



Archi, volte e cupole

Da

“L’arte del costruire
Tra conoscenza e scienza”
di Salvatore di Pasquale

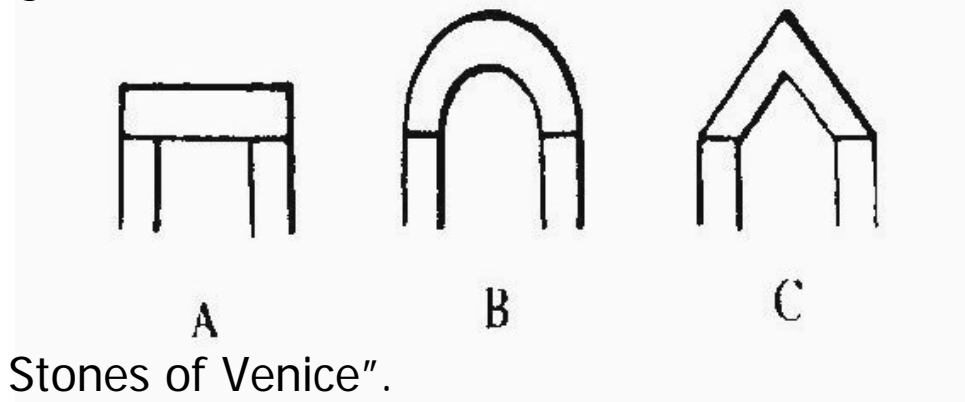
“La meccanica nell’architettura- La Statica”
di Antonino Giuffrè

“The stone skeleton”
di Jaques Heyman

“Le strutture in Architettura”
di Mario Salvadori e Robert Heller

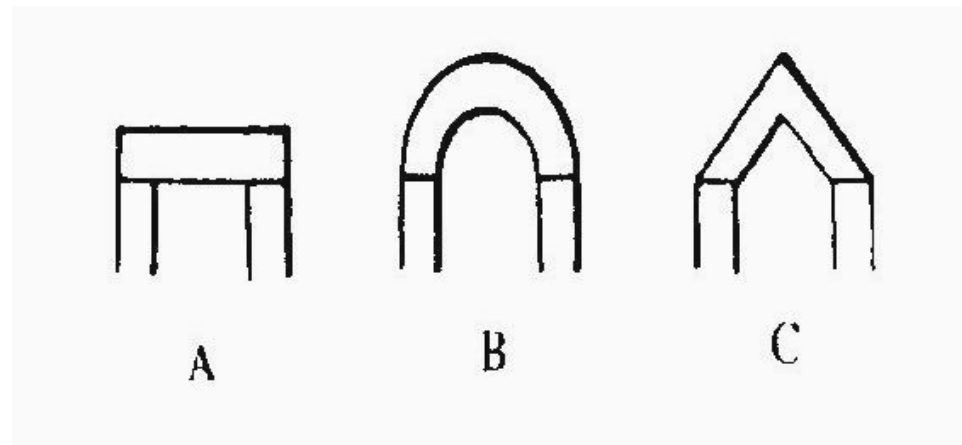
Aspetti base del comportamento strutturale

- I sistemi costruttivi:
 - Ora ci sono tre grandi architetture nel mondo, e non potrebbero essere di più, corrispondenti a ognuno dei tre sistemi fondamentali di coperture dello spazio ... che fanno capo ai tre ceppi originari:
 - a) greco: architettura della trave
 - b) romanico: architettura dell'arco a pieno centro
 - c) gotico: architettura del tetto inclinato [...]².



Aspetti base del comportamento strutturale

- I 3 sistemi derivano dalle tre possibilità di coprire un intervallo tra 2 appoggi:
 - Architrave
 - Arco a pieno centro
 - Arco acuto.



Le origini dell'arco

- Micene: nella Porta dei Leoni si rintracciano le origini dell'arco e della cupola.



Porta dei Leoni

- Questo sistema è una estensione del principio dell'architrave:
 - La portata di un unico architrave viene ridotta mediante una successione di elementi in aggetto l'uno sull'altro.

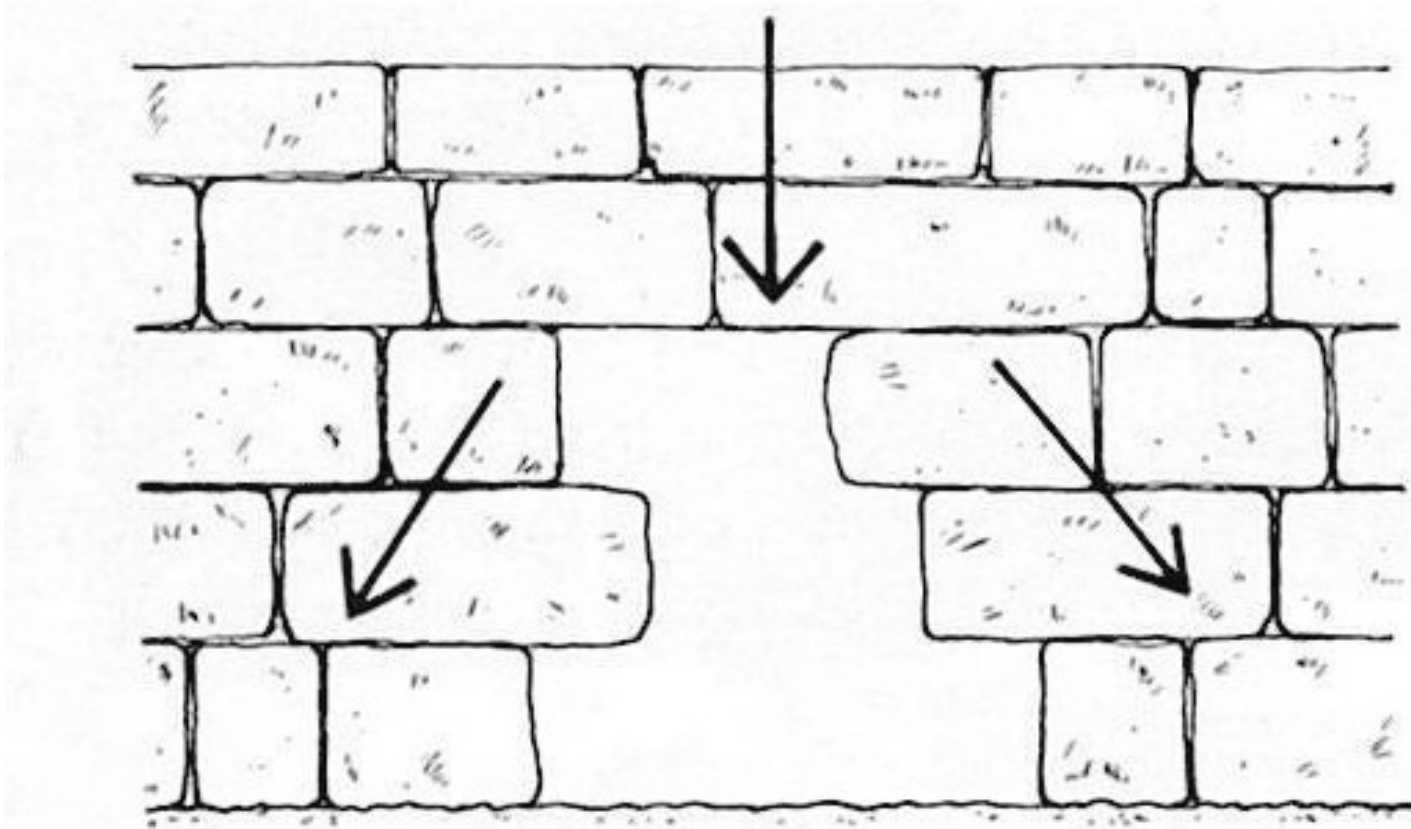
Le origini dell'arco

- La parte appoggiata deve essere sufficientemente caricata per evitare il ribaltamento del concio
- La parte in aggetto non deve produrre rottura per flessione.



L'arco naturale

- Questa forma può verificarsi anche naturalmente.



L'arco naturale



Rottura ad arco naturale al di sopra di un architrave

Le origini dell'arco

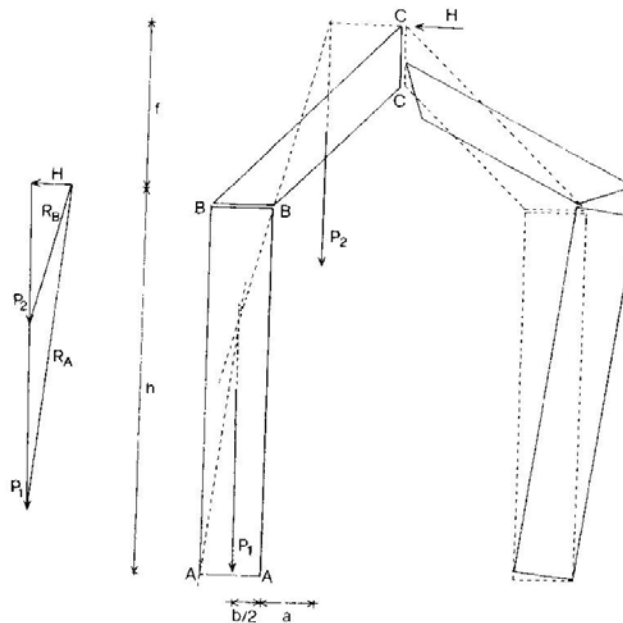
- La struttura spingente semplice: le tombe di Populonia



- In queste tombe si trova la struttura spingente più elementare che si può ottenere con il numero minimo di elementi distinti e disarticolabili

La struttura spingente semplice

- Meccanismo di rottura:
 - Rotazione intorno ai punti A, B, C
 - I blocchi possono ruotare l'uno rispetto all'altro senza scivolare



La struttura spingente semplice



- Equilibrio alla rotazione dei blocchi:
 - Equilibrio al punto A:
 - Momento ribaltante: $M_R = H \times (f + h)$
 - Momento stabilizzante:
$$M_S = P_2 \times (a + b) + P_1 \times b/2$$
 - Equilibrio: $H \times (f + h) = P_2 \times (a + b) + P_1 \times b/2$

La struttura spingente semplice



- Equilibrio alla rotazione dei blocchi:
 - Equilibrio al punto A:
 - **Equilibrio Stabile:**
 - $H \times (f + h) < P_2 \times (a + b) + P_1 \times b/2$
 - **Equilibrio Instabile:**
 - $H \times (f + h) > P_2 \times (a + b) + P_1 \times b/2 \Rightarrow$ Rotazione

L'arco

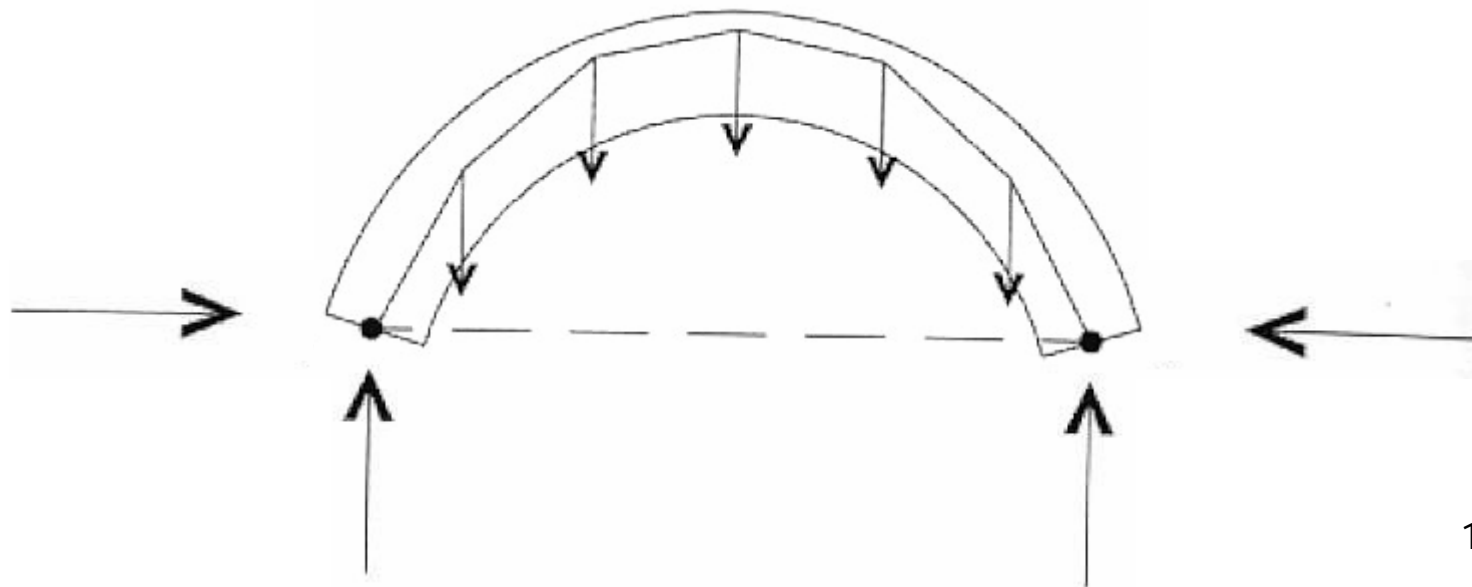
Aspetti base del comportamento strutturale

- L'arco è un elemento strutturale in grado di incanalare, con la sua **traiettoria curvilinea**, le sollecitazioni prodotte dai carichi trasformandole in **forze prevalenti di compressione**.

Curva di pressione o
"funicolare"

Reazione
verticale

Reazione
orizzontale



L'arco

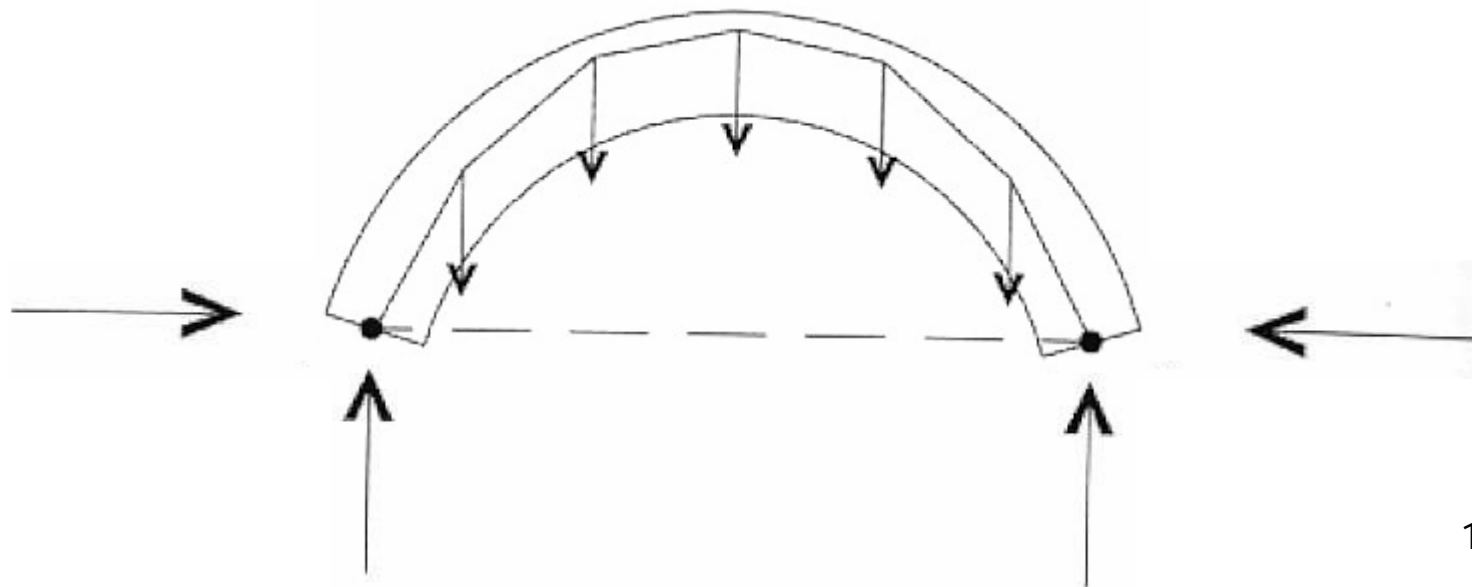
Aspetti base del comportamento strutturale

- La sollecitazione di compressione rappresenta praticamente l'unica sollecitazione cui la pietra e la muratura sono in grado di resistere.

