \, dt$$

per ogni $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che $0 \leq f(x) \leq 1$.

Sfruttando quanto fatto al punto **3**, determinare le modifiche da apportare alla $(\star_{\alpha,\beta})$ in modo che rimanga valida per qualsiasi funzione continua in $[0, T]$.

Quali funzioni continue soddisfano la disuguaglianza generalizzata col segno d'uguaglianza?

Esercizio 41 (Disuguaglianza tra Integrali - 2): Sia $T > 0$.

1. Provare che la disuguaglianza:

$$(\star\star) \quad \int_0^T t f(t) \, dt \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^T \sqrt{f(t)} \, dt \right)^2$$

vale per ogni funzione $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, non negativa e decrescente in $[0, T]$.

[Suggerimento: Con i metodi del Calcolo Differenziale, studiare il segno della funzione $\Delta(x) := \frac{1}{2} \left(\int_0^x \sqrt{f(t)} \, dt \right)^2 - \int_0^x t f(t) \, dt$ in $[0, T]$.]

2. Generalizzare la $(\star\star)$. Scelto un numero $p \geq 1$ provare che la disuguaglianza:

$$\int_0^T t^{p-1} f(t) \, dt \leq \frac{1}{p} \left(\int_0^T f^{1/p}(t) \, dt \right)^p$$

vale per ogni funzione $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, non negativa e decrescente in $[0, T]$.

[Suggerimento: Procedere come sopra, cambiando ciò che va cambiato.]

3. Esistono funzioni continue che soddisfano la $(\star\star)$ col segno d'uguaglianza?

Esercizio 42 (Una Disuguaglianza ‘Curiosa’): Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, ovunque positiva in $\mathbb{R}$ e periodica di periodo $T > 0$.

1. Dimostrare che:

$$(\clubsuit) \quad \int_0^T \frac{f(x)}{f(x + \frac{T}{2})} \, dx \geq T.$$

[Suggerimento: Usare la proprietà additiva con punto intermedio $T/2$ per spezzare l'integrale in due addendi; fare un cambiamento di variabile nel secondo integrale ed usare la periodicità; concludere tenendo presente che $\xi + \frac{1}{\xi} \geq 2$ per ogni $\xi > 0$.]

2. Provare che se f è costante o è periodica di periodo $T/2$, allora in $(\clubsuit)$ vale l'uguaglianza.

Viceversa, provare che se in (♣) vale l'uguaglianza, allora f è periodica di periodo $T/2$.

[**Suggerimento:** Per il viceversa, ripercorrere la dimostrazione precedente ed usare il fatto che $\xi + \frac{1}{\xi} = 2$ se e solo se $\xi = 1$.]

Esercizio 43: Sia $N \in \mathbb{N}$ un numero ≥ 2 .
Provare che la disuguaglianza:

$$\sum_{n=1}^N \frac{a_n}{\sqrt{1+a_1+\dots+a_{n-1}} \sqrt{a_n+\dots+a_N}} \leq \frac{\pi}{2}$$

vale per ogni scelta di N numeri $a_1, \dots, a_N > 0$ tali che $\sum_{n=1}^N a_n = 1$.¹⁶

[**Suggerimento:** Posto $x_n := a_1 + \dots + a_n$ per ogni $1 \leq n \leq N$, provare che $a_n = x_n - x_{n-1}$, $1 + a_1 + \dots + a_{n-1} = 1 + x_{n-1}$ ed $a_n + \dots + a_N = 1 - x_{n-1}$; sfruttare queste relazioni per dimostrare che il primo membro coincide con una somma integrale inferiore di un'opportuna funzione $f(x)$ continua in $[0, 1]$; concludere ricordando che ogni somma integrale inferiore di f non supera l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$.]

Esercizio 44 (Un Fatto di Teoria della Misura in Dimensione 1): Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $\mathbb{R}$ con derivata prima limitata.

