

CONCENTRAZIONE

Variabilità di fenomeni additivi e trasferibili, si guarda all'intensità del fenomeno e si analizza la sua concentrazione rispetto alle unità

- un fenomeno ha **concentrazione massima** quando ad $(s-1)$ unità del carattere compete intensità zero, mentre una sola unità possiede l'ammontare complessivo del carattere
- un fenomeno ha **concentrazione minima** se a tutte le unità del carattere compete la stessa intensità

Supponiamo di avere una variabile statistica additiva e trasferibile che presenta modalità:

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_i, \dots, X_s$$

Si ordinano le modalità :

$$X_1 \leq X_2 \leq X_3, \dots, \leq X_i \leq, \dots, \leq X_s$$

Si eseguano le somme cumulate successive:

$$A_1 = x_1$$

$$A_2 = x_1 + x_2$$

$$A_i = x_1 + x_2 + \dots + x_i$$

$$A_s = x_1 + x_2 + \dots + x_i + \dots + x_s$$

Si indichi con:

$p_i = i/s$ la frazione di individui con $x \leq x_i$

e con:

$q_i = A_i/A_s$ la frazione del carattere posseduto dagli individui con $x \leq x_i$

Se l'ammontare del carattere fosse distribuito **equamente** si avrebbe che:

$$p_i = q_i$$

cioè tutti gli individui posseggono lo stesso ammontare di carattere

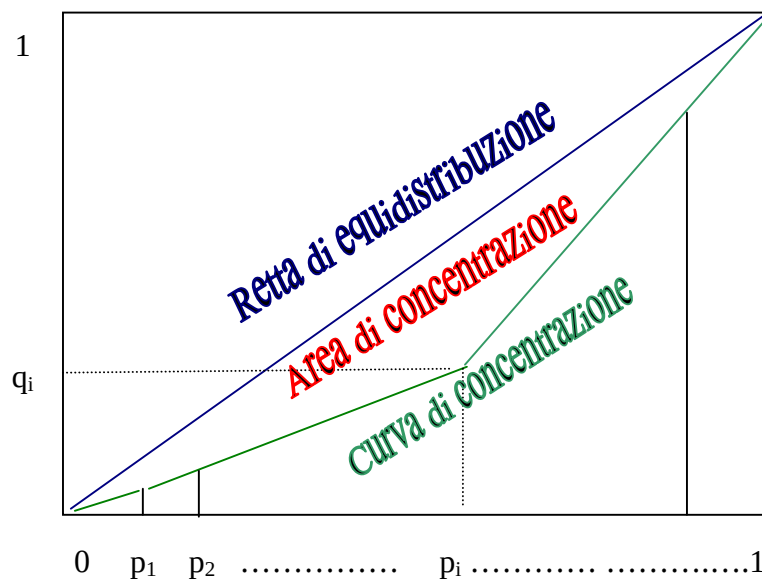
Se il carattere è posseduto da un solo individuo, **massima concentrazione**

$$\begin{array}{ll} p_i = q_i = 1 & \forall i=s \\ q_i = 0 & \forall i \neq s \end{array}$$

Altrimenti, essendo le modalità del fenomeno poste in ordine non decrescente:

$$p_i > q_i$$

GEOMETRICAMENTE



retta di equidistribuzione: $p_i = q_i$

curva di concentrazione o di Lorenz: $p_i > q_i$

area di concentrazione: area compresa tra la retta e la curva

la concentrazione massima si ha quando la curva di Lorenz coincide con i cateti del triangolo

la concentrazione nulla quando la curva di Lorenz coincide con la retta di equidistribuzione

n.b.

la curva di concentrazione è convessa verso l'alto perché ad incrementi costanti delle p_i corrispondono incrementi crescenti delle q_i

Misura dell'area di concentrazione

▣ SUCCESSIONE

➤ RAPPORTO DI CONCENTRAZIONE DEL GINI

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{s-1} (p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{s-1} p_i}$$

$$0 \leq R \leq 1$$

R=0 equidistribuzione

R=1 massima concentrazione

somma delle aree dei rettangoli di base $1/s$ e di altezza $p_i - q_i$

$$\frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s-1} p_i = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s-1} \frac{i}{s} = \frac{1}{s^2} \frac{s(s-1)}{2} = \frac{1}{s} \frac{(s-1)}{2} \cong \frac{1}{2}$$