Curva di pressione o
"funicolare"

Reazione
verticale

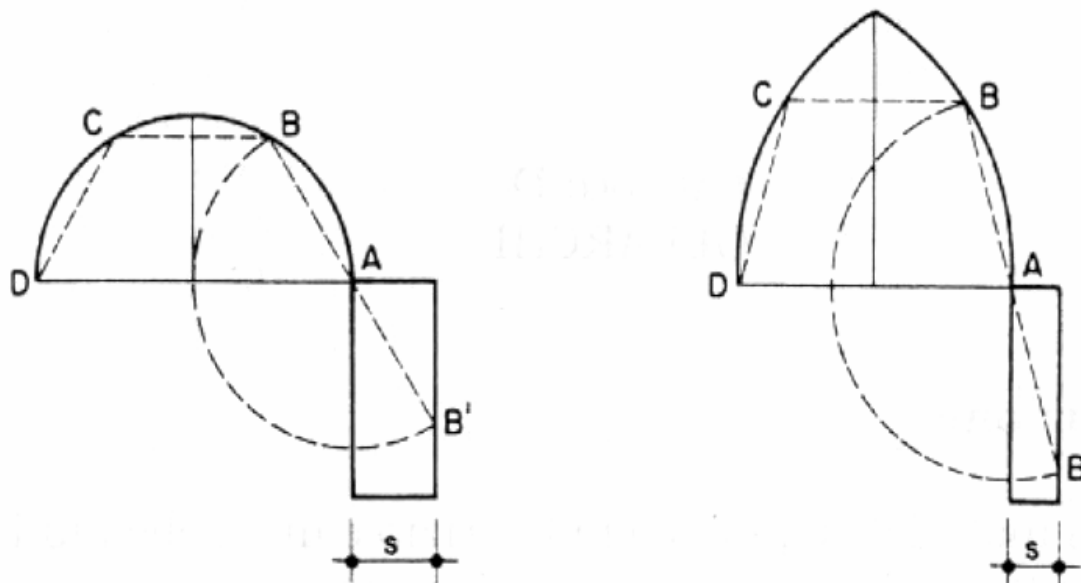
Reazione
orizzontale



Gli studi sull'arco

Il Medioevo

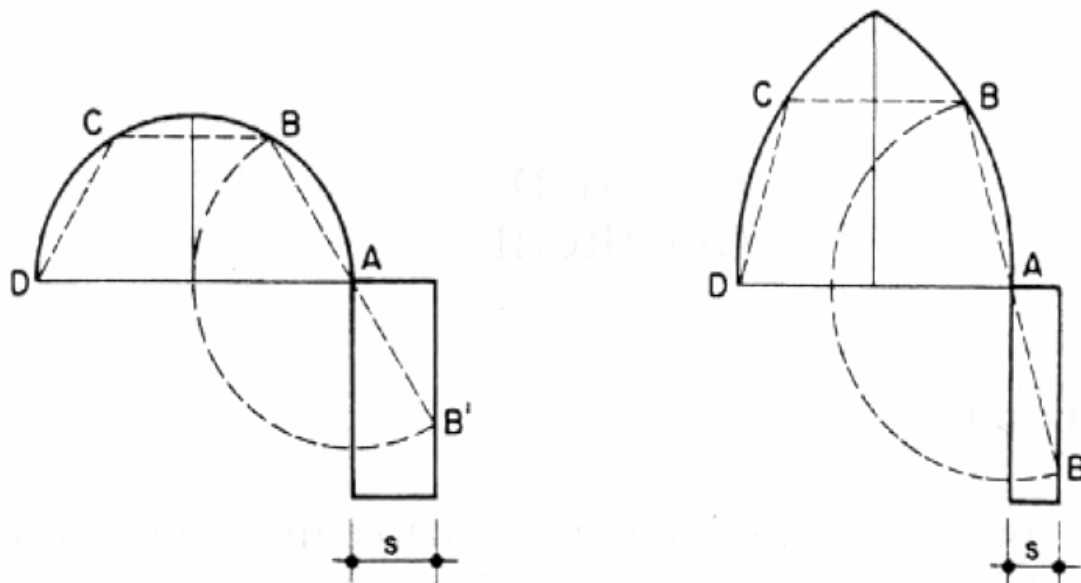
- Regola geometrica per il dimensionamento dei piedritti:
 - si suddivide l'arco in tre porzioni di uguale lunghezza



Gli studi sull'arco

Il Medioevo

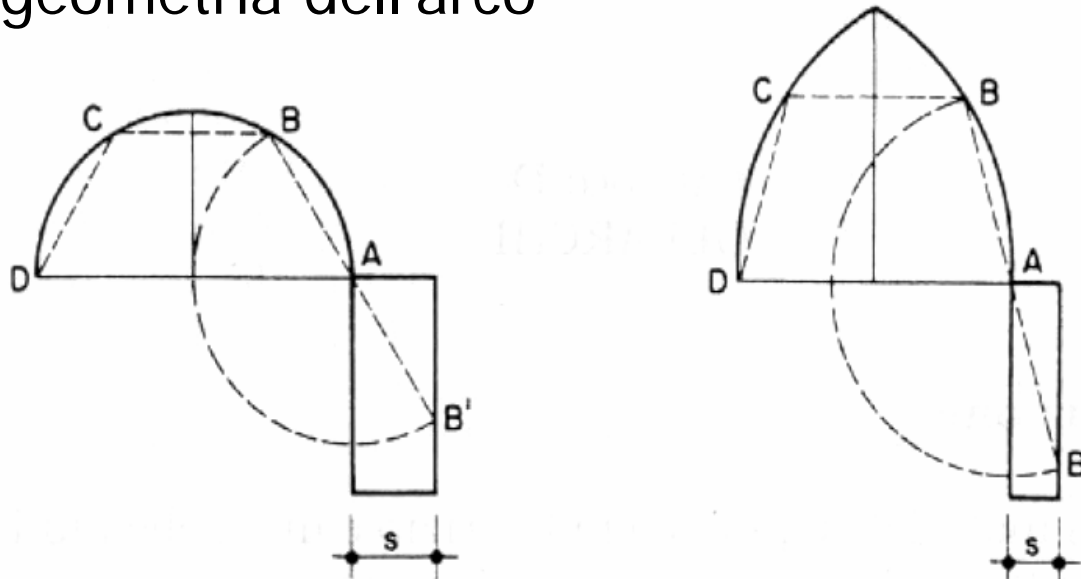
- Regola geometrica per il dimensionamento dei piedritti:
 - si traccia la semicirconferenza di raggio pari a tale lunghezza e centro all'imposta dell'arco



Gli studi sull'arco

Il Medioevo

- Regola geometrica per il dimensionamento dei piedritti:
 - questa regola impone un diverso dimensionamento dei piedritti al variare della geometria dell'arco



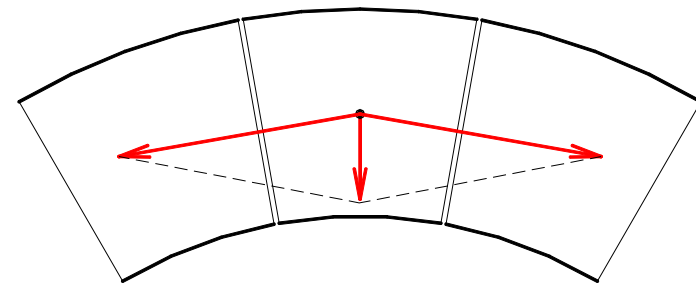
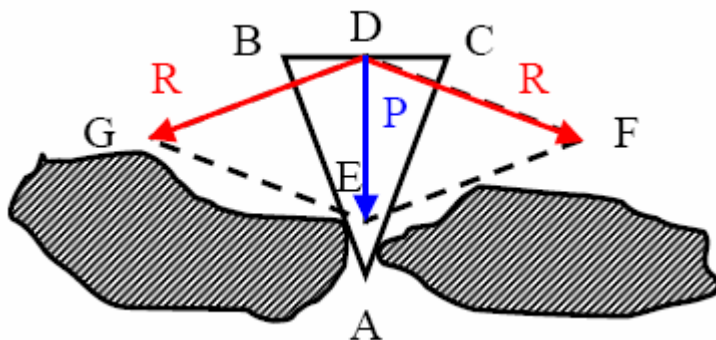


Leon Battista Alberti

- La spiegazione dell'Alberti sul funzionamento degli archi a tutto sesto è la prima a comparire nella trattatistica architettonica:
 - *“... non si vede in che modo esso (arco) possa sconnettersi per conto proprio; salvoché l'un concio spinga fuori l'altro;*
 - *quand'anche fossero disposti a tentare di scalzarsi a vicenda, la presenza stessa dei pesi ... basta ad impedirlo*
 - *il concio posto in cima ... non si vede come possa trovare la forza di spingere in fuori i conci che lo fiancheggiano;*
 - *... quelli che fanno seguito ad essi, occupando i fianchi dell'arco, verranno tenuti agevolmente ... dall'equilibrarsi dei pesi;*
 - *infine, i conci posti alle due estremità inferiori, non si comprende come possano spostarsi una volta che gli altri, posti sopra di essi, restino fermi al loro posto*
 - *Pertanto gli archi interi non abbisognano di corda poiché essi sono in grado di mantenersi da se.*

Leon Battista Alberti

- Dalla forma dell'arco e dei conci di cui è composto nasce l'idea della loro somiglianza al cuneo (una delle macchine semplici studiate da Aristotele ed Erone)
- Parti di cunei con le facce rivolte verso il centro dell'arco ed individuate da piani perpendicolari alle superfici di intradosso e di estradosso





Leon Battista Alberti

- L'azione che ciascun concio (cuneo) esercita su quelli adiacenti si manifesta, per l'Alberti, con l'allontanamento delle parti
- L'azione esercitata dai conci d'imposta è contrastata dai sostegni
- Per questo, per l'Alberti, gli archi "*interi*" non necessitano di catene



Leon Battista Alberti

- L'idea del cuneo sarà sviluppata in seguito (De la Hire, De Belidor) con un linguaggio appropriato alla descrizione del comportamento meccanico
- Senza questi strumenti le cause sono solo intuitive
- E' la conoscenza degli effetti che genera l'apparato di regole cui deve sottostare chi costruisce

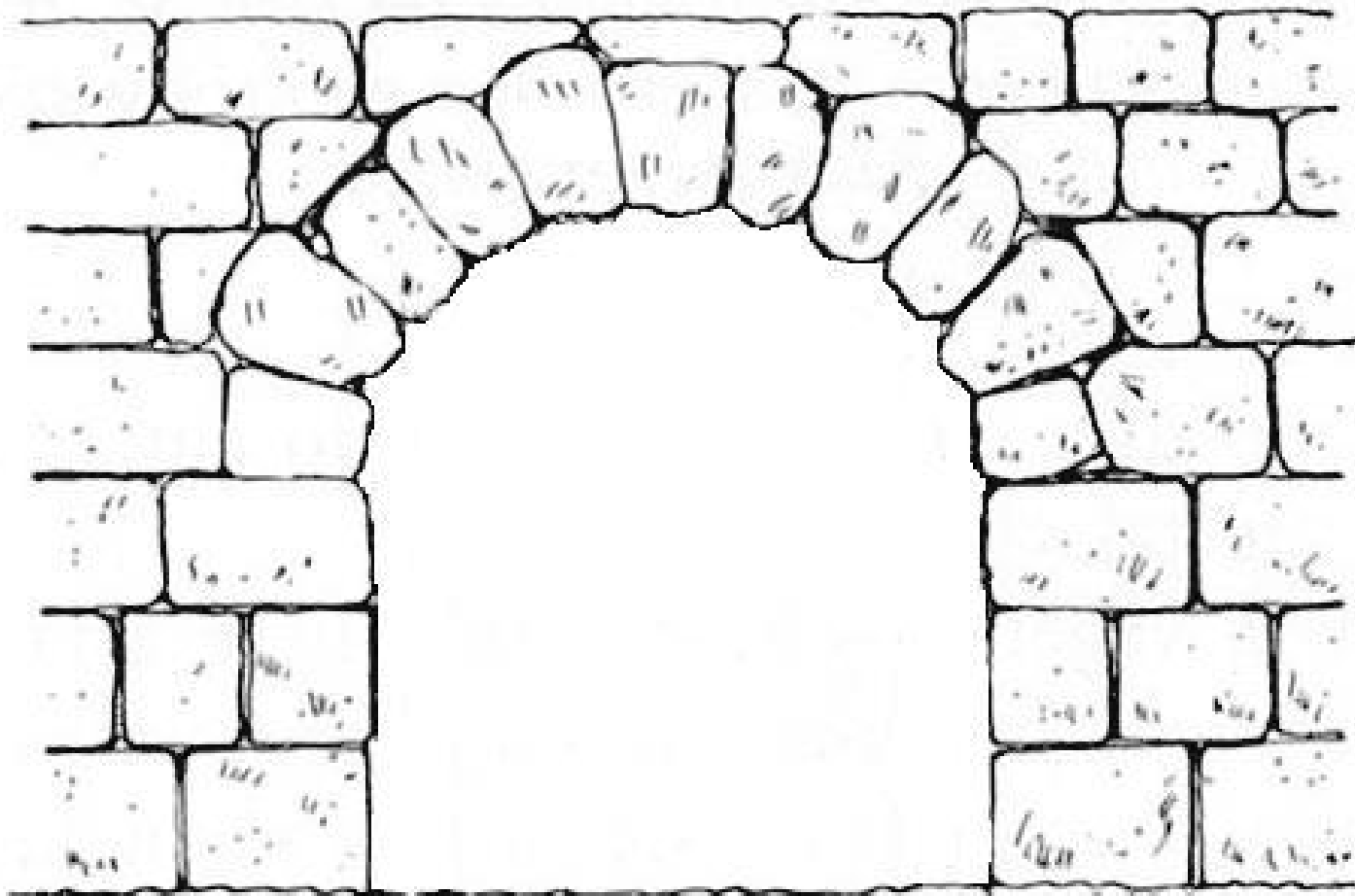


Leonardo da Vinci

- *"Arco non è altro che una fortezza causata da due debolezze imperoché l'arco negli edifiti è composto di due quarti di circolo, i quali quarti circuli ciascuno debolissimo per sé desidera cadere e oponendosi alla ruina l'uno dell'altro, le due debolezze si convertono in un'unica fortezza"*

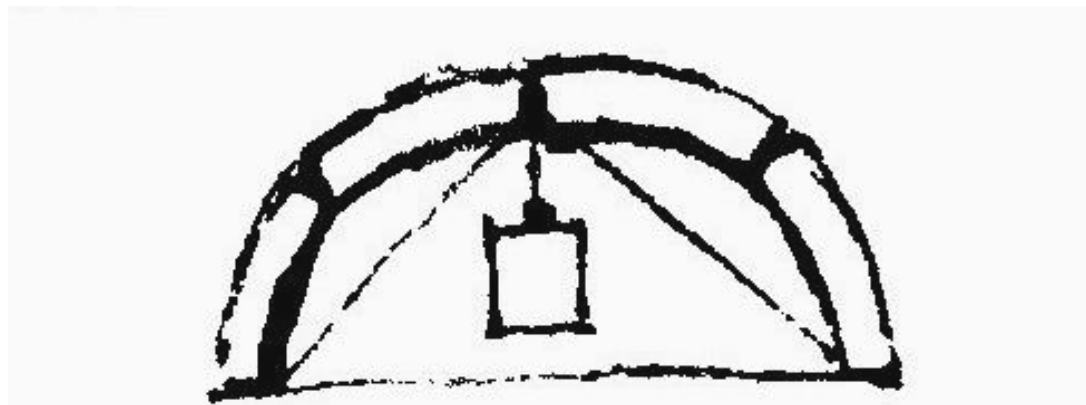


Leonardo da Vinci



Leonardo da Vinci

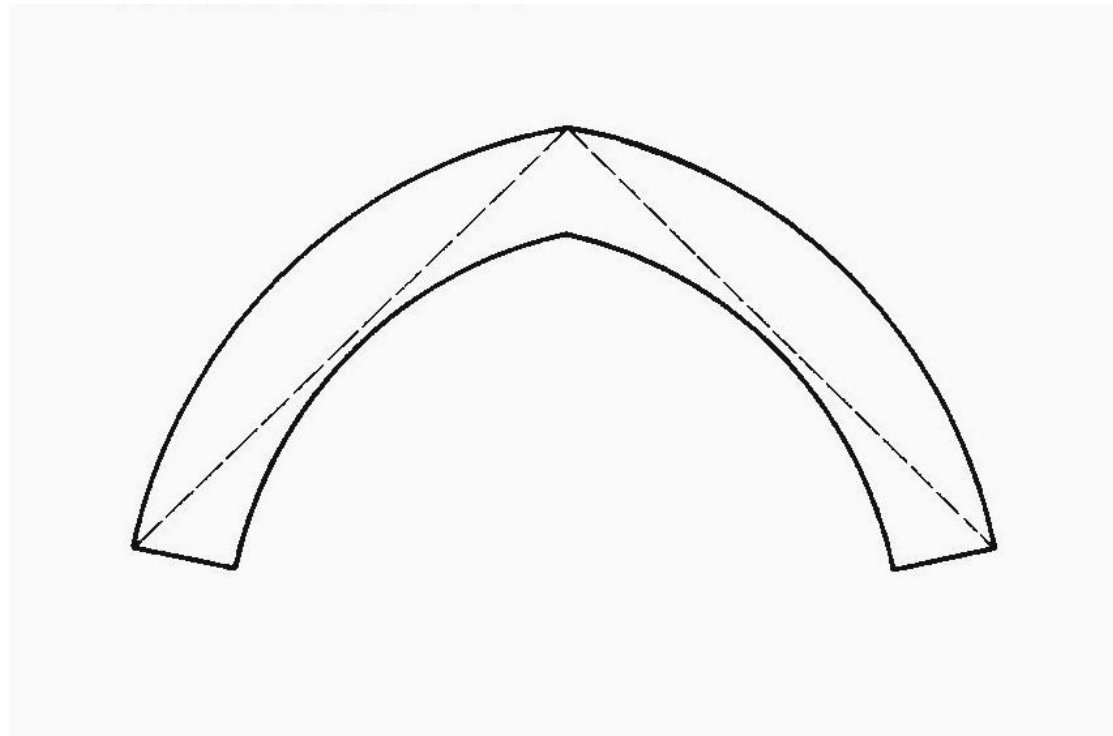
- Studia le fratture ed i meccanismi che si generano in un arco sottoposto a determinate condizioni di carico:
 - Arco a tutto sesto caricato in chiave



