

Suggerimenti per Evitare alcuni degli Errori più comuni nella Soluzioni degli Esercizi della Prova Scritta di Fisica

Quelli che seguono sono osservazioni utili per evitare alcuni degli errori più frequenti registrati durante la correzione degli scritti di fisica. L'elenco non è ovviamente completo!

1 Conversione delle unità di misura, errori algebrici e mancato controllo delle dimensioni

Gli errori algebrici sono molto frequenti e quasi inevitabili. Alcune volte denotano però evidenti difficoltà nella manipolazione delle relazioni algebriche. Chi ha questi problemi, riprenda il suo testo di matematica delle scuole superiori e si eserciti finché non si sente sicuro.

Un'altra evidente difficoltà, comune a molti studenti, riguarda l'uso delle potenze di dieci e la conversione delle unità di misura. Queste difficoltà sono fonte d'errore in esercizi di cinematica (conversione da m/s a km/h), di dinamica dei fluidi (conversione di densità espresse in g/cm³ a kg/m³) e di termodinamica (conversione di pressioni da Pa a atm e volumi da m³ a l). Nel materiale didattico presente sul sito si trovano i testi delle prove di verifica, con molti esercizi di base e le relative soluzioni. Si suggerisce caldamente di fare quegli esercizi, finché non ci si sente sicuri.

Ad esempio, se un cubo ha lato di 10cm e la densità del materiale di cui è fatto è di 500kg/m³ occorre riportare tutto alle stesse unità, ad esempio scrivendo il volume in metri cubi

$$V = (10\text{cm})^3 = (10^{-1}\text{m})^3 = 10^{-3}\text{m}^3$$

Notare come l'uso delle potenze di dieci renda il calcolo più sicuro che scrivere numeri con virgola e (molti) zeri.

Occorre essere sicuri su questi passaggi facendo esercizi, come già detto in precedenza.

Un esempio concreto: nel ricavare la velocità in termini del raggio e dell'accelerazione centripeta, in un moto circolare uniforme, si parte in genere dall'equazione

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

e si ricava v . La relazione corretta è

$$v = \sqrt{a_c r}$$

ma nei compiti sono apparse relazioni sbagliate, del tipo

$$v \stackrel{?}{=} \frac{a_c}{r} \quad (1)$$

Questi errori possono essere evitati **controllando le unità di misura delle grandezze fisiche presenti nell'equazione**. Il controllo può essere fatto sia quando l'equazione è ancora in forma algebrica, sia quando si sostituiscono i valori numerici assegnati dall'esercizio.

Ad esempio, nell'equazione sbagliata (1), ricordando che la velocità ha le dimensioni di *spazio/tempo*, che l'accelerazione ha dimensioni di *spazio/tempo*² ed il raggio quelle di *spazio*, le dimensioni delle grandezze fisiche nei due membri dell'equazione sono diverse:

$$\frac{\text{spazio}}{\text{tempo}} \neq \frac{(\text{spazio}/\text{tempo}^2)}{\text{spazio}} = \frac{1}{\text{tempo}^2},$$

segno evidente del fatto che l'equazione è sbagliata.

Il controllo si può fare anche quando si sostituiscono i valori numerici. Ad esempio, supponiamo che siano assegnati i valori: $a_c = 5\text{m/s}^2$ ed $r = 1\text{m}$, allora è **fondamentale sostituire il valore numerico insieme alle sue unità di misura**. Così nella relazione sbagliata (1) si otterrebbe

$$v \stackrel{?}{=} \frac{5\text{m/s}^2}{1\text{m}} = \frac{5}{\text{s}^2}$$

che non ha le unità di misura giuste di una velocità.

Questo discorso va fatto per tutte le equazioni che si scrivono nelle soluzioni dei compiti ed aiuta enormemente ad evitare risposte sbagliate. Riassumendo:

tutte le equazioni devono essere dimensionalmente corrette, altrimenti sono sicuramente sbagliate!