1. Provare che f soddisfa la *disuguaglianza di Lipschitz*¹⁷:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, in cui $L = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \geq 0$. Usando tale disuguaglianza, mostrare che f è uniformemente continua in $\mathbb{R}$.

[**Suggerimento:** Sfruttare il *Teorema di Lagrange*.]

2. Provare se $I = [a, b]$ è un intervallo chiuso e limitato, allora $f(I)$ è un intervallo chiuso e limitato con ampiezza minore o tutt'al più uguale a $L(b - a)$.

[**Suggerimento:** Sfruttare i *Teoremi di Bolzano* e di *Weierstrass* e la disuguaglianza di Lipschitz.]

3. Diciamo che un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}$ ha *lunghezza nulla secondo Peano-Jordan* se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists I_1 = [a_1, b_1], \dots, I_N = [a_N, b_N] \subseteq \mathbb{R} : \begin{cases} E \subseteq \bigcup_{n=1}^N I_n \\ \sum_{n=1}^N b_n - a_n < \varepsilon \end{cases}.$$

Provare che se $E \subseteq \mathbb{R}$ ha lunghezza nulla secondo Peano-Jordan, allora anche $f(E) \subseteq \mathbb{R}$ ha lunghezza nulla secondo Peano-Jordan.

¹⁶Se $n = 1$, la somma $a_1 + \dots + a_{n-1}$ al denominatore del primo addendo è da considerarsi nulla.

¹⁷Rudolf Lipschitz (1832 – 1903), matematico tedesco.

[**Suggerimento:** Mostrare che se $I_1, \dots, I_N$ sono intervalli chiusi limitati tali che $E \subseteq \bigcup_{n=1}^N I_n$, allora $f(E) \subseteq \bigcup_{n=1}^N f(I_n)$; sfruttare il punto **2** per provare che gli insiemi $J_1 := f(I_1), \dots, J_N := f(I_N)$ sono intervalli chiusi limitati e possono essere scelti in modo che la somma delle loro ampiezze non superi $\varepsilon > 0$.]

Esercizio 45 (Una Disuguaglianza Geometrica per Solidi di Rotazione): Siano $a > 0$, $f : [-a, a] \rightarrow [0, +\infty[$ una funzione *pari*, di classe C^1 in $[-a, a]$, tale che $f(-a) = 0 = f(a)$.

Detto $\mathcal{S}$ il solido di rotazione che si ottiene ruotando il rettangoloide $\mathcal{R}_f$ attorno all'asse delle ascisse, possiamo definire le tre misure geometriche:

$$\begin{aligned} \text{vol } \mathcal{S} &= \pi \int_{-a}^a f^2(x) \, dx, \\ \text{area } \mathcal{S} &= 2\pi \int_{-a}^a f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx, \\ \text{sec } \mathcal{S} &= 2 \int_{-a}^a f(x) \, dx \end{aligned}$$

le quali restituiscono, rispettivamente, il volume di $\mathcal{S}$, l'area laterale di $\mathcal{S}$ e l'area delle sezioni di $\mathcal{S}$ determinate da piani che contengono l'asse di rotazione.

1. Dimostrare che la disuguaglianza:

$$\text{area}(\mathcal{S}) - t \, \text{sec}(\mathcal{S}) \geq 0$$

vale per ogni $t \in [0, \pi]$.

2. Usare la relazione:

$$\text{area}^3 \mathcal{S} \geq 36\pi \cdot \text{vol}^2 \mathcal{S},$$

detta *disuguaglianza isoperimetrica*¹⁸, per dimostrare che per ogni $t \in [0, \pi]$ esiste una costante $c = c(t) \geq 0$ tale che la disuguaglianza:

$$(*) \quad (\text{area } \mathcal{S} - t \, \text{sec } \mathcal{S})^3 \geq c \cdot \text{vol}^2 \mathcal{S}$$

vale per ogni solido di rotazione $\mathcal{S}$ ottenuto come detto all'inizio.