- Se l'arco è intero (fatto di un solo pezzo) si romperà solo quando sarà raggiunta la resistenza del materiale
- Allora si avrà la formazione di fratture e la trasformazione della struttura in meccanismo

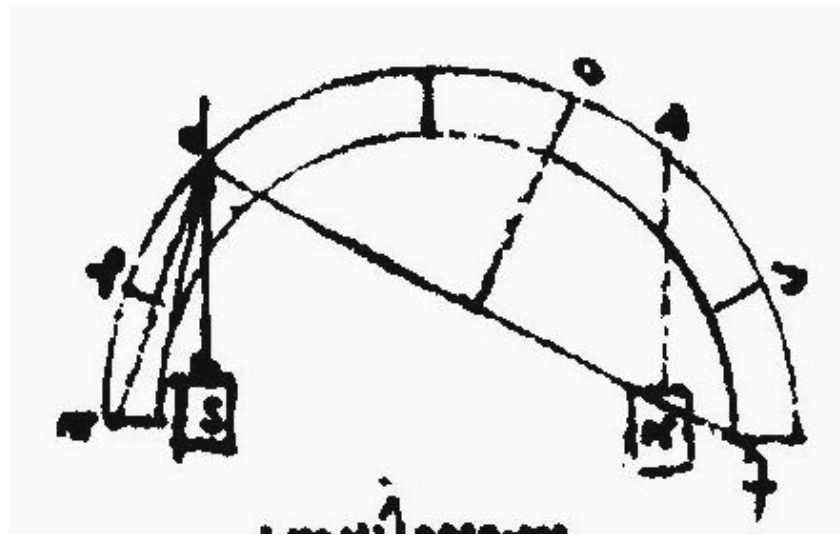
Leonardo da Vinci

- *“l'arco non si romperà, se la corda dell'archi di fori non toccherà l'arco di dentro”*



Leonardo da Vinci

- Arco a tutto sesto soggetto al peso proprio e a un carico concentrato in una delle reni



- Sequenza della formazione delle cerniere:
 - Cerniera in o
 - Cerniera in d



Metafore, analogie e modelli

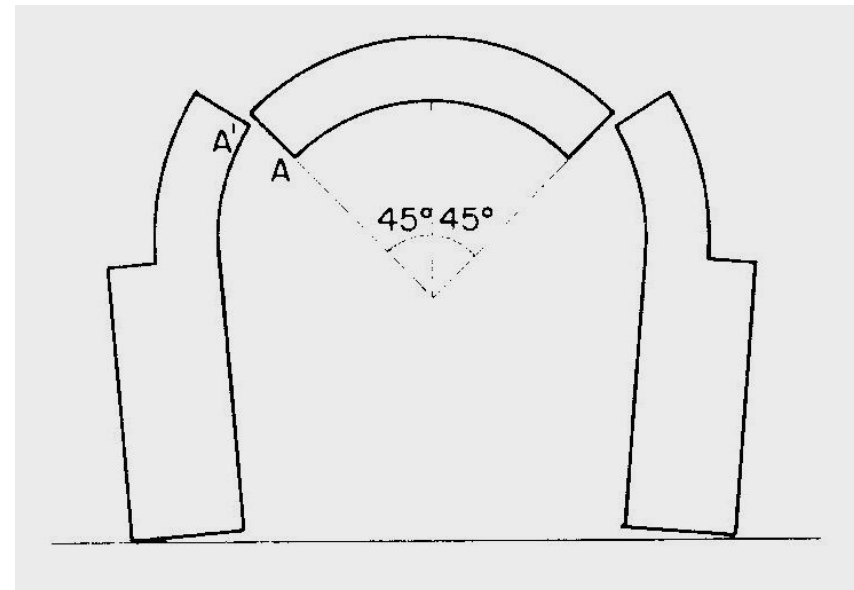
- In nessuno dei trattati scritti fino alla fine del XVII secolo il problema può essere descritto in termini matematici come era stato fatto per le macchine semplici
- Nessuno fino ad allora era riuscito ad individuare nella rottura di un arco il meccanismo delle leve che si creava e di tradurre tutto in equazioni
- Il meccanismo di rottura che si innesca in un arco al momento del suo crollo richiede per essere descritto la definizione del momento di una forza
- A questa definizione si giunge solo dopo la metà del XVII secolo
- Il principio di simmetria introdotto da Archimede per dimostrare la legge della leva non può essere utilizzato in quanto in gioco entrano anche le forze orizzontali.

De La Hire

La teoria del cuneo

- Il problema della statica degli archi compare per la prima volta nel "Traité de la mécanique" di Philippe De La Hire (1640-1718)
- De la Hire studia l'equilibrio dell'arco nella situazione di rottura descrivendo prima il meccanismo di collasso:

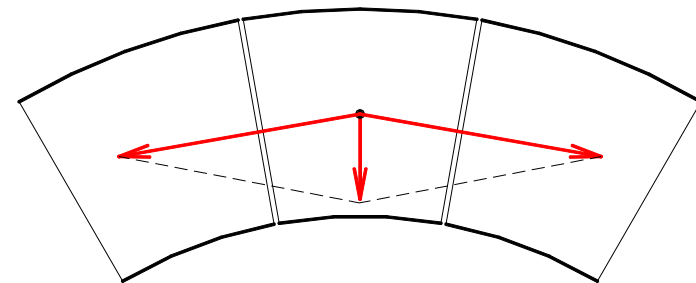
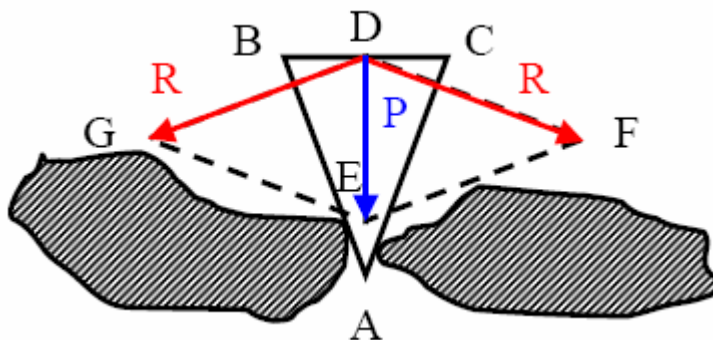
La parte centrale dell'arco compresa tra due raggi a 45° rimane integra e scivola verso il basso esercitando un'azione di cuneo sulle parti restanti dell'arco spingendole in fuori promuovendone il ribaltamento senza scorrimento



De La Hire

La teoria del cuneo

- De la Hire individua nell'arco l'azione di una macchina semplice: il *cuneo*.
- Il funzionamento dell'arco è interpretato come la risultante dell'azione mutua di corpi rigidi infinitamente resistenti (i conci dell'arco) supposti agire come cunei posti uno sull'altro e mantenuti in equilibrio per azione mutua del proprio peso e delle azioni reciproche scambiate con i conci limitrofi.



De La Hire

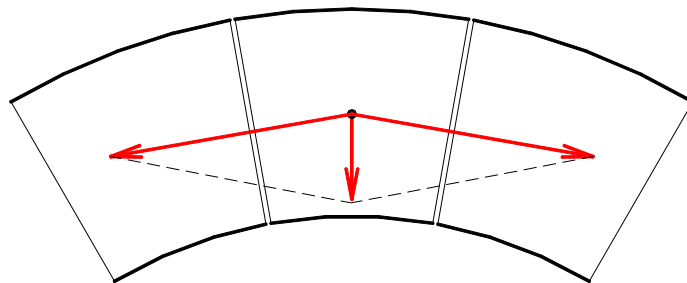
La teoria del cuneo

- L'ipotesi fondamentale che caratterizza
- L'interazione in De la Hire è l'assenza di attrito tra i conci, assunzione nella quale è individuabile il limite della sua interpretazione statica.

De La Hire

La teoria del cuneo

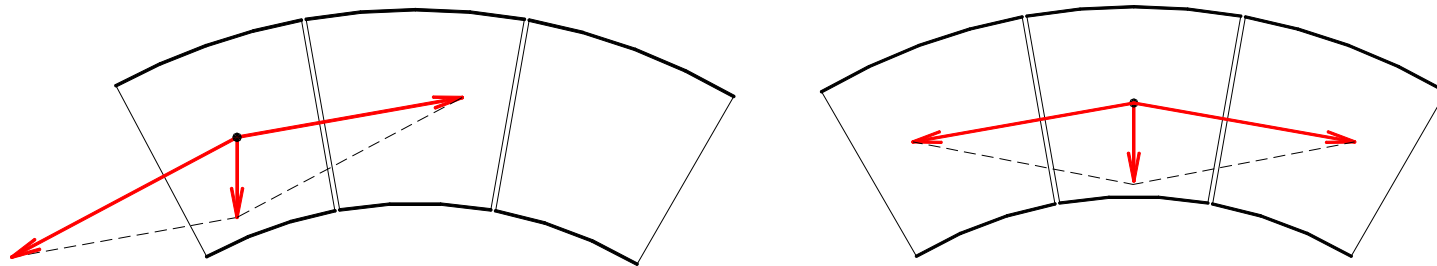
- De La Hire affronta il problema dell'equilibrio dell'arco
- Partendo dal concio in chiave, la cui dimensione è stabilita:
 - Impone l'equilibrio di ogni concio applicando nel baricentro le due forze trasmesse dai conci limitrofi e normali ai giunti e la forza peso.



De La Hire

La teoria del cuneo

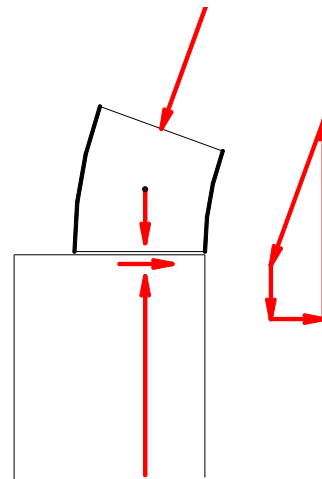
- Lo spessore dei rimanenti conci è l'incognita del problema
- Viene determinata concio per concio imponendo l'equilibrio



De La Hire

La teoria del cuneo

- Se l'imposta dell'arco è orizzontale, l'equilibrio del concio di imposta non è possibile
- In esso l'azione verticale della forza peso e della reazione all'imposta non possono equilibrare la forza scambiata con il concio che su di esso si appoggia
- De la Hire deve quindi ammettere che nella realtà il concio all'imposta può essere equilibrato solo dall'azione delle forze di attrito.





De La Hire

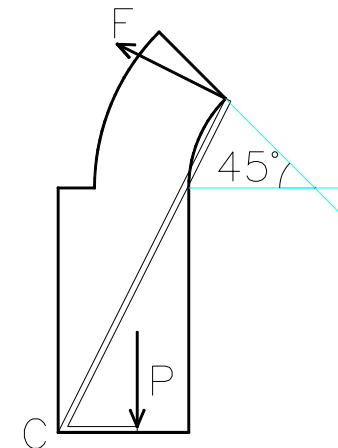
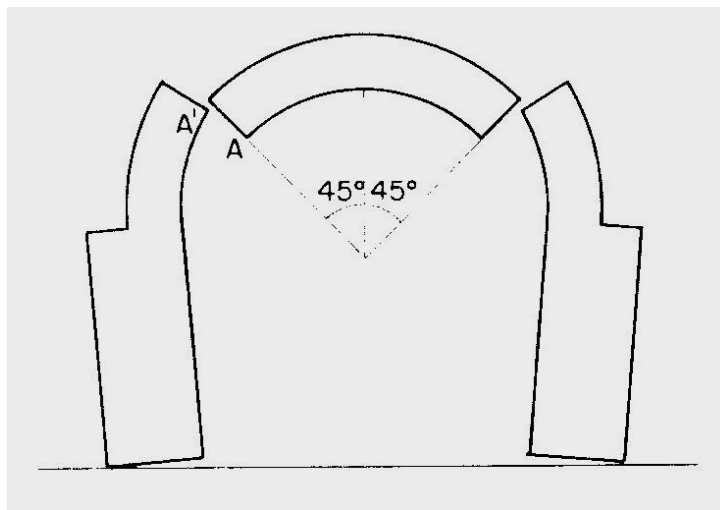
Il dimensionamento del piedritto

- Lo schema strutturale di De La Hire contiene le ipotesi meccaniche di comportamento alle quali applica l'algoritmo di calcolo
- Il modello meccanico che egli utilizza è strettamente condizionato dagli strumenti di calcolo che De La Hire ha a disposizione
- Egli tratta il problema dell'equilibrio dell'arco mediante la legge della leva

De La Hire

Il dimensionamento del piedritto

- L'ipotesi è che la parte centrale dell'arco si comporti come un cuneo tra superfici lisce
- Una superficie priva di attrito costituisce un vincolo in grado di esercitare solo reazioni ad essa ortogonali
- Il piedritto tende a ruotare intorno allo spigolo esterno alla base (punto C in figura).

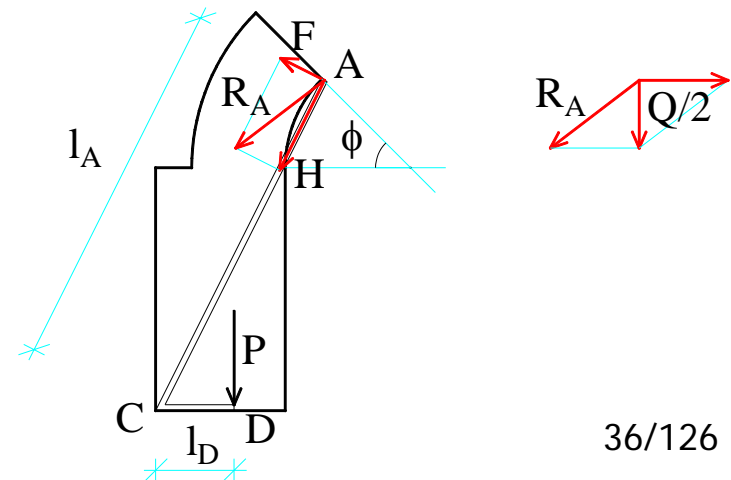


De La Hire

Il dimensionamento del piedritto

- Nella rotazione intorno a C il punto A si porta in A'
- Il peso Q del cuneo centrale viene scomposto nelle due componenti R_A ed R_Z ortogonali alle due superfici di rottura
- De La Hire individua la leva ACD e scompone la forza R_A esercitata dal cuneo centrale nelle componenti F ed H applicate al braccio della leva AC .

De la Hire inaugura l'approccio che individua nel comportamento della muratura l'azione reciproca di corpi rigidi.