2 Velocità media e spostamento totale in un moto rettilineo

La velocità media è uguale allo spostamento totale percorso diviso il tempo totale impiegato. In un moto rettilineo, se un corpo si è spostato, sempre nello stesso verso, di s_1 nel tempo t_1 , di s_2 nel tempo t_2 e di s_3 nel tempo t_3 , allora la velocità media è

$$v_m = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3}. \quad (2)$$

Se invece fosse indicato che, ad esempio nel secondo tratto, lo spostamento s_2 è avvenuto in verso opposto agli altri due, allora lo spostamento totale sarebbe

$$s_1 - s_2 + s_3$$

e la velocità media cambierebbe di conseguenza.

È un errore frequente confondere spostamento, cioè lo spazio percorso in una certa direzione, con la posizione rispetto ad un punto, scelto come origine di un sistema di coordinate O . Se un corpo si trovava inizialmente, al tempo t_1 , nella posizione x_1 (quindi x_1 è la coordinata del punto dove si trova il corpo al tempo t_1 , rispetto al punto O che è stato scelto come origine del sistema di riferimento) e successivamente, al tempo t_2 , si trova nella posizione x_2 , allora avrà percorso uno spostamento $s = x_2 - x_1$, in un tempo $t = t_2 - t_1$ e quindi, in accordo con la definizione precedente, la velocità media è

$$v_m = \frac{s}{t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \quad (3)$$

Notare che, questa è effettivamente la velocità media nell'intervallo di tempo $t = t_2 - t_1$ in cui lo spostamento del corpo, dal punto iniziale a quello finale è proprio $s = x_2 - x_1$. Fare attenzione: per spostamenti e posizioni abbiamo utilizzato due lettere diverse s e x , per i tempi usiamo sempre t , ma il significato di t_1 e t_2 è diverso nelle due espressioni (2) e (3), in cui, ad esempio, t_1 nell'eq.(2) indica il tempo impiegato a percorrere lo spostamento s_1 , mentre t_1 nell'eq.(2) indica l'istante in cui il corpo era nella posizione x_1 .

Altro tipo di errore rilevato è definire la velocità media totale come somma o come media aritmetica (o altro) delle velocità v_1, v_2 dei singoli tratti, cioè espressioni sbagliate de tipo

$$v_m \stackrel{?}{=} v_1 + v_2, \quad v_m \stackrel{?}{=} \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Tutto quanto si è detto finora vale per moti rettilinei. Se, ad esempio, due moti successivi in un piano avvengono lungo due direzioni diverse, allora lo spostamento totale si ottiene **sommando vettorialmente** gli spostamenti ed ha il modulo uguale alla distanza finale dalla posizione di partenza (fare un disegno per capirlo). La velocità media totale sarà anch'essa un vettore, dato da

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{s}_1 + \vec{s}_2}{t_1 + t_2}.$$

diretto come lo spostamento totale e modulo uguale al il rapporto tra il modulo dello spostamento totale ed il tempo totale impiegato (la somma dei due tempi).

3 Sbagliare le leggi orarie di posizione e velocità nei i moti rettilinei

Una volta individuato il tipo di moto, sia esso rettilineo uniforme o uniformemente accelerato (o decelerato), conviene scrivere immediatamente onsieme le leggi orarie per s e per v :

- Moto rettilineo uniforme

$$s = s_0 + v_0 t, \quad v = v_0$$

- Moto uniformemente accelerato

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \quad v = v_0 + a t.$$

E' capitato di trovare esercizi sbagliati in cui, in caso di moto uniformemente accelerato, con velocità iniziale nulla, veniva usata

$$v = a t$$

insieme a

$$s \stackrel{?}{=} v t$$

che è valida solo per il moto rettilineo uniforme, e dà, quindi, un risultato sbagliato per lo spostamento, che verrebbe il doppio di quello che si otterrebbe dalla formula corretta del moto uniformemente accelerato, che nel caso di velocità iniziale nulla è $s = \frac{1}{2} a t^2$.