¹⁸Tale disuguaglianza esprime il fatto che l'area laterale di un solido di rotazione è maggiore dell'area laterale della sfera che ha lo stesso volume. Infatti, detto $V > 0$ il volume del solido $\mathcal{S}$, la sfera $\mathcal{S}^*$ avente lo stesso volume di $\mathcal{S}$ ha raggio $r^* = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$ e area laterale $\text{area } \mathcal{S}^* = 4\pi(r^*)^2$, e perciò:

$$\begin{aligned} \text{area } \mathcal{S} \geq \text{area } \mathcal{S}^* &\Leftrightarrow \text{area}^3 \mathcal{S} \geq \text{area}^3 \mathcal{S}^* \\ &\Leftrightarrow \text{area}^3 \mathcal{S} \geq 4^3 \pi^3 (r^*)^6 \\ &\Leftrightarrow \text{area}^3 \mathcal{S} \geq 4^3 \pi^3 \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^2 \\ &\Leftrightarrow \text{area}^3 \mathcal{S} \geq 36\pi \cdot V^2 \\ &\Leftrightarrow \text{area}^3 \mathcal{S} \geq 36\pi \cdot \text{vol}^2 \mathcal{S}. \end{aligned}$$

APPENDICE A. TABELLE DI INTEGRALI FONDAMENTALI ED IMMEDIATI

TABELLA 1. Integrali Fondamentali.

Funzione	una primitiva	(condizioni)
1	x	
x^α	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$	$(\alpha \in \mathbb{R} \text{ ed } \alpha \neq -1)$
$\frac{1}{x}$	$\log x $	
a^x	$\frac{1}{\log a} a^x$	$(a > 0 \text{ e } a \neq 1)$
$\cos x$	$\sin x$	
$\sin x$	$-\cos x$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x$	
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{settsinh} x$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{settcosh} x$	
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{setttanh} x$	

TABELLA 2. Integrali Immediati.

Funzione	una primitiva	(condizioni)
$f'(x)$	$f(x)$	
$f'(x) f^\alpha(x)$	$\frac{1}{\alpha+1} f^{\alpha+1}(x)$	$(\alpha \in \mathbb{R} \text{ ed } \alpha \neq -1)$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\log f(x) $	
$f'(x) a^{f(x)}$	$\frac{1}{\log a} a^{f(x)}$	$(a > 0 \text{ e } a \neq 1)$
$f'(x) \cos f(x)$	$\sin f(x)$	
$f'(x) \sin f(x)$	$-\cos f(x)$	
$\frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$	$\tan f(x)$	
$\frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$	$-\cot f(x)$	
$\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$	$\arctan f(x)$	
$\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$	$\arcsin f(x)$	
$f'(x) \cosh f(x)$	$\sinh f(x)$	
$f'(x) \sinh f(x)$	$\cosh f(x)$	
$\frac{f'(x)}{\cosh^2 f(x)}$	$\tanh f(x)$	
$\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}$	$\operatorname{settsinh} f(x)$	
$\frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)-1}}$	$\operatorname{settcosh} f(x)$	
$\frac{f'(x)}{1-f^2(x)}$	$\operatorname{setttanh} f(x)$	

APPENDICE B. REGOLE DI INTEGRAZIONE INDEFINITA E DEFINITA

TABELLA 3. Regole di Integrazione Indefinita

Regola	Formula	Note
Linearità	$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \int f(x) \, dx + \beta \int g(x) \, dx$	$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Integrazione per Parti	$\int f(x)g(x) \, dx = F(x)g(x) - \int F'(x)g'(x) \, dx$	$F(x) = \int f(x) \, dx$
Sostituzione “diretta”	$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx = \int f(t) \, dt \Big _{t=\varphi(x)}$	$t = \varphi(x)$
Sostituzione “inversa”	$\int f(x) \, dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt \Big _{t=\varphi^{-1}(x)}$	$t = \varphi^{-1}(x),$ φ invertibile

TABELLA 4. Regole di Integrazione Definita

Regola	Formula	Note
Linearità	$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx$	$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Integrazione per Parti	$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = F(x)g(x) \Big _a^b - \int_a^b F'(x)g'(x) \, dx$	$F(x) = \int f(x) \, dx$
Sostituzione “diretta”	$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) \, dt$	$t = \varphi(x)$
Sostituzione “inversa”	$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt$	$t = \varphi^{-1}(x)$ φ invertibile

APPENDICE C. INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI

Per integrare una funzione razionale del tipo $\frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ basta seguire l'algoritmo riportato in TABELLA 5.