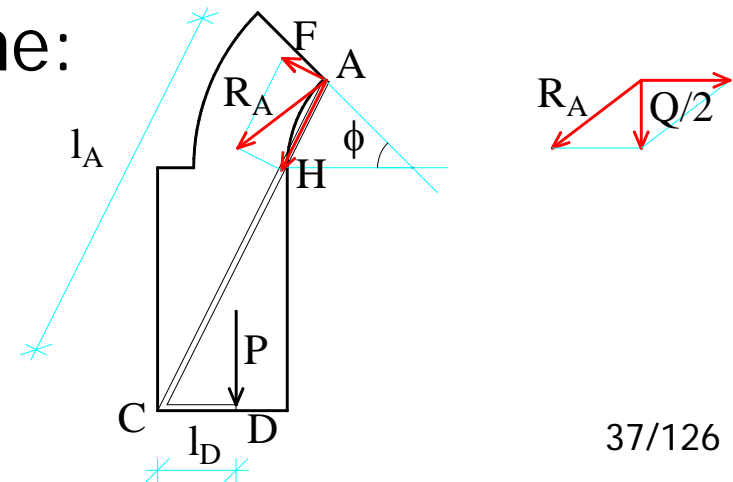


De La Hire

Il dimensionamento del piedritto

- Per l'equilibrio della leva il momento ribaltante $F \cdot l_A$ deve essere uguale al momento stabilizzante $P \cdot l_D$ (essendo P il peso del piedritto e della parte di arco ad esso aderente)
- Il peso del piedritto necessario per l'equilibrio è fornito dalla espressione:

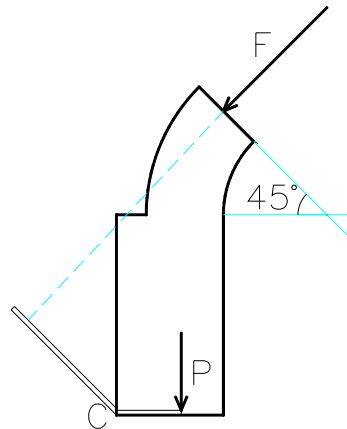
$$P = F \frac{l_A}{l_D}$$



De Belidor

Il dimensionamento del piedritto

- Qualche anno dopo De Belidor ripropose gli studi di De La Hire
- Egli suppose che la reazione dell'arco fosse applicata a metà spessore anziché all'intradosso

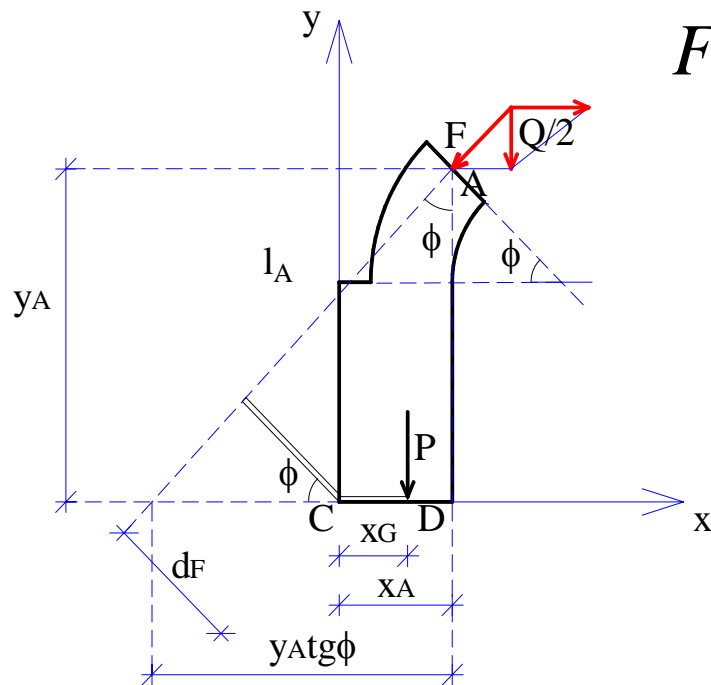


De Belidor

La teoria del cuneo

- La reazione che il cuneo centrale esercita sulla sezione di scorrimento è fornita dalla relazione:

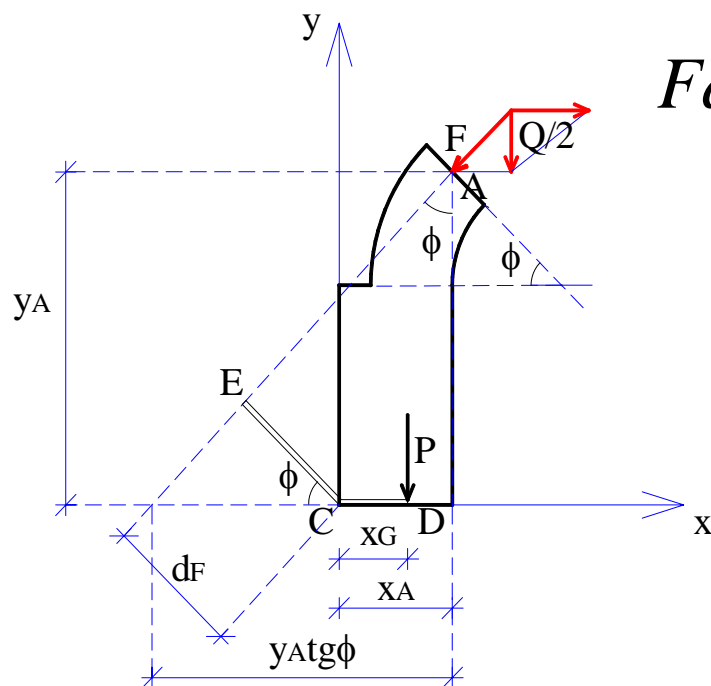
$$F = \frac{Q}{2} \frac{1}{\cos \phi}$$



De Belidor

La teoria del cuneo

- Egli considera la leva angolare ECD :
 - Braccio della forza F : $dF = (y_A \operatorname{tg} \phi - x_A) \cos \phi$
 - Condizione di uguaglianza dei momenti rispetto a C :



$$Fd_F = Px_G \rightarrow P = \frac{Q}{2} \frac{(y_A \operatorname{tg} \phi - x_A)}{x_G}$$



Couplet

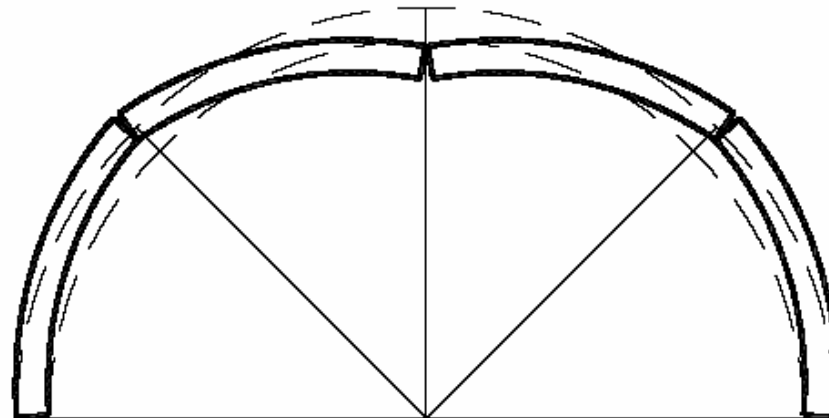
Il collasso flessionale

- *Nel "Seconde partie de l'examen de la poussee des voutes" del 1730, ammette l'importanza fondamentale dell'azione dell'attrito tra i conci che impedisce l'attivazione di scorrimenti relativi*
- Affronta il problema dello spessore minimo di un arco a tutto sesto caricato con il solo peso proprio

Couplet

Il collasso flessionale

- La soluzione è ottenuta da Couplet ipotizzando un meccanismo di collasso a cinque cerniere, collocate all'estradosso in chiave e all'imposta e all'intradosso in posizione rialzata a 45° rispetto all'orizzontale



Coulomb

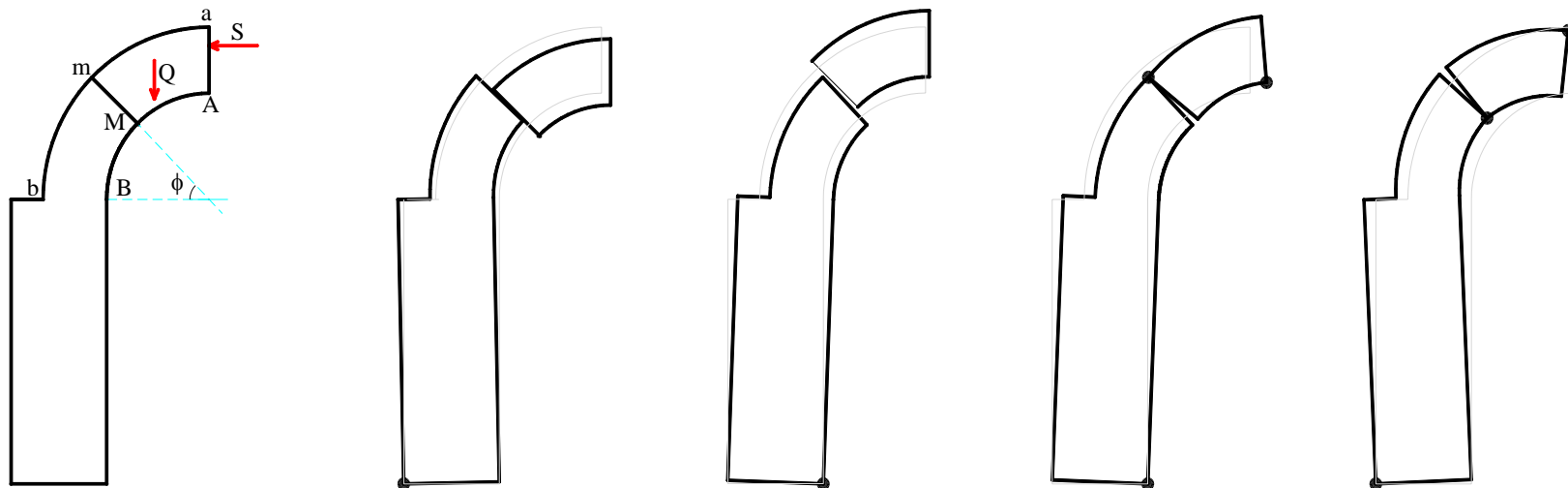
Il principio dei Massimi e Minimi

- Charles Coulomb nel "*Essai sur une application de maximis et minimis a quelques problemes de statique, relatifs a l'Architecture*" del 1773, affronta il problema dell'equilibrio delle volte in presenza di coesione ed attrito tra i conci
- Per la prima volta l'obiettivo è la determinazione delle sollecitazioni che insorgono in una volta di assegnate dimensioni e figura
- Il problema fondamentale che Coulomb si pone è questo:
 - *In una volta per la quale siano assegnate la curva interna AB e la curva esterna ab, sono dati anche i giunti Mm perpendicolari agli elementi della curva interna; si richiedono i limiti della forza orizzontale S che sostiene questa volta, supponendo che essa sia sollecitata dal proprio peso, e sia trattenuta dalla coesione e dall'attrito*

Coulomb

Il principio dei Massimi e Minimi

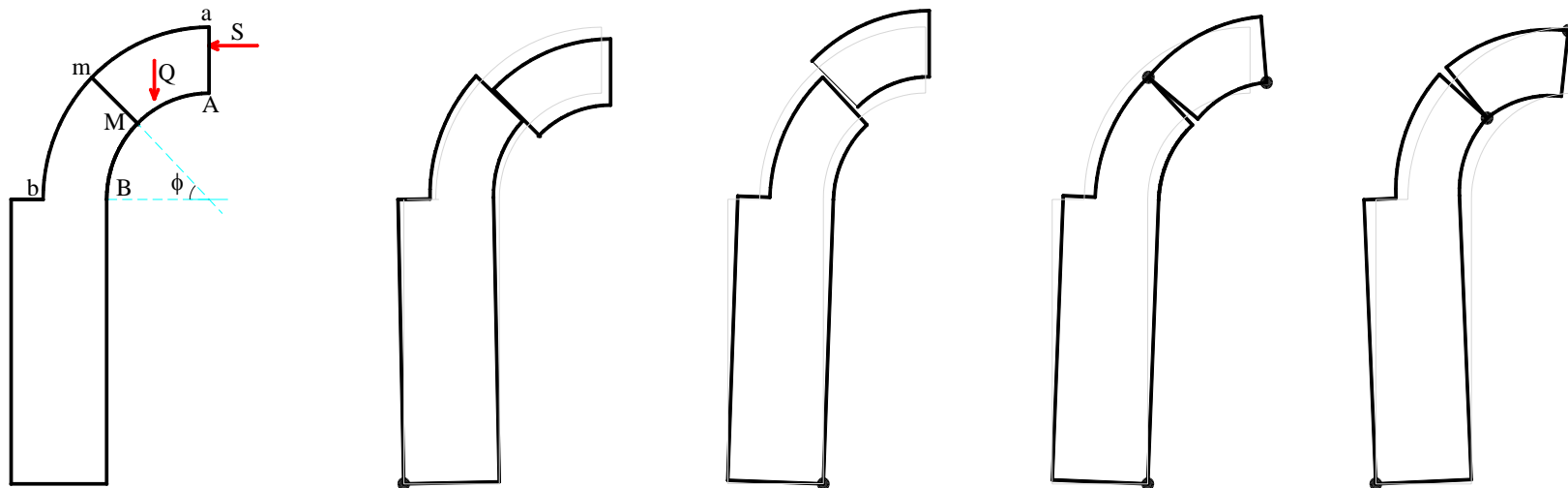
- Coulomb considera una porzione di arco compresa tra la sezione in chiave e un generico giunto assunto come critico.
- Individua quattro modalità di collasso:
 - lo scorrimento relativo tra le facce nelle due direzioni
 - l'apertura del giunto per rotazione all'intradosso e all'estradosso



Coulomb

Il principio dei Massimi e Minimi

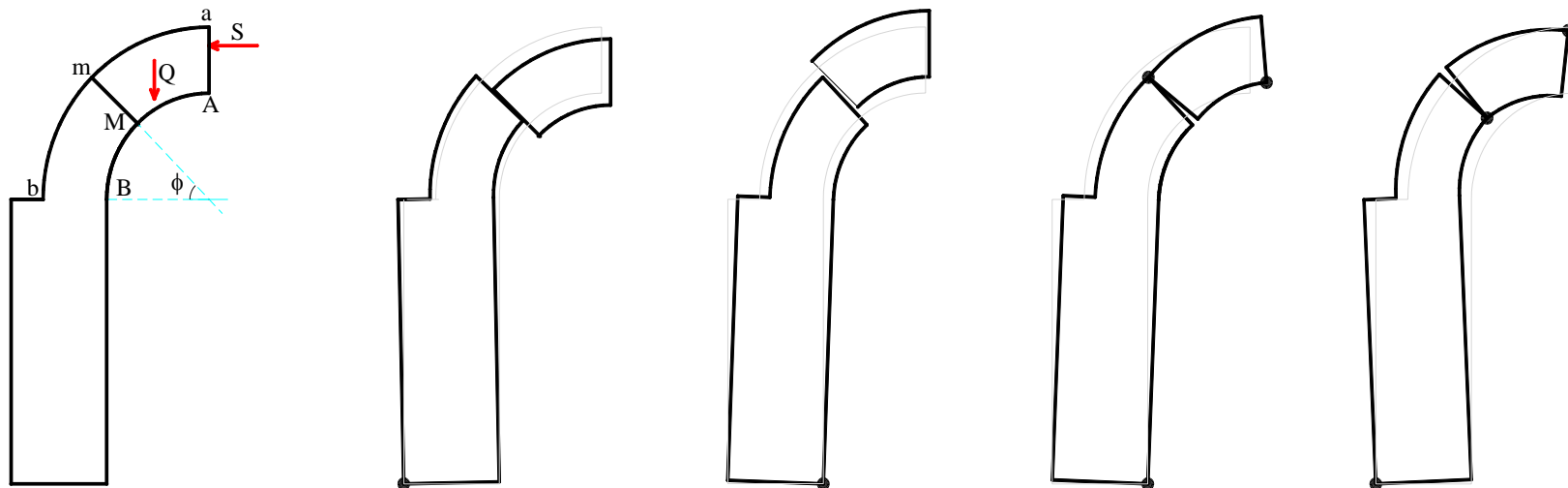
- Impone l'equilibrio limite di scorrimento nelle due direzioni, ottenendo un valore minimo ed uno massimo della risultante S agente sulla sezione in chiave.
- Analogo procedimento è utilizzato imponendo l'equilibrio limite alla rotazione nelle due direzioni.



Coulomb

Il principio dei Massimi e Minimi

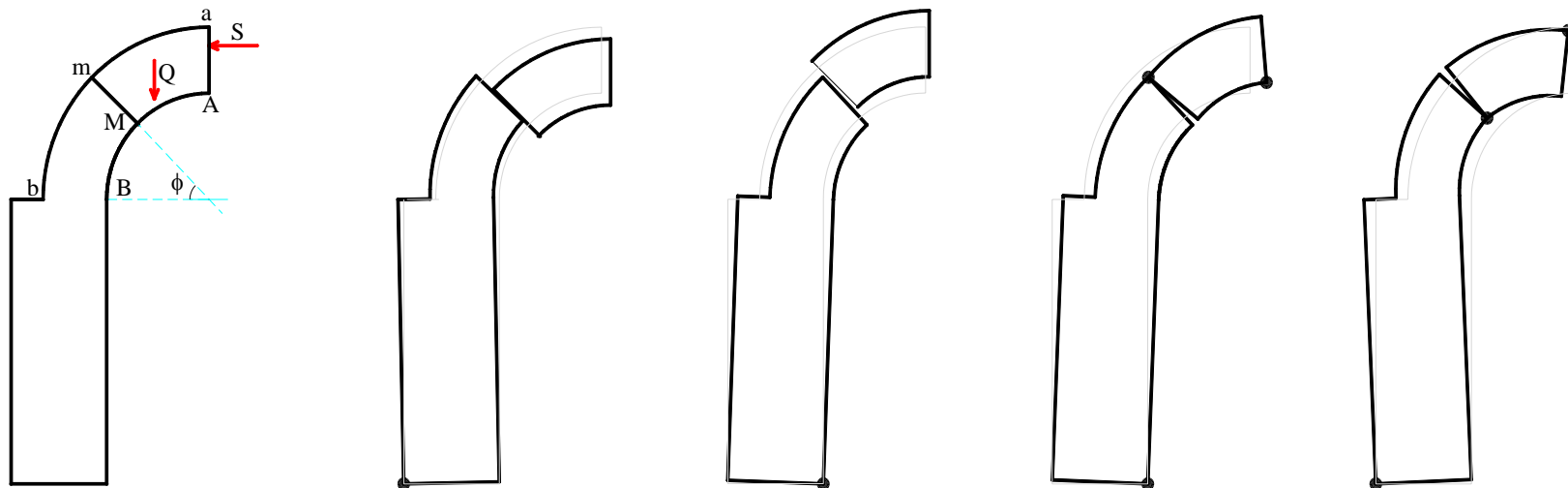
- La massima reazione di attrito è assunta proporzionale all'azione normale sul giunto attraverso un opportuno coefficiente
- I valori massimi e minimi di S vengono ricercati al variare della posizione φ del giunto critico sull'arco
- Il risultato finale fornisce un limite inferiore ed uno superiore di S entro i quali l'equilibrio della volta è garantito



Coulomb

Il principio dei Massimi e Minimi

- Coulomb scopre e accetta l'indeterminatezza del problema dimostrando che in un certo intervallo ammissibile tutte le soluzioni sono ugualmente accettabili.