valore approssimato dell'area di massima concentrazione

▣ DISTRIBUZIONE DI FREQUENZA

$$p_1 = n_1/N$$

$$p_2 = n_1 + n_2/N$$

$$p_i = n_1 + n_2 + \dots n_i/N$$

$$p_s = n_1 + n_2 + \dots n_s/N$$

$$A_1 = x_1 n_1$$

$$A_2 = x_1 n_1 + x_2 n_2$$

$$A_i = x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots x_i n_i$$

$$A_s = x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots x_s n_s$$

$$q_i = A_i / A_s$$

▣ DISTRIBUZIONE DI FREQUENZA IN CLASSI

L'area di concentrazione si determina congiungendo i punti noti della curva con dei segmenti rettilinei (spezzata di concentrazione) e sottraendo dall'area di massima concentrazione la somma delle aree dei trapezi corrispondenti alle diverse classi di intensità

altezza dei trapezi →

$$(p_i - p_{i-1})$$

base maggiore →

$$q_i$$

base minore →

$$q_{i-1}$$

$$R = \frac{1/2 - 1/2 \sum_{i=1}^s (p_i - p_{i-1})(q_i + q_{i-1})}{1/2} =$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^s (p_i - p_{i-1})(q_i + q_{i-1}) =$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^s \frac{n_i}{N} (q_i + q_{i-1})$$

Problemi

Data la seguente distribuzione dei laureati per corso di laurea (gruppo economico) Fonte Istat, '91-'92

<i>Corso di laurea</i>	<i>Laureati</i>
Economia e Commercio	10664
Scienze Economiche	15
Scienze Bancarie ed Assicurative	63
Scienze Economiche e Marittime	464
Scienze Statistiche e Demografiche	93
Scienze Statistiche ed Attuariali	140
Scienze Statistiche ed Economiche	65
Economia Aziendale	339
Economia Politica	1627
Scienze Economiche e Sociali	168
Discipline Economiche e Sociali	154
Commercio Internazionale e Mercati Valutari	67
Economia marittima dei trasporti	5
Economia Bancaria Fin. ed Assicurativa	0
Commercio internazionale e mercati valutari	37

Calcolare la concentrazione dei laureati per corso di laurea

i	x_i	p_i	$A_i = \sum x_i$	q_i	$p_i - q_i$
1	0	0,0667	0	0	0,0667
2	5	0,1333	5	0,0004	0,1329
3	15	0,2	20	0,0014	0,1986
4	37	0,2667	57	0,0041	0,2626
5	63	0,3333	120	0,0086	0,3247
6	65	0,4	185	0,0133	0,3867
7	67	0,4667	252	0,0182	0,4485
8	93	0,5333	345	0,0249	0,5084
9	140	0,6	485	0,0349	0,5651
10	154	0,6667	639	0,0460	0,6207
11	168	0,7333	807	0,0581	0,6752
12	339	0,8	1146	0,0826	0,7174
13	464	0,8667	1610	0,01160	0,7507
14	1627	0,9333	3237	0,2332	0,7001
15	10664	1	13881	1	0
Totale	13881	8			

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{14} (p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{14} p_i} = \frac{6,3583}{7} = 0,9083 = 90,83\%$$

Si consideri la seguente classificazione di 1000 individui secondo il reddito annuo dichiarato in milioni di lire:

Classi di reddito	Numero di dichiaranti
0-3	327
3-9	558
9-25	68
25-50	32
50-100	15
<i>Totale</i>	1000

In quale proporzione la distribuzione dei redditi nell'insieme considerato realizza quella ipotetica di massima concentrazione?

x_i	n_i	$x_i n_i$	N	$\sum x_i n_i$	p_i	q_i	$p_i - p_{i-1}$	$q_i + q_{i-1}$	$(p_i - p_{i-1})(q_i + q_{i-1})$
0,0	0	0	0	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1,5	327	491	327	491	0,327	0,067	0,327	0,067	0,02191
6,0	558	3348	885	3839	0,885	0,524	0,558	0,591	0,32978
17,0	68	1156	953	4995	0,953	0,682	0,068	1,206	0,08201
37,5	32	1200	985	6195	0,985	0,846	0,032	1,528	0,04890
75,0	15	1125	1000	7320	1,000	1,000	0,015	1,846	0,02769
Totale	1000	7320							0,51029

$$\begin{aligned}
 R &= 1 - \sum_{i=1}^s (p_i - p_{i-1})(q_i + q_{i-1}) = \\
 &= 1 - \sum_{i=1}^s (p_i - p_{i-1})(q_i + q_{i-1}) = \\
 &= 1 - 0,51029 = 0,48971
 \end{aligned}$$

Nella distribuzione considerata si verifica il **48,97%** della concentrazione massima possibile