TABELLA 5. Integrazione delle Funzioni Razionali

1	Controllare se la funzione integranda è immediatamente integrabile ed integrarla direttamente; altrimenti, passare al punto 2 .
2	Semplificare la funzione integranda, cancellando eventuali fattori comuni a numeratore e denominatore.
3	Scomporre la funzione integranda come da TABELLA 6.
4	Sostituire la scomposizione trovata nell'integrale iniziale.
5	Calcolare l'integrale per <i>linearità</i> , come somma degli integrali degli addendi della scomposizione.

Qui di seguito proponiamo un esempio di applicazione dell'algoritmo illustrato. Tale esempio è volutamente difficile, poiché serve a mostrare come funziona il metodo nel caso generale, cioè in un caso in cui figurino *tutte* le possibili difficoltà che si incontrano integrando funzioni razionali.

TABELLA 6. Scomposizione delle Funzioni Razionali

1 Se il coefficiente del termine di massimo grado di p_2 non è 1:	1.1 mettere in evidenza il coefficiente del termine di massimo grado, in modo da ottenere un polinomio <i>monico</i> al denominatore;
	1.2 continuare al punto 2 .
2 Se il grado del numeratore è $\geq$ di quello del denominatore:	2.1 eseguire la divisione tra i polinomi p_1 e p_2 , ottenendo un quoziente q ed un resto r con $\text{grad } r < \text{grad } p_2$;
	2.2 riscrivere la funzione razionale in forma $q(x) + \frac{r(x)}{p_2(x)}$;
	2.3 vedere il punto 3 per scomporre ulteriormente $\frac{r(x)}{p_2(x)}$.
3 Se il grado del numeratore è $<$ di quello del denominatore:	3.1 scomporre p_2 nel prodotto di fattori di primo grado $(x - \alpha)$ o di secondo grado $(x^2 + \beta x + \gamma)$ con $\Delta < 0$;
	3.2 se tutti i fattori di primo e secondo grado sono elevati alla prima potenza, usare solo la <i>scomposizione in fratti semplici</i> (cfr. TABELLA 7);
	3.3 se qualcuno dei fattori è elevato a potenza diversa dalla prima, usare la <i>formula di Hermite</i> (cfr. TABELLA 8).
4 Scrivere la funzione razionale come somma dei diversi contributi (quoziente, fratti ed Hermite).	

TABELLA 7. Fratti semplici corrispondenti ai fattori di p_2

Fattore in p_2	Fratto Semplice
$x - \alpha$	$\frac{A}{x - \alpha}$
$x^2 + \beta x + \gamma$	$\frac{Bx + C}{x^2 + \beta x + \gamma}$

Esempio 1: Vogliamo calcolare:

$$\int \frac{x^9 + 1}{x^3(2x^2 + 2x + 2)^2} dx.$$

TABELLA 8. Costruzione del polinomio p_2^* nella Formula di Hermite

Fattore in p_2	Fattore in p_2^*
$(x - \alpha)^h$	$(x - \alpha)^{h-1}$
$(x^2 + \beta x + \gamma)^k$	$(x^2 + \beta x + \gamma)^{k-1}$

L'integrale non è immediato, perché non è possibile ricondurre facilmente l'integrando ad una funzione "della tabella". Quindi dobbiamo scomporre la funzione razionale.