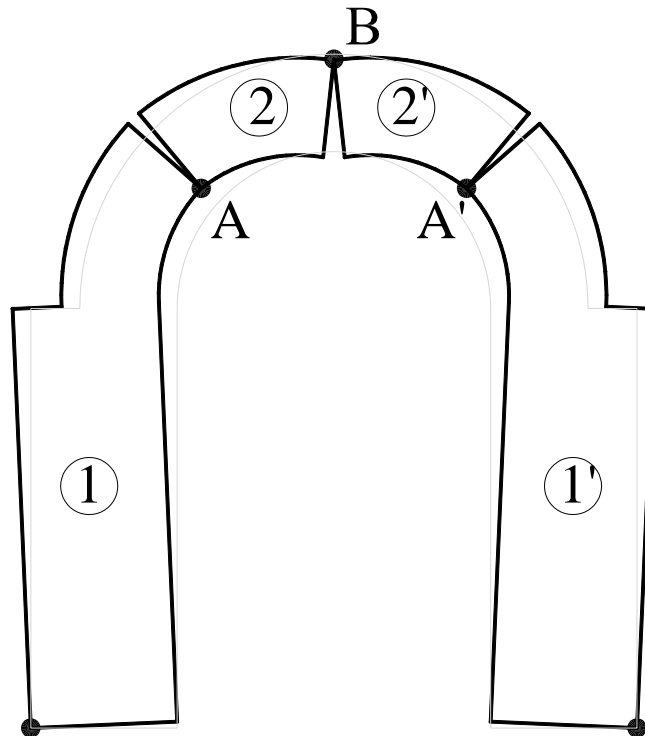


Il calcolo a rottura di Mascheroni

- Mascheroni idealizza i meccanismi di rottura dell'arco individuati da De la Hire e da Coulomb a sistemi di aste rigide e ne determina le condizioni limite di equilibrio
- Egli propone lo studio di due dei possibili meccanismi di rottura dell'arco:
 - Rottura per scivolamento del cuneo centrale con punto di rotazione posto all'intradosso dell'arco (De La Hire)
 - Rottura multipla con formazione di cerniere all'intradosso ed alle reni

Il calcolo a rottura di Mascheroni

- Nella condizione di rottura si può vedere l'arco come sistema articolato di corpi rigidi vincolati a cerniera internamente e con l'esterno

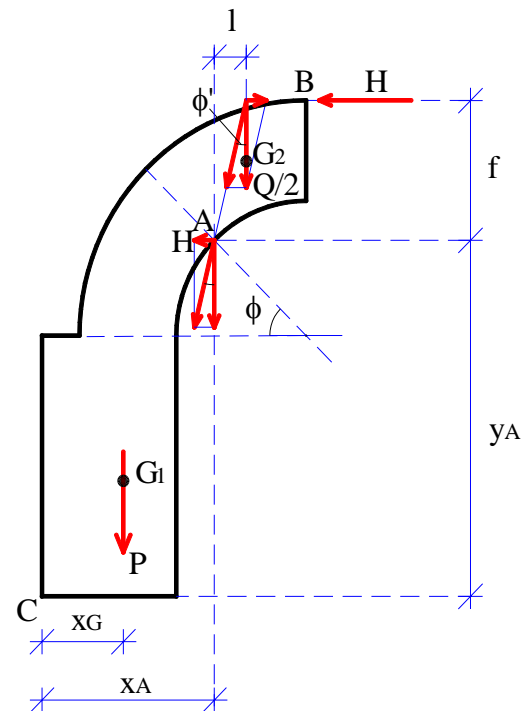


Il calcolo a rottura di Mascheroni

- Il sistema è labile:
 - Numero dei gdl: 4 corpi x 3 g.d.l = 12
 - Numero dei vincoli: 2 gdl vincolati x 5 cerniere = 10
- Possono esistere condizioni di carico che rispettano l'equilibrio

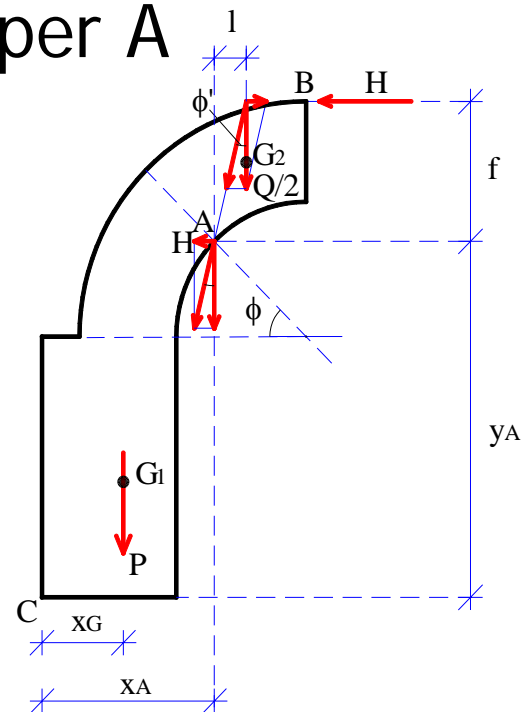
Il calcolo a rottura di Mascheroni

- Si analizza metà arco
- Per la simmetria del sistema la reazione offerta dalla cerniera in B non può che essere orizzontale



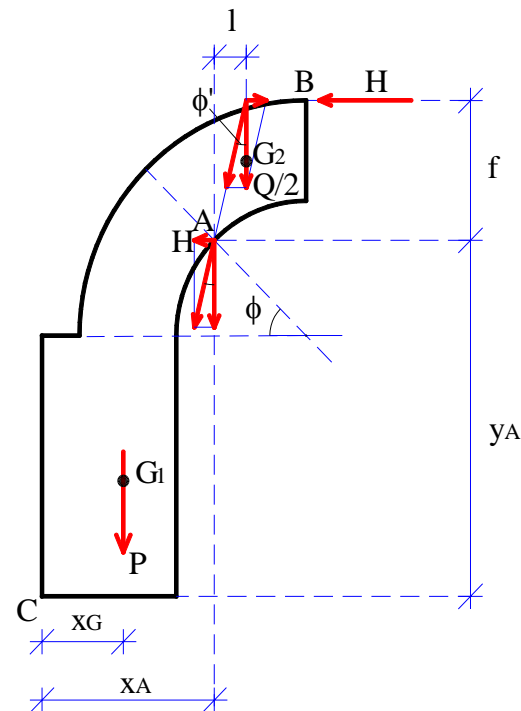
Il calcolo a rottura di Mascheroni

- Il peso $Q/2$ del tratto di arco AB, passante per il baricentro G_2 dovrà essere equilibrato da una forza orizzontale passante per B e da una forza passante per A



Il calcolo a rottura di Mascheroni

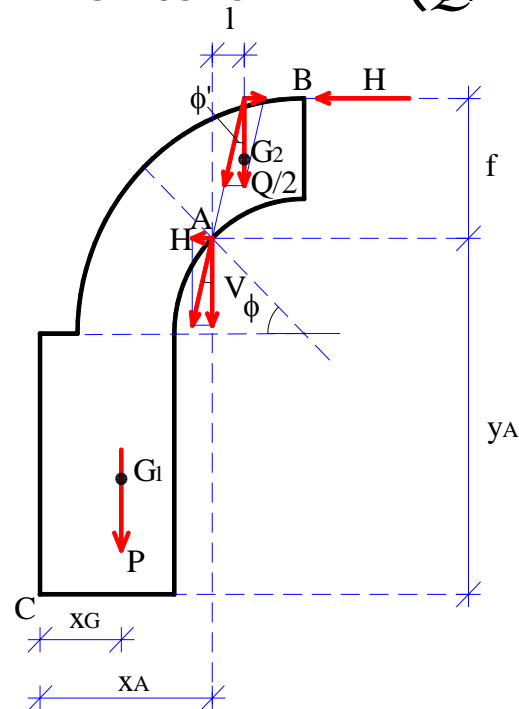
- Costruito il triangolo dell'equilibrio si trova l'azione che il corpo AB esercita sul corpo AC attraverso la cerniera in A.



Il calcolo a rottura di Mascheroni

■ L'azione che il corpo AB esercita sul corpo AC ha:

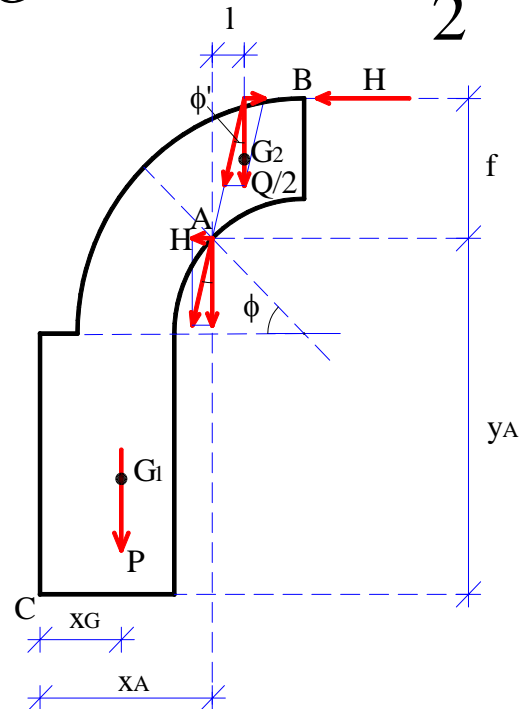
- componente verticale $V = Q/2$
- componente orizzontale $H = (Q/2) \operatorname{tg} \phi'$, $\operatorname{tg} \phi' = l/f$



Il calcolo a rottura di Mascheroni

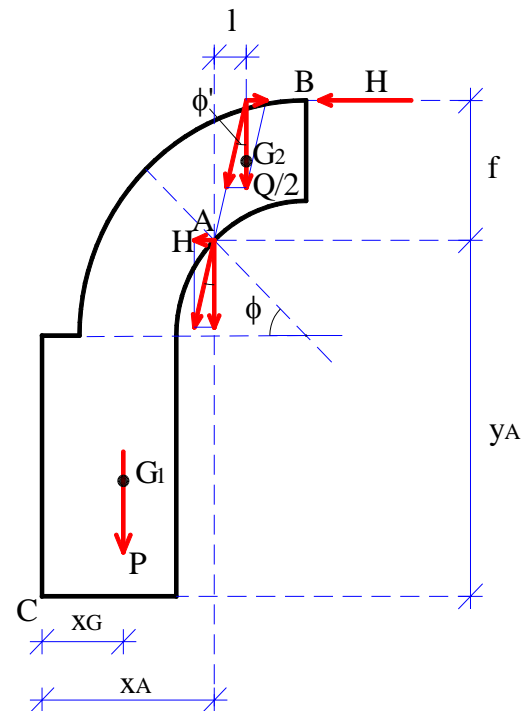
- L'equazione di equilibrio dei momenti intorno al punto C fornisce la relazione:

$$Hy_A - \frac{Q}{2}x_A - Px_G = 0 \rightarrow P = \frac{Q}{2} \frac{(y_A \operatorname{tg} \phi' - x_A)}{x_G}$$



Il calcolo a rottura di Mascheroni

- L'equazione è analoga a quella di De La Hire e De Belidor, la differenza è nell'angolo ϕ' che in essa compare



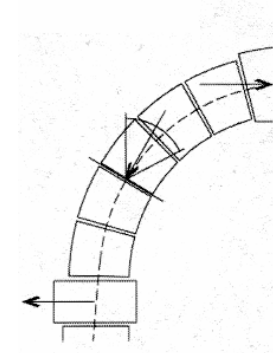
Il calcolo a rottura di Mascheroni



- Se $\phi > \phi'$ il peso P necessario per evitare lo scorrimento del cuneo centrale è maggiore di quello necessario per evitare la formazione delle cerniere per cui questo meccanismo risulta più pericoloso per l'arco
- Mascheroni considera tutte le sezioni come possibilmente critiche, non solo quella a 45° .

Il ruolo dell'attrito

- Nella maggioranza dei casi risulta $\phi > \phi'$ per cui la rottura avverrebbe per scorrimento piuttosto che per formazione di cerniere
- In realtà le superfici tra un concio e l'altro non sono prive di attrito come ipotizzato
- La reazione che le superficie del giunto offre al cuneo centrale non è ortogonale al giunto stesso ma inclinata di un angolo ψ nel verso opposto a quello del moto.

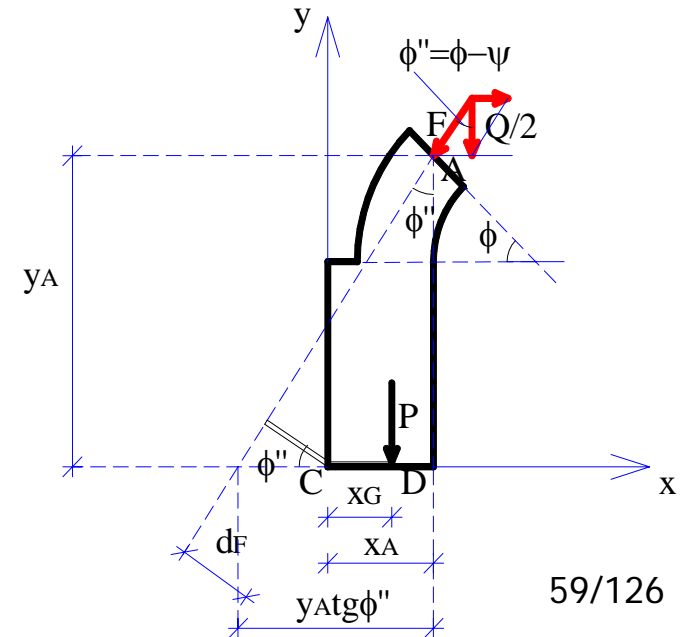
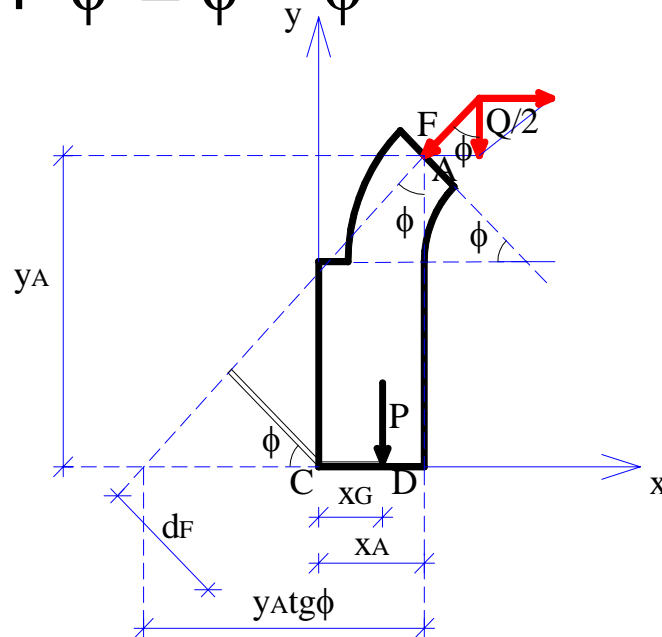


Il ruolo dell'attrito

- L'equazione di equilibrio diventa:

$$Fd_F = Px_G \rightarrow P = \frac{Q}{2} \frac{(y_A \operatorname{tg} \phi'' - x_A)}{x_G}$$

con $\phi'' = \phi - \psi$



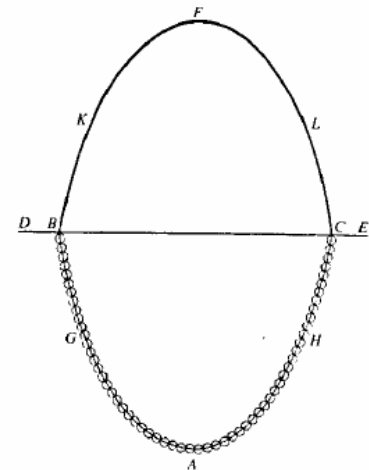


Il ruolo dell'attrito

- L'ipotesi di mancanza di attrito fa ritenere più pericoloso un meccanismo che di fatto non si realizza
- Si nota l'importanza dei parametri fisici che entrano nel modello per la corretta interpretazione della realtà

Gli studi sulla catenaria

- Contemporaneamente alla nascita di queste idee si sviluppano gli studi sulla catenaria
- Hooke aveva per primo intuito la relazione esistente tra una fune in equilibrio sotto carichi assegnati ed un arco soggetto agli stessi carichi avente forma identica ma rovesciata.