La causa di questa confusione è l'errata interpretazione della formula $v = s/t$. Da un lato, se s è lo spostamento totale avvenuto nel tempo t , allora il rapporto s/t è la velocità media, per definizione. Ma nella legge oraria che esprime come la velocità dipende dal tempo, v indica la velocità istantanea. Solo nel moto rettilineo uniforme, in cui la velocità è costante, il suo valore è sia quello della velocità media calcolata per qualunque intervallo, sia quello della velocità istantanea (nel caso di velocità iniziale nulla $v_0 = 0$).

4 Diagramma delle forze che agiscono su un corpo o su un sistema di più corpi collegati tra loro

Non si sottovaluterà mai abbastanza l'utilità di rappresentare il più correttamente possibile ogni quesito posti negli esercizi, con un disegno accurato del sistema di masse e delle forze che agiscono su di esse. Un disegno fatto correttamente, abbastanza grande da contenere tutti gli oggetti in gioco nell'esercizio, con vicino ad ognuno di essi dei simboli che li rappresentano nelle equazioni, e', nella stragrande maggioranza dei casi, già metà della soluzione del problema, perché consente di avere davanti agli occhi le grandezze essenziali, già sistemate nel modo giusto.

Questo vale in particolare per problemi di dinamica, dove intervengono tutte quantità vettoriali, forze, accelerazioni, velocità e spostamenti, che hanno ognuna direzione e verso, e quindi angoli ben precisi tra loro. Se nel disegno queste quantità vettoriali vengono rappresentati bene, quello che resta da determinare tramite le equazioni della dinamica, sono solo i moduli di questi vettori. E' consigliabile, a chi avesse difficoltà a fare disegni a mano libera, di munirsi di un righello ed abituarsi a fare disegni precisi.

Se più forze agiscono su un corpo, e' consigliabile fare un disegno esplicito dei vettori che rappresentano le forze, anche se inizialmente non e' noto il modulo (e quindi la "lunghezza" relativa) di ciascuna. Il disegno e' utile per essere sicuri di sapere direzione e verso di ogni forza. Ad esempio, su qualunque corpo la forza peso e' sempre diretta verso il basso, mentre la reazione vincolare, del piano a cui un corpo e' appoggiato e' sempre in direzione perpendicolare al piano e dunque e' diretta verso l'alto solo se il piano e' orizzontale, le forze d'attrito, se presenti, sono parallele al piano d'appoggio (la superficie di contatto), la tensione di una fune e' sempre diretta lungo la fune.

Le forze vanno sempre disegnate partendo dal corpo o dal punto materiale a cui sono applicate. Nel caso sia presente un corpo rigido, allora e' necessario disegnare ogni forza a partire dal punto di applicazione. Ad esempio se una sbarra orizzontale e' poggiata su un fulcro, la reazione del fulcro, che impedisce alla sbarra di cadere, va disegnata a partire dal punto di contatto tra la sbarra e il fulcro e diretta verso l'alto. Se invece si ha una carrucola di forma circolare, le tensioni dovute alle corde inestensibili vanno disegnate a partire dai punti in cui le corde si distaccano dalla carrucola, hanno direzioni lungo le corde e versi che si allontanano dalla carrucola. Come si vede dalla lunghezza della frase precedente, un disegno sarebbe stato molto più chiaro.

In sistemi di più corpi, come ad esempio masse attaccate a una carrucola, od un treno di più vagoni trainato da una locomotiva, le funi che connettono le diverse masse creano, con la tensione, coppie di azione e reazione tra le coppie di masse da loro connesse.