Il denominatore $x^3(2x^2 + 2x + 2)^2$ ha come termine di massimo grado $4x^7$; per renderlo monico basta mettere in evidenza un 2 nel fattore elevato al quadrato: in tal modo la funzione razionale assegnata si riscrive:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{x^9 + 1}{x^3(x^2 + x + 1)^2}$$

e basta scomporre il secondo fattore. Dato che il grado di $p_1(x) = x^9 + 1$ è maggiore di quello di $p_2(x) = x^3(x^2 + x + 1)^2$ (difatti $\text{grad } p_1 = 9 > 7 = \text{grad } p_2$), quindi bisogna svolgere la divisione tra i due polinomi. Essa può farsi canonicamente con uno dei metodi conosciuti (divisione lunga o schema di Ruffini) e richiede un po' di sforzo, poiché bisogna sviluppare le potenze ed i prodotti in p_2 e poi svolgere la divisione. Alla fine dei conti si trova:

$$\begin{aligned} q(x) &= x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \\ r(x) &= 2x^6 - x^3 + 1, \end{aligned}$$

cosicché dopo la divisione la funzione razionale assegnata può essere riscritta come:

$$\frac{1}{4}(x - 1)^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{2x^6 - x^3 + 1}{x^3(x^2 + x + 1)^2}.$$

A questo punto bisogna scomporre la funzione razionale che ancora rimane, i.e. $\frac{r(x)}{p_2(x)}$.

Dato che il polinomio al denominatore è già scomposto in fattori di primo grado e di secondo grado con $\Delta < 0$ e dato che alcuni fattori figurano elevati a potenza con esponente maggiore di 1, dobbiamo usare la *formula di Hermite*.

Poiché $p_2^*(x) = x^2(x^2 + x + 1)$, tale formula ci assicura che esistono 7 costanti A, B, C (coefficienti di fratti semplici) ed a, b, c, d (coefficienti di una funzione razionale con denominatore $p_2^*(x)$) tali che:

$$\frac{2x^6 - x^3 + 1}{x^3(x^2 + x + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} + \frac{d}{dx} \left[\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{p_2^*(x)} \right].$$

Sviluppando i calcoli troviamo per il secondo membro della precedente l'espressione:

$$\begin{aligned}
& \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} + \frac{d}{dx} \left[\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^2(x^2 + x + 1)} \right] \\
&= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} \\
&+ \frac{(3ax^2 + 2bx + c)x^2(x^2 + x + 1) - (ax^3 + bx^2 + cx + d)(4x^3 + 3x^2 + 2x)}{x^4(x^2 + x + 1)^2} \\
&= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} \\
&+ \frac{(3ax^2 + 2bx + c)x(x^2 + x + 1) - (ax^3 + bx^2 + cx + d)(4x^2 + 3x + 2)}{x^3(x^2 + x + 1)^2} \\
&= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} \\
&+ \frac{-ax^5 - 2bx^4 + (a - b - 3c)x^3 + (-2c - 4d)x^2 + (-c - 3d)x - 2d}{x^3(x^2 + x + 1)^2} \\
&= \frac{Ax^2(x^2 + x + 1)^2 + (Bx + C)x^3(x^2 + x + 1)}{x^3(x^2 + x + 1)^2} \\
&+ \frac{-ax^5 - 2bx^4 + (a - b - 3c)x^3 + (-2c - 4d)x^2 + (-c - 3d)x - 2d}{x^3(x^2 + x + 1)^2} \\
&= \frac{(A + B)x^6 + (2A + B + C)x^5 + (3A + B + C)x^4 + (2A + C)x^3 + Ax^2}{x^3(x^2 + x + 1)^2} \\
&+ \frac{-ax^5 - 2bx^4 + (a - b - 3c)x^3 + (-2c - 4d)x^2 + (-c - 3d)x - 2d}{x^3(x^2 + x + 1)^2} \\
&= \frac{(A + B)x^6 + (2A + B + C - a)x^5 + (3A + B + C - 2b)x^4}{x^3(x^2 + x + 1)^2} \\
&+ \frac{(2A + C + a - b - 3c)x^3 + (A - 2c - 4d)x^2 + (-c - 3d)x - 2d}{x^3(x^2 + x + 1)^2}
\end{aligned}$$

ed, imponendo al numeratore dell'ultimo membro l'uguaglianza con $r(x)$, ricaviamo il sistema lineare:

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B = 2 \\ 2A + B + C - a = 0 \\ 3A + B + C - 2b = 0 \\ 2A + C + a - b - 3c = -1 \\ A - 2c - 4d = 0 \\ -c - 3d = 0 \\ -2d = 1 \end{array} \right.$$

Risolvendo le equazioni più banali (la settima, la sesta, la quinta e la prima) troviamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} B = 1 \\ A = 1 \\ c = \frac{3}{2} \\ d = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

e dobbiamo risolvere il sistema formato dalle equazioni rimanenti; sostituendo quanto appena trovato nelle restanti tre equazioni e riscrivendo otteniamo:

$$\begin{cases} C - a = -3 \\ C - 2b = -4 \\ C + a - b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

da cui ricaviamo:

$$\begin{cases} C = \frac{1}{3} \\ b = \frac{13}{6} \\ a = \frac{10}{3} \end{cases}.$$

Conseguentemente possiamo scrivere la scomposizione:

$$\begin{aligned} \frac{x^9 + 1}{x^3(2x^2 + 2x + 2)^2} &= \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{4x} + \frac{x+1/3}{4(x^2+x+1)} \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{d}{dx} \left[\frac{20x^3 + 13x^2 + 9x - 3}{6x^2(x^2+x+1)} \right]. \end{aligned}$$

Ottenuta la scomposizione, calcoliamo infine l'integrale:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^9 + 1}{x^3(2x^2 + 2x + 2)^2} dx &= \frac{1}{12}(x-1)^3 + \frac{1}{4} \log|x| \\ &\quad + \frac{20x^3 + 13x^2 + 9x - 3}{24x^2(x^2+x+1)} + \frac{1}{4} \int \frac{x+1/3}{x^2+x+1} dx \\ &= \frac{1}{12}(x-1)^3 + \frac{1}{4} \log|x| + \frac{20x^3 + 13x^2 + 9x - 3}{24x^2(x^2+x+1)} \\ &\quad + \frac{1}{8} \int \frac{2x+1 - 1 + 2/3}{x^2+x+1} dx \\ &= \frac{1}{12}(x-1)^3 + \frac{1}{4} \log|x| + \frac{20x^3 + 13x^2 + 9x - 3}{24x^2(x^2+x+1)} \\ &\quad + \frac{1}{8} \log|x^2+x+1| - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx; \end{aligned}$$

a parte, usando il completamento del quadrato e riconducendo il tutto ad un integrale del tipo dell'arcotangente, troviamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} dx \\ &= \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} dx \\ &= \frac{4}{3} \int \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1} dx \\ &= \frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{2/\sqrt{3}}{(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C, \end{aligned}$$

cosicché:

$$\int \frac{x^9 + 1}{x^3(2x^2 + 2x + 2)^2} dx = \frac{1}{12}(x-1)^3 + \frac{1}{4} \log |x| + \frac{20x^3 + 13x^2 + 9x - 3}{24x^2(x^2 + x + 1)} \\ + \frac{1}{8} \log |x^2 + x + 1| - \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + C .$$

La verifica del risultato è lasciata allo studente.

◇

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[DM1] Di Meglio, G. (2017) *Complementi sull'Integrazione Indefinita* [reperibile online su www.docenti.unina.it]

[DM2] Di Meglio, G. (2017) *Complementi sulla Formula di Taylor* [reperibile online su www.docenti.unina.it]

GUGLIELMO DI MEGLIO, PhD
 SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE
 UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI “FEDERICO II”
 PIAZZALE TECCHIO 80
 80126 NAPOLI – ITALY
 EMAIL: guglielmo.dimeglio@unina.it