La teoria elastica

- Il XIX secolo è segnato dai tentativi di interpretazione dell'arco in muratura nell'ambito della teoria della trave elastica ad asse curvilineo
- Furono affrontati i problemi irrisolvibili nell'apparato concettuale del corpo rigido:
 - l'effettiva capacità di sopportare certi stati di sollecitazione
 - l'effettivo andamento della curva delle pressioni all'interno dell'arco



La teoria elastica

- Nel XVIII secolo era possibile trattare rigorosamente solo strutture ipostatiche o isostatiche
- Erano note solo le condizioni di equilibrio



La teoria elastica

- Un arco considerato come elemento monolitico è una struttura iperstatica
- Per essere risolto è necessario tenere conto della deformabilità del materiale di cui è composto
- Spetta a Hooke la sperimentazione sulla deformabilità dei materiali e la definizione del legame che porta il suo nome

La teoria elastica

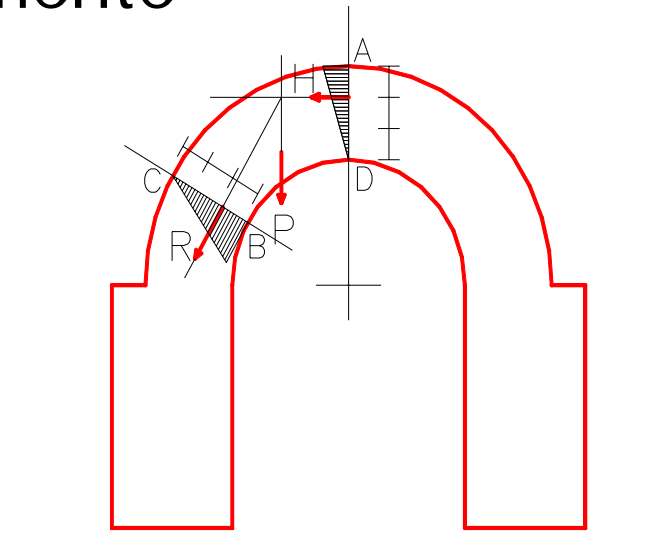
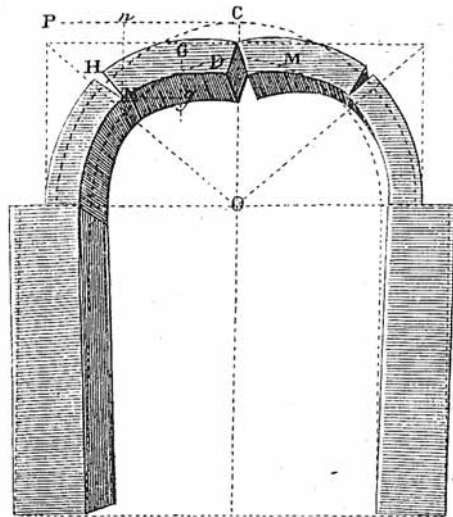
Navier

- Gli studi di Navier si basano sulle ipotesi di:
 - Legame elastico forze deformazioni
 - Determinate condizioni al contorno
- Se l'arco è considerato rigido non è possibile determinare la linea delle pressioni
- Se si considera deformabile divengono disponibili ulteriori equazioni che consentono di risolvere il problema iperstatico

La teoria elastica

Navier

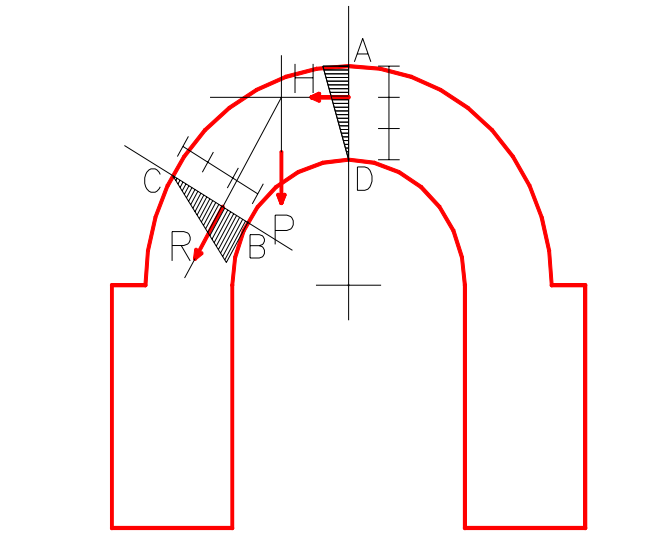
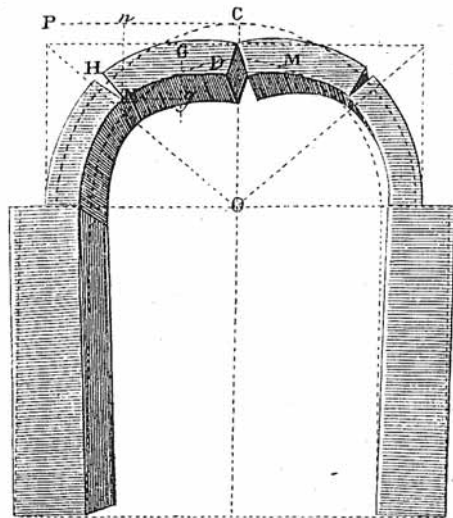
- Navier propose di effettuare le verifiche di stabilità condotte da Coulomb imponendo che le sezioni rimanessero interamente reagenti con tensioni massime di compressione inferiori alle tensioni massime di rottura del materiale rilevate sperimentalmente



La teoria elastica

Navier

- **Navier** ipotizzò che, per avere solo sforzi di compressione, la linea delle pressioni doveva passare, in corrispondenza dei '**giunti di rottura**', al massimo per il **terzo medio** della sezione resistente
- In questo modo si ha la condizione limite di **diagramma triangolare delle tensioni** di compressione all'interno della sezione, con un valore nullo in corrispondenza del punto in cui ha inizio lo scorrimento in caso di rottura.



La teoria elastica

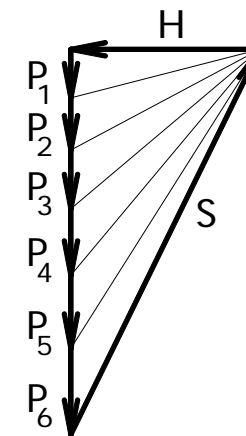
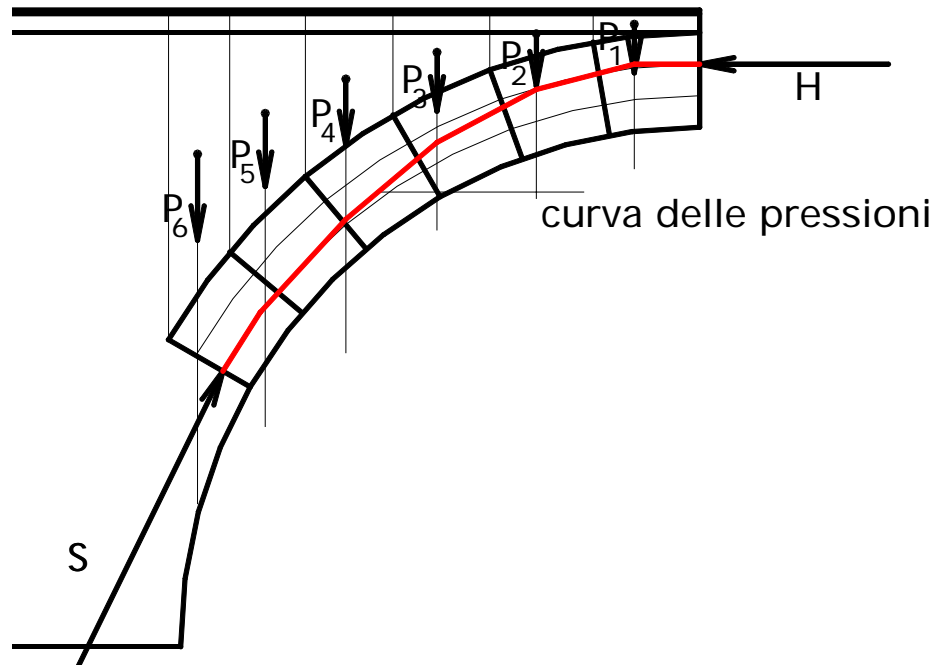
Mèry

- Partendo dagli studi di Navier **Mèry** mostrò che il problema della determinazione del regime statico di un arco poteva essere risolto utilizzando un poligono di equilibrio a passaggio obbligato per due punti: il **terzo medio inferiore** nella sezione di imposta e il **terzo medio superiore** nella sezione in chiave, con retta d'azione orizzontale (per arco simmetrico e simmetricamente caricato e vincolato)
- In questo modo noti i carichi esterni, era possibile ottenere l'andamento della curva delle pressioni.

La teoria elastica

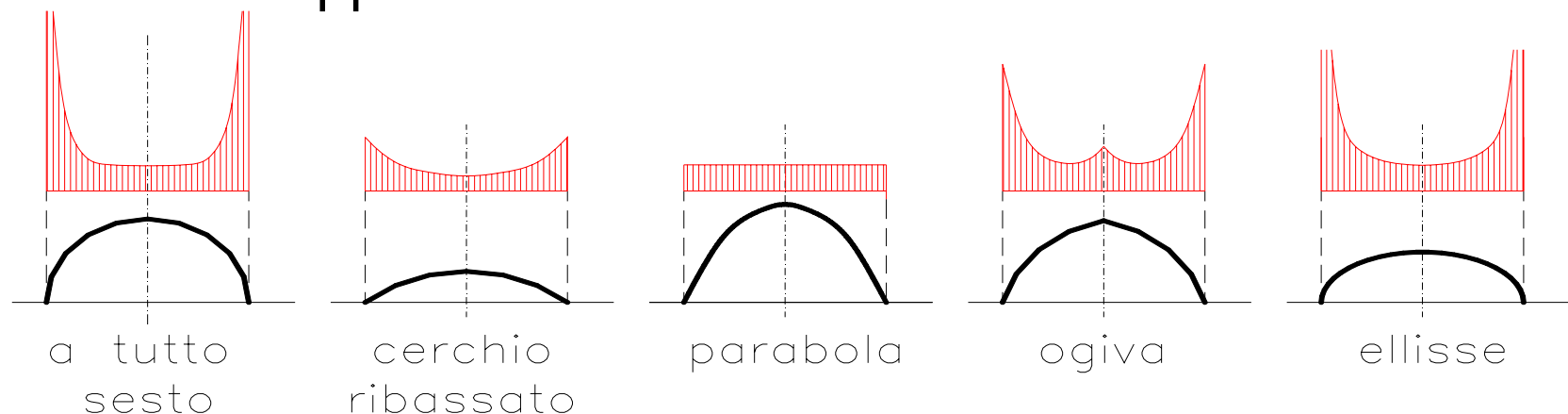
Mèry

- La verifica dell'arco consiste nell'accertare che nelle sue sezioni non siano presenti forze di trazione
- Per un arco con sezione trasversale rettangolare, bisogna verificare che la curva delle pressioni sia contenuta all'interno della fascia delimitata dal terzo medio di tutte le sezioni trasversali (nocciolo centrale d'inerzia).



La forma dell'arco

- Gli studi condotti sull'arco nel corso del XIX secolo riguardavano prevalentemente la forma da conferire all'arco per garantire la **centratura dello sforzo normale** in corrispondenza delle facce a contatto tra un concio e l'altro.
- Il profilo più adatto per un arco è quello la cui linea d'asse si dispone secondo la funicolare dei carichi ad esso applicati.



Distribuzione dei carichi che genera compressione uniforme per le diverse direttrici



La forma dell'arco

- Se un arco è funicolare per un insieme di carichi, non può esserlo per tutti gli altri sistemi di carichi cui può essere assoggettato
- In ogni arco si ha in genere una combinazione di compressione e di flessione
- Nell'arco in muratura la forma è, in genere, funicolare del peso proprio e l'arco è soggetto a flessione per i carichi accidentali.



La teoria elastica

Castigliano

- Castigliano (1879) applica il suo teorema di minimo dell'energia elastica per determinare l'andamento della linea delle pressioni di un arco mediante un procedimento iterativo che consente di tenere conto della non resistenza a trazione della muratura.
- Calcolata una prima curva di tentativo nell'ipotesi di sezione elastica:
 - verifica se è contenuta nel terzo medio dell'arco;
 - se ciò avviene, le sezioni sono compresse e la teoria elastica è applicabile;
 - se invece la curva non è completamente interna al terzo medio, riduce la dimensione delle sezioni eliminando la porzione soggetta a trazione e procede quindi alla determinazione di una nuova curva basandosi sulla geometria modificata della sezione.
 - il procedimento iterativo è arrestato quando tutte le sezioni così modificate sono interamente compresse.

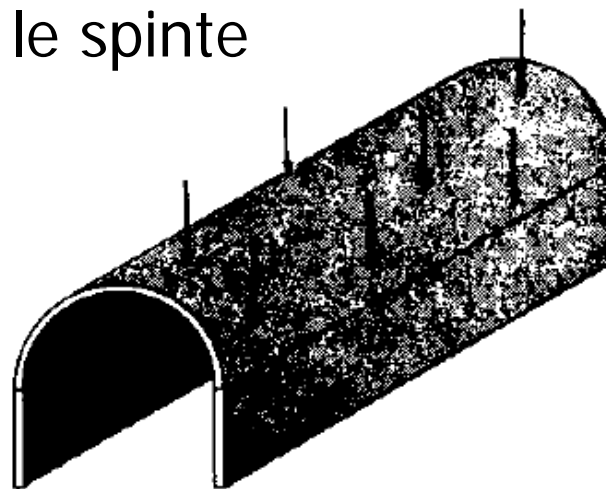
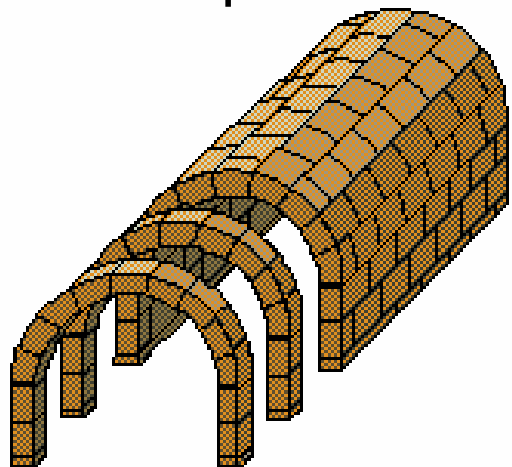


La teoria plastica

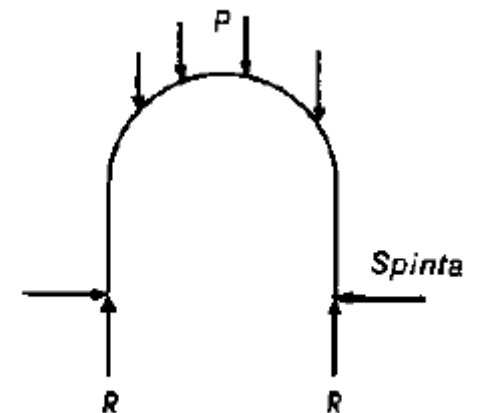
- La soluzione elastica del problema della definizione del regime statico di un arco è sensibile alle variazioni delle condizioni al contorno
- L'analisi plastica non si basa sulla conoscenza dello stato effettivo in cui la struttura si trova ma sull'esame delle condizioni in cui essa può collassare e sulla verifica che la struttura abbia un sufficiente margine di sicurezza rispetto al collasso
- Lo stato di equilibrio analizzato nella teoria plastica non è lo stato reale in cui si trova ma uno stato possibile
- Se il progettista riesce a trovare un modo in cui la struttura si comporta soddisfacentemente allora essa sicuramente ci riuscirà.

La volta a botte

- La volta a botte si può considerare generata dalla traslazione di un arco lungo una direttrice ad esso ortogonale
- Se la volta poggia con continuità lungo i bordi longitudinali il comportamento di ciascuna sezione è del tipo ad arco
- I muri laterali devono essere sufficientemente larghi per contenere le spinte



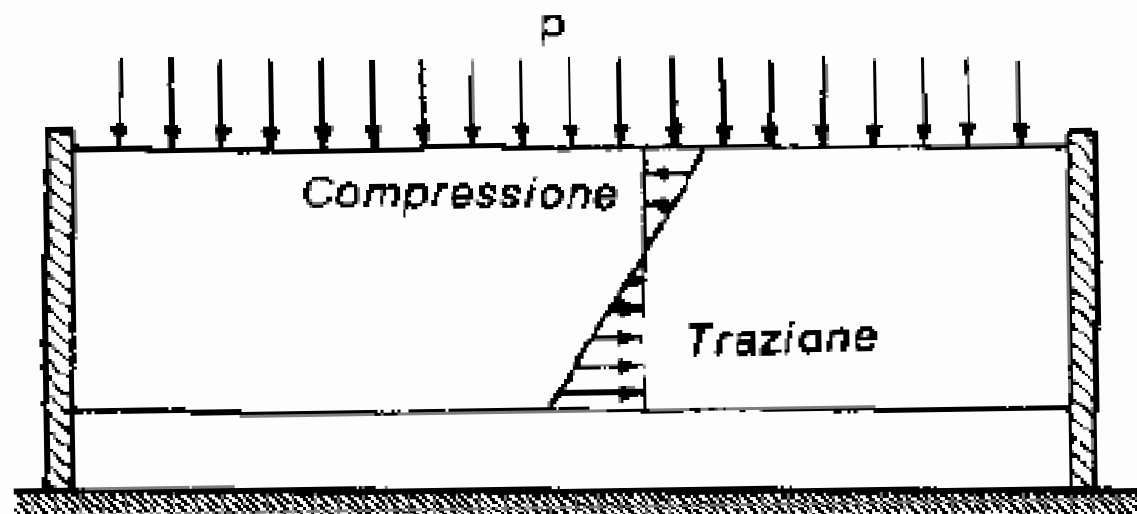
(a)



(b)

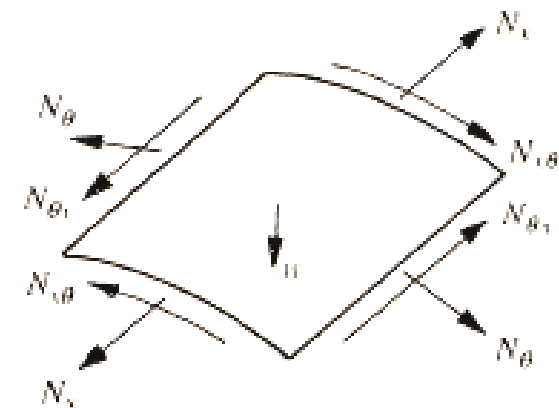
La volta a botte

- Se la volta non poggia con continuità si determina un comportamento a trave



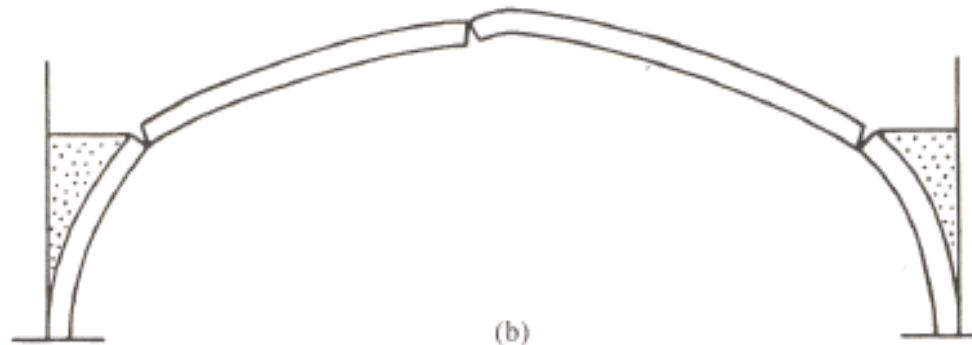
Le spinte nella volta

- Le volte a botte possono essere studiate utilizzando la teoria delle membrane
- Una membrana è una superficie curva il cui spessore è piccolo se comparato alle altre dimensioni della struttura in grado di trasmettere solo sforzi interni giacenti sul piano tangente
- Ciascun elemento della volta è sollecitato da tensioni normali (trazione e compressione) e taglio



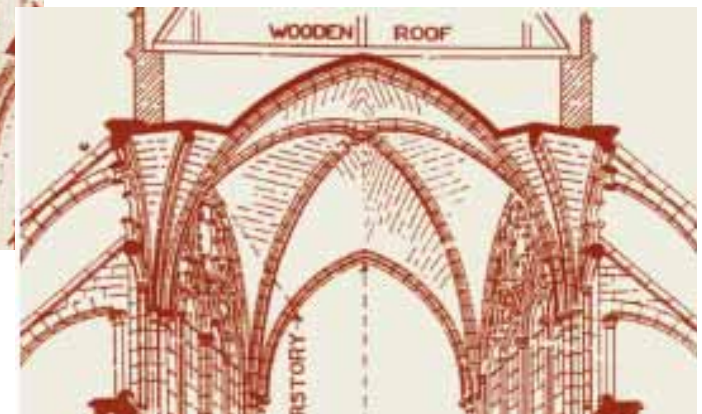
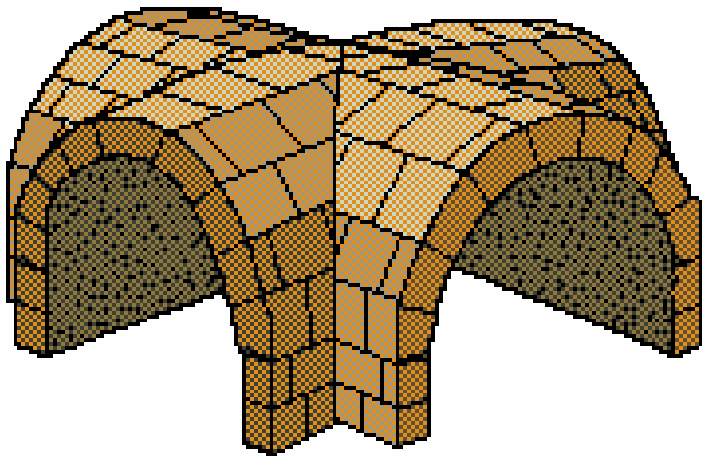
Lesioni dovute a spostamento dei piedritti

- Tale meccanismo di rottura si manifesta con la depressione del settore centrale dovuta all'allontanamento dei piedritti causato dalla loro rotazione verso l'esterno
- Si sviluppa il meccanismo di rottura a 3 cerniere: una cerniera lineare si forma in prossimità della chiave e 2 alle reni



Le volte a crociera

- La volta a crociera deriva dall'intersezione di 2 volte a botte tra loro ortogonali
- Gli archi che si formano all'intersezione delle 2 volte possono essere integrati nella volta (spigoli) o risaltare all'intradosso (costole diagonali)



Le volte a crociera

- Se sui piani verticali passanti per il perimetro della pianta sono presenti nervature queste si chiamano:
 - Costole trasversali: se comuni a due volte adiacenti
 - Se si trovano su una muratura terminale:
 - Archi di testa: se comprese nella muratura
 - Costole di testa: se in risalto rispetto alla muratura



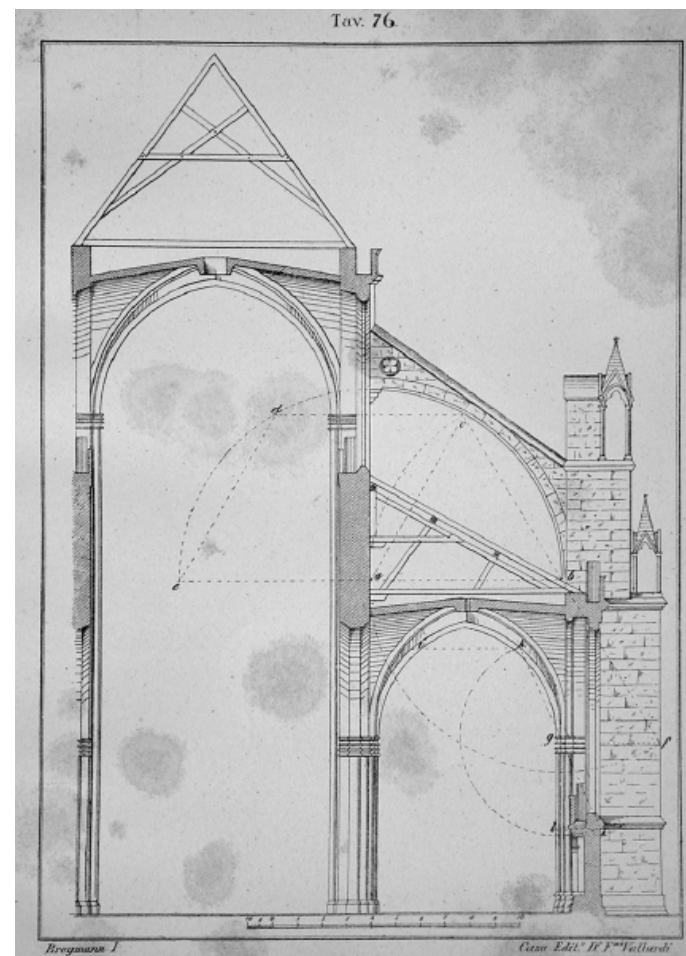


Le volte a crociera

- Le volte a crociera possono essere realizzate:
 - Per intersezione di volte a botte semicilindriche uguali (pianta quadrata)
 - Per intersezione di volte a botte semicilindriche con diversa campata e altezza (pianta rettangolare)
- L'intersezione delle 2 botti nei costoloni creava un problema nel taglio delle pietre:
 - Una semplificazione si ebbe costruendo i costoloni come archi indipendenti sui quali poggiavano i pannelli delle volte

Le volte a crociera

- L'esecuzione delle strutture ad arco o voltate avveniva per fasi:
 - realizzazione di imposte aggettanti solidali coi piedritti
 - realizzazione dell'elemento di chiusura
 - realizzazione delle pareti d'ambito a buona presa avvenuta e in presenza di un idoneo carico stabilizzante
- Con le tecniche relative a pietra da taglio o a mattoni potevano essere realizzate volte senza cassaforma:
 - occorrevano soltanto delle centinature disposte secondo le costolature.



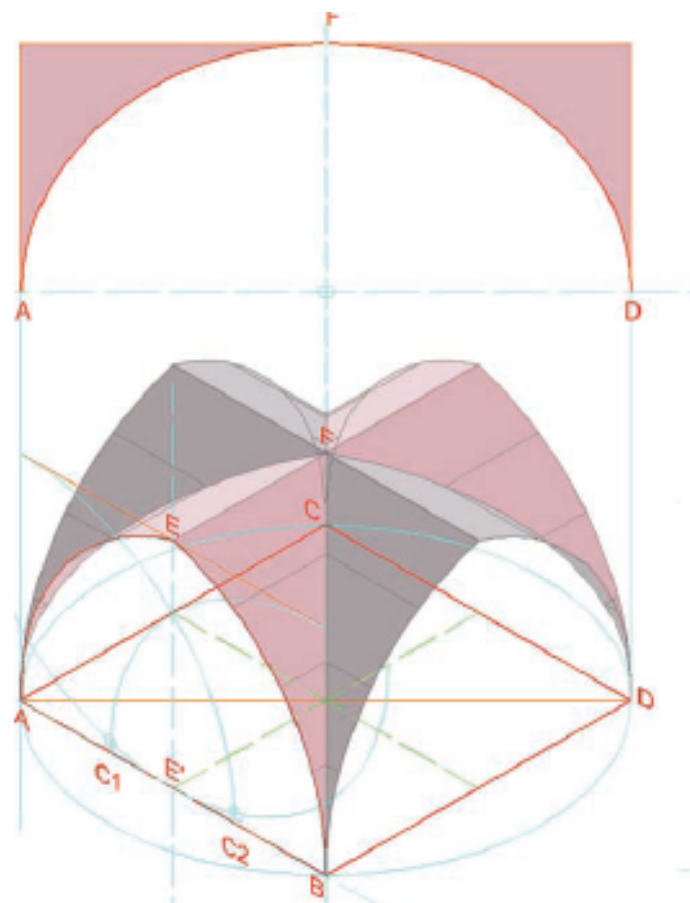


Le volte a crociera

- Con lo schema architettonico romano con archi di testa a tutto sesto si presentava un problema:
 - gli spigoli diagonali, intersezioni di due cilindri circolari risultavano delle ellissi
 - frazionando un'ellisse in conci si sarebbero avuti conci diversi tra loro.

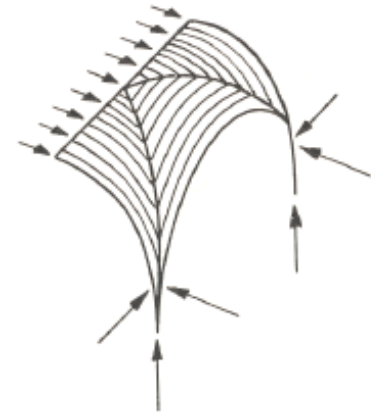
Le volte a crociera

- Il problema venne risolto dai costruttori gotici:
 - Partendo dagli archi corrispondenti agli spigoli diagonali (semicirconferenze con diametro uguale alla diagonale del quadrato di base)
 - gli archi di testa sono di forma ellittica approssimati con archi a sesto acuto
 - a parità di dimensioni di base la volta si slancia
 - a parità di pesi le spinte sui piedritti si riducono di circa il 30%.



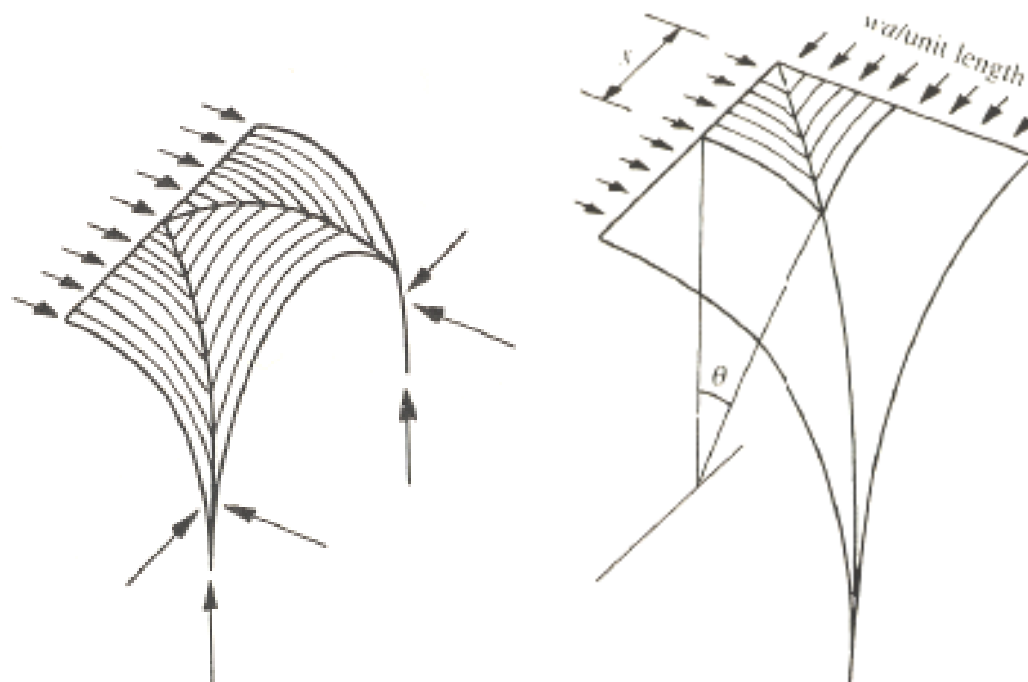
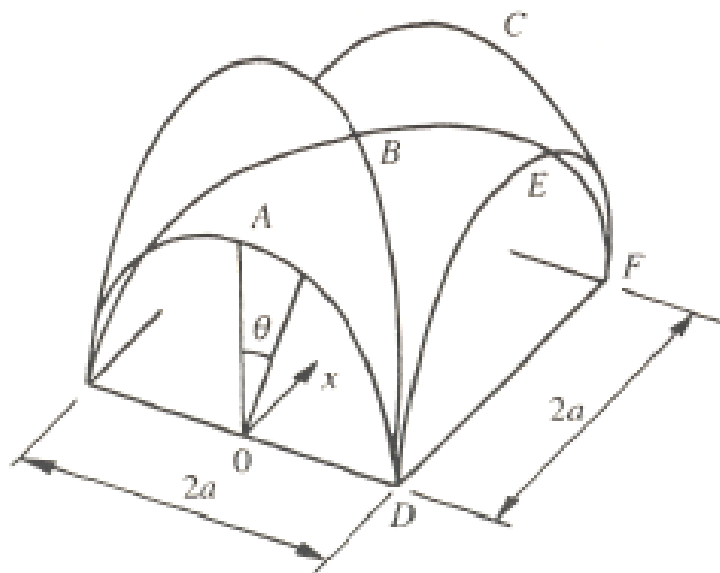
Le spinte nella volta

- L'intersezione delle volte in corrispondenza delle costole determina una concentrazione di forze dovuta all'improvviso cambio di direzione delle tensioni
- Le costole svolgono la funzione di irrigidimento della volta:
 - Nelle volte con forti cambi di curvatura hanno anche funzione di rinforzo



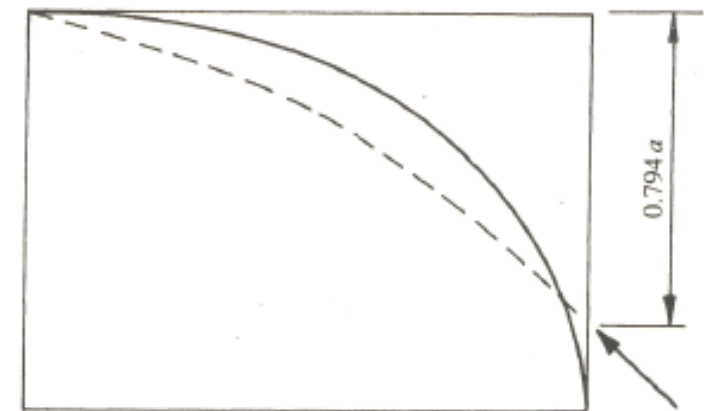
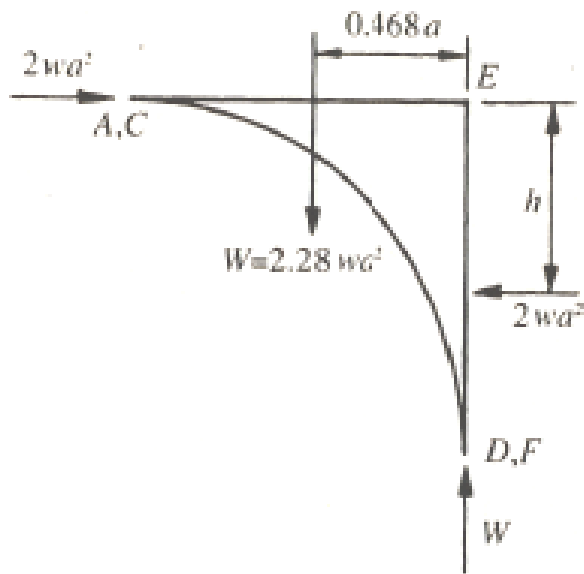
Le spinte nella volta

- Le tensioni radiali N_θ hanno variano secondo la funzione $N_\theta = -wac\cos\theta$ (w = peso per unità di superficie)



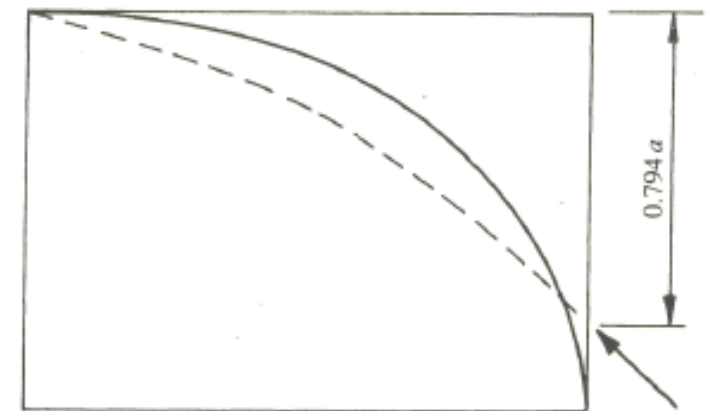
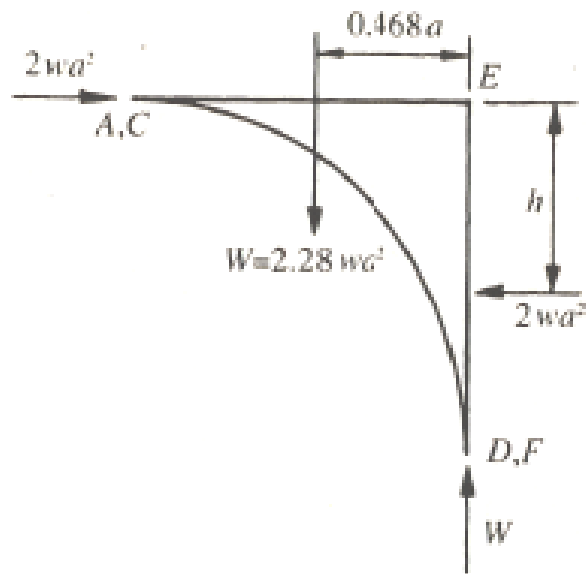
Le spinte nella volta

- L'equilibrio alla rotazione di una porzione di volta richiede che le spinte bilancianti dei contrafforti agiscano ad una distanza z dal piano di imposta della volta



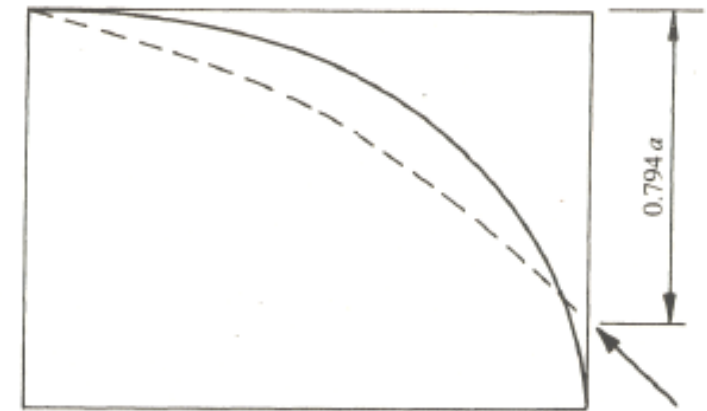
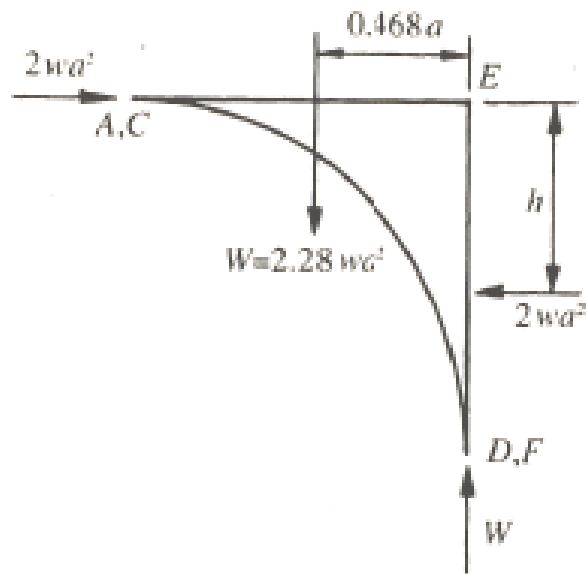
Le spinte nella volta

- E' essenziale realizzare dei rinfianchi alla volta che forniscano un percorso alle spinte quando queste fuoriescono dalle costole diagonali



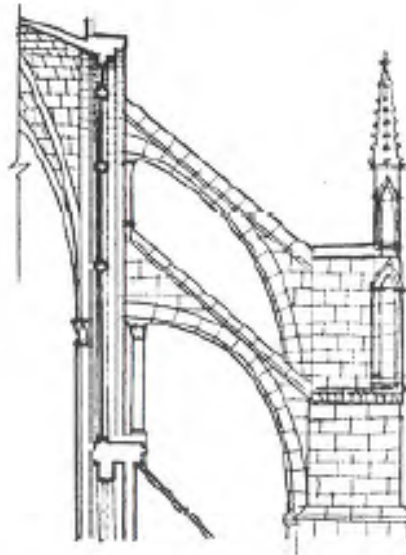
Le spinte nella volta

- La linea delle spinte si discosta dalla linea d'asse dei costoloni



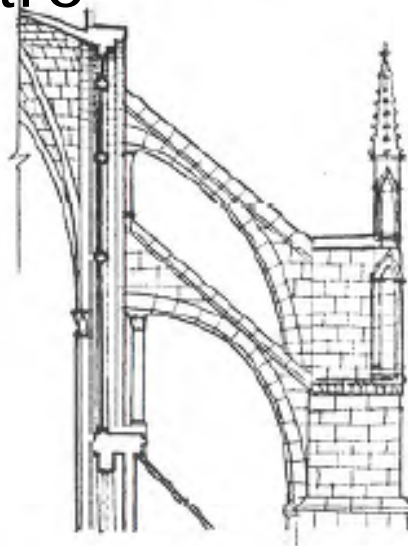
Le spinte nella volta

- Le volte a costoloni devono essere sostenute da contrafforti
- I capimastri delle cattedrali gotiche realizzarono contrafforti esterni costituiti da archi rampanti



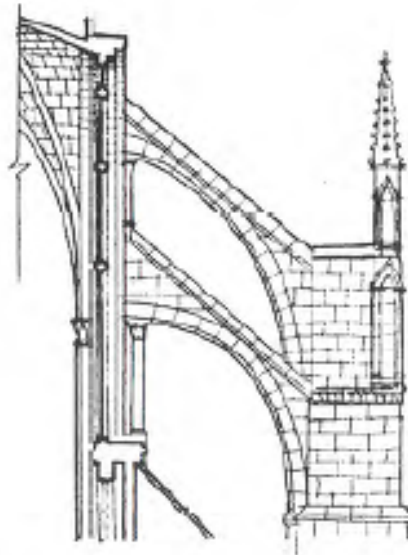
Le spinte nella volta

- Gli archi rampanti contrastano le spinte della volta senza indurre trazione nella muratura
- Per ridurre le dimensioni dei pilastri e ridurre le spinte spesso si usarono 2 archi rampanti posti l'uno sull'altro



Le spinte nella volta

- Pesanti guglie venivano aggiunte sui pilastri esterni per aumentare con il carico la compressione e ridurre la flessione

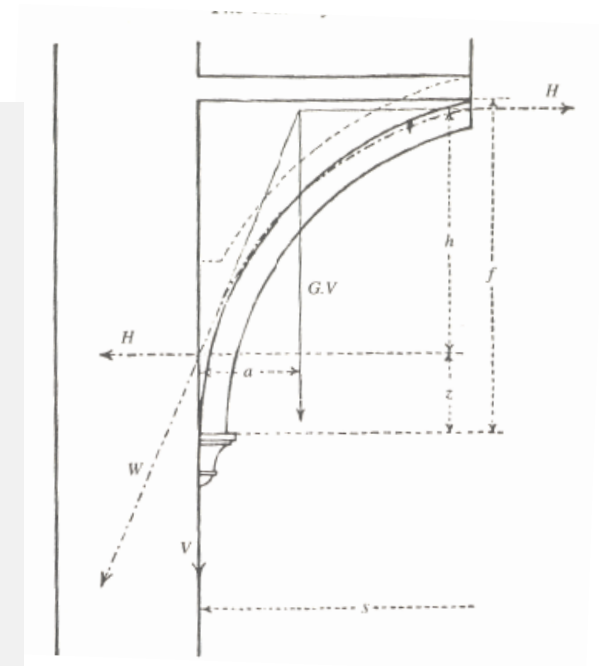


Le tavole di Ungewitter

- Ungewitter realizzò delle tabelle per il calcolo delle spinte nella volta in funzione di alcuni parametri:
 - Rapporto freccia/campata
 - Spessore della volta

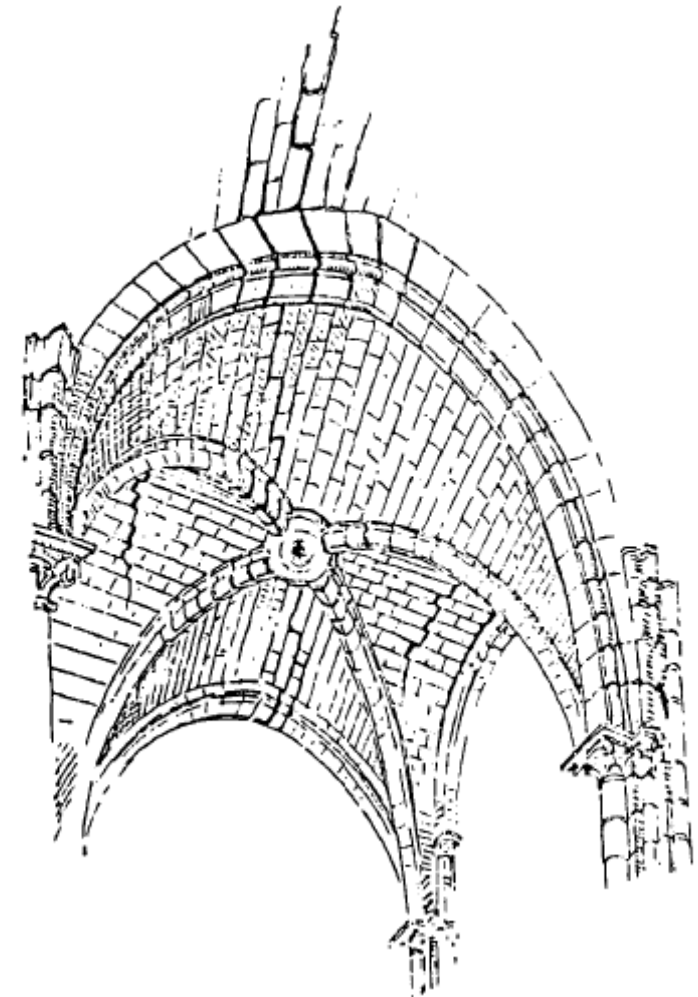
Table 4.1. Thrusts from quadripartite vaults (after Ungewitter 1901)
(V_o and H_o in kN/m^2)

Height/span f/s	1:8		1:3		1:2		2:3		5:6 to 1:1	
	V_o	H_o	V_o	H_o	V_o	H_o	V_o	H_o	V_o	H_o
a. $\frac{1}{4}$ lightweight brick	2.0	3.6-4.0	2.3	1.6-1.8	2.6	1.1-1.2	2.9	0.9-1.0	3.4	0.8-0.9
b. $\frac{1}{2}$ strong brick	2.7	5.0-5.5	3.1	2.2-2.4	3.5	1.4-1.6	3.8	1.1-1.3	4.5	1.0-1.1
c. $\frac{3}{4}$ strong brick	3.7	7.0-7.5	4.2	3.0-3.3	4.8	1.9-2.2	5.3	1.6-1.8	6.5	1.5-1.6
d. 200 mm sandstone	5.0	9.5-10.0	5.7	4.2-4.5	7.0	2.8-3.2	7.5	2.2-2.5	9.0	2.1-2.3
e. 300 mm rubble	8.5	16-17	10.0	7.1-7.5	12.0	4.8-5.5	13.0	4.0-4.3	15.0	3.5-3.7
lever arm h/f	0.90		0.85-0.75		0.80-0.70		0.80-0.72		0.80-0.75	



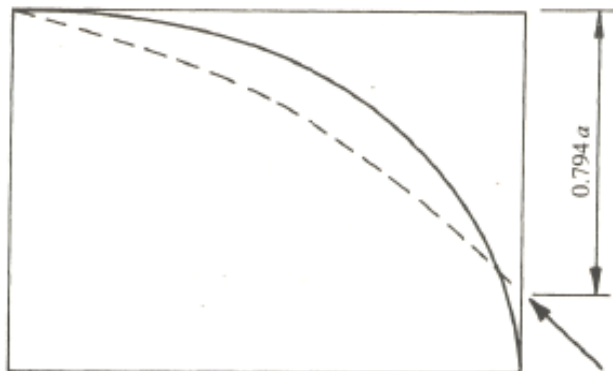
Le patologie della volta quadripartita

- Pol Abraham identificò (1934) le possibili lesioni in una volta quadripartita:
 - Lesioni nelle volte principali in chiave (formazione di cerniere)
 - Lesioni parallele alle costole murarie con una completa separazione del pannello della volta (dette *fissures de Sabouret*)
 - Lesioni che separano i pannelli della volta dai muri



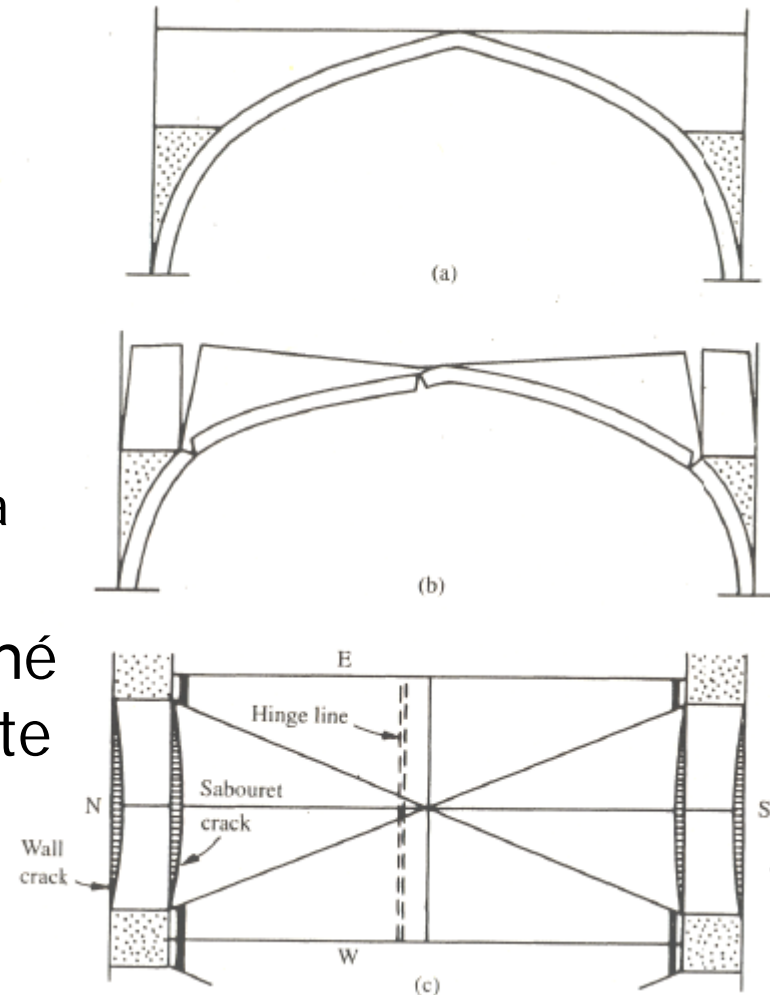
Lesioni dovute a spostamento dei contrafforti

- Tale meccanismo di rottura si manifesta con la depressione del settore centrale dovuta all'allontanamento dei piedritti causato dalla loro rotazione verso l'esterno
- La linea delle spinte passa attraverso i rinfianchi e si scarica sui contrafforti