5 Applicazione del principio della conservazione dell'energia meccanica

Suggerimento generale: se in un esercizio, sono presenti solo forze conservative e reazioni vincolari (ricordare che le reazioni vincolari non compiono lavoro, perchè perpendicolari alla direzione del moto) e non vengono chiesti tempi, ma si parla solo di spazi percorsi e velocità, allora e' quasi certo che si possano risolvere usando la conservazione dell'energia meccanica. (Ricordare che, se ci sono anche forze d'attrito, si ha invece una variazione dell'energia meccanica delle forze conservative uguale al lavoro fatto dalle forze d'attrito. Può essere utile, far riferimento al pdf di un esercizio fatto a lezione, presente nel materiale didattico del sito.)

Ovviamente questi esercizi si possono risolvere, ottenendo risultati corretti, così come e' avvenuto in alcuni compiti, usando leggi orarie per determinare tempi e poi calcolare spazi e velocità, ma questo richiede più tempo, più equazioni da risolvere ed in definitiva maggiore possibilità di errori algebrici.

Se però lo studente si sente più sicuro nell'applicare le leggi orarie, vada pure avanti in questo modo, molti lo fanno ed arrivano ai risultati corretti.

In presenza di sole forze conservative (ed eventualmente reazioni vincolari, l'energia meccanica si conserva, trasformandosi in varie forme. Ad esempio, in presenza di forza peso e forza elastica, si ha

$$E = E_{\text{cin}} + E_{\text{pot,Peso}} + E_{\text{pot,Elastica}} = \frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}kx^2$$

dove i vari simboli dovrebbero essere noti a chi legge.

Supponiamo che in un'esercizio¹ una massa m , sia inizialmente a contatto con una molla, di costante elastica nota k , mantenuta compressa di una lunghezza x_0 rispetto alla posizione di equilibrio, che la molla venga lasciata libera di spingere la massa. La massa dopo aver percorso un tratto orizzontale, arriva ai piedi di una collina (tipicamente un piano inclinato) ed inizia a salire. Supponiamo che l'esercizio chieda a quale altezza massima h_{max} può arrivare la massa, supponendo che durante tutto il moto non ci sia attrito. Siano assegnati i valori di m , k ed x_0 .

In tutte le fasi del moto l'energia meccanica si conserva: inizialmente e' puramente energia potenziale elastica:

$$\frac{1}{2}kx_0^2,$$

dove x_0 e' la compressione iniziale della molla. Ai piedi della collina si e' trasformata tutta in energia cinetica:

$$\frac{1}{2}mv_1^2$$

dove v_1 e' la velocità della massa sul piano orizzontale. Nel punto di massima altezza h_{max} in cui può arrivare sulla collina, la massa ha velocità nulla e l'energia e' tutta energia potenziale della forza peso:

$$mgh_{\text{max}}.$$

¹Questo esercizio è stato illustrato a lezione e nel file pdf.

Ai fini dell'esercizio, basta uguagliare le due espressioni iniziale e finale dell'energia, ottenendo un'unica equazione da cui ricavare $h_{\max}$:

$$\frac{1}{2}kx_0^2 = mgh_{\max}.$$

Il valore della velocità della massa sul tratto orizzontale non serve nel calcolo di $h_{\max}$. Tuttavia, osservando le soluzioni proposte in compiti in cui erano assegnati problemi analoghi, si nota la tendenza ad applicare la conservazione dell'energia solo nel moto sul tratto orizzontale. Così l'esercizio verrebbe risolto ricavando prima il valore di v_1 usando la conservazione dell'energia (correttamente)

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}kx_0^2$$

e poi utilizzandolo come valore iniziale della velocità nel moto uniformemente decelerato di salita sul piano inclinato, e il calcolo di $h_{\max}$ viene ottenuto facendo uso delle leggi orarie. In questo modo il problema può essere comunque risolto correttamente, ma in modo molto più dispendioso, con un numero maggiore di passaggi intermedi.

6 Le quattro fasi del moto armonico

Quanto tempo impiega una massa m a comprimere una molla di costante elastica k ? La risposta sbagliata è

$$t = \frac{T}{2}$$

la risposta esatta è

$$t = \frac{T}{4},$$

dove $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ è il periodo di oscillazione del moto armonico.

Infatti, supponiamo che la molla venga compressa verso destra, abbiamo **quattro fasi del moto armonico**, prima che un oscillatore armonico torni nella situazione iniziale.

1. dalla posizione di equilibrio alla massima compressione (velocità diretta verso destra con modulo in diminuzione dal massimo valore a zero)
2. dalla massima compressione alla posizione di equilibrio (velocità diretta verso sinistra con modulo in aumento da zero al massimo valore)
3. dalla posizione d'equilibrio la massimo allungamento (velocità diretta verso sinistra con modulo in diminuzione dal massimo valore a zero)
4. dal massimo allungamento alla posizione d'equilibrio (velocità diretta verso destra con modulo in aumento da zero al massimo valore)

A quel punto la molla è tornata alla posizione di partenza, **anche la velocità ha lo stesso modulo e verso di partenza** ed è passato un tempo pari al periodo T . La massima compressione è solo la prima delle quattro fasi e si compie in $t = T/4$.

Una possibile fonte di confusione è il fatto che se la massa non è attaccata alla molla essa si distaccerebbe alla fine della fase 2, ma questo non cambia il fatto che le prime due fasi sono quelle di un moto armonico, ognuna di durata pari ad un quarto del periodo.

7 Temperature in libertà

Se due sistemi con calori specifici diversi e temperature iniziali T_1 e T_2 , con $T_1 < T_2$, sono messi in contatto termico, la temperatura d'equilibrio è:

$$T_e = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2},$$

con il valore di T_e sempre intermedio tra le temperature iniziali massima e minima. Cioè, se ad esempio $T_1 < T_2$, allora

$$T_1 < T_e < T_2 \quad (4)$$

Non controllare questo fatto, e non accorgersi che, a causa di un errore, le tre temperature non verificano le disuguaglianze (7), rende l'esercizio completamente sbagliato.

(Ci sono due osservazioni che possono facilitare i calcoli. Come si vede, l'espressione per T_e contiene la combinazione massa $\times$ calore specifico in ogni termine delle somme sia a numeratore che a denominatore. Per cui qualunque scelta consistente di unità, ad esempio **tutte** le masse in grammi o tutte in kilogrammi, non altera il risultato perché l'unità di massa, g o kg, si semplifica tra numeratore e denominatore. Inoltre, si può sostituire il valore delle temperature indipendentemente in gradi Celsius o Kelvin. Si otterrà rispettivamente il valore corretto in Celsius o in Kelvin. Provare per credere ed eventualmente capire perché).

8 Le unità della costante dei gas R

Un uso sbagliato o superficiale delle unità di misura della costante dei gas perfetti, può produrre **risultati che differiscono di un fattore circa pari a cento dal risultato reale!** Un errore sistematico di questo tipo, è un errore grave non certamente un semplice errore numerico. Immaginate che succedrebbe in laboratorio, se l'energia prodotta in un esperimento risultasse cento volte più grande del valore erroneamente calcolato.

Le unità più usate per R sono

$$R = 8,3 \frac{\text{J}}{\text{molK}} = 0,082 \frac{\text{l atm}}{\text{molK}} = 2 \frac{\text{cal}}{\text{molK}}.$$

Quale espressione scegliere per R dipende dalle unità usate per le altre grandezze termodinamiche. Per non sbagliare, come si è già detto in precedenza, occorre **sempre sostituire i valori**

numerici delle grandezze fisiche insieme alle loro unità di misura. Questo eliminerebbe gli errori seguenti, in problemi che riguardano gas ideali:

- Applicazione della legge dei gas ideali.

Ad esempio: calcolare la temperatura di una mole di gas ideale dati volume e pressione rispettivamente in litri e atmosfere

$$n = 1 \text{ mol}, \quad V = 4 \text{ l}; \quad p = 1 \text{ atm}$$

In alcuni compiti verrebbe scritta la seguente espressione

$$T = \frac{pV}{nR} \stackrel{?}{=} \frac{1 \times 4}{1 \times 8.3} \stackrel{??}{=} 0.48 \text{ K}$$

Il fatto di non aver esplicitato le unità di misura di V , p ed R vicino ai valori numerici e l'aggiunta *a mano* di K al risultato finale sbagliato. Evidentemente l'espressione corretta della temperatura, dato che il volume e la pressione sono stati assegnati in litri ed atmosfere, si ottiene se sostituiamo $R = 0.082 \frac{\text{l atm}}{\text{mol K}}$:

$$T = \frac{1 \text{ atm} \times 4 \text{ l}}{1 \text{ mol} \times 0.082 \text{ l atm}/(\text{mol K})} = 48.7 \text{ K}$$

dove le unità di misura di litri ed atmosfere si semplificano ed il risultato finale è effettivamente una temperatura in gradi Kelvin, che risulta cento volte il valore della soluzione sbagliata !

- Lavoro prodotto e calore scambiato da un gas ideale in una trasformazione termodinamica reversibile.

Ad esempio: calcolare il lavoro, in joule, prodotto da un gas in un'espansione isoterma a temperatura $T = 100 \text{ K}$, in cui il gas raddoppia il suo volume iniziale da V_1 a $V_2 = 2V_1$. Ancora una volta, non esplicitando le unità di misura, si rischia di sbagliare sistematicamente il risultato:

$$L = nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \stackrel{?}{=} 1 \times 0,082 \times 100 \times \ln 2 = 8.2 \ln 2 \stackrel{??}{=} 5.7 \text{ J}$$

dove evidentemente l'unità di misura J è stata aggiunta a mano alla fine (ricordare che se addirittura l'unità di misura del risultato non viene scritta, l'esercizio è ugualmente compromesso). In realtà, se nell'espressione precedente avessimo sostituito i valori numerici, compreso quello di R , con le relative unità di misura, ci accorgeremmo che il lavoro non è uguale a 5,7 J. Infatti, si avrebbe

$$L = nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = 1 \text{ mol} \times 0,082 \frac{\text{l atm}}{\text{mol K}} \times 100 \text{ K} \times \ln 2 = 8.2 \times \ln 2 \text{ l atm} = 5.7 \text{ l atm}.$$

Se si convertono i litri in metri cubi e le atmosfere in Pascal, com'è necessario per ottenere l'energia in joule, ci si accorge che

$$5,7 \text{ l atm} = 575 \text{ J}$$

Il risultato corretto e' quindi, ancora una volta, cento volte quello sbagliato.

Anche in questo caso, sarebbe bastato notare che volendo ottenere il lavoro in joule, e negli esercizi è sempre richiesto di esprimerlo in questa unità di misura, mentre il calore è richiesto in calorie, basta usare il valore $R = 8,3 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$:

$$L = nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = 1 \text{ mol} \times 8,3 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \times 100 \text{ K} \times \ln 2 = 575 \text{ J}$$

Neila correzione dei compiti si e' un'ulteriore variante al problema della scelta corretta delle unità della costante dei gas, che consiste nell'usare nel calcolo di lavoro e calore il valore di R in l atm/(mol K) e di scrivere il risultati finali in unità l atm. Anche se alla fine il risultato formalmente e' corretto, negli esercizi è sempre richiesto di di esprimerli nelle usuali unità di joule o di calorie.

Un'ultima osservazione sul calcolo del lavoro prodotto in un'isoterma, per segnalare una fonte d'errore numerico: il logaritmo che appare nell'espressione di lavoro e calore e' il cosiddetto logaritmo naturale, mentre nelle calcolatrici e' presente anche il logaritmo in base dieci, indicato con log, che non v'è usato altrimenti si ottiene un valore sbagliato. Nel nostro esempi in cui il valore raddoppia: $\ln 2 = 0,7 \neq \log 2 = 0,3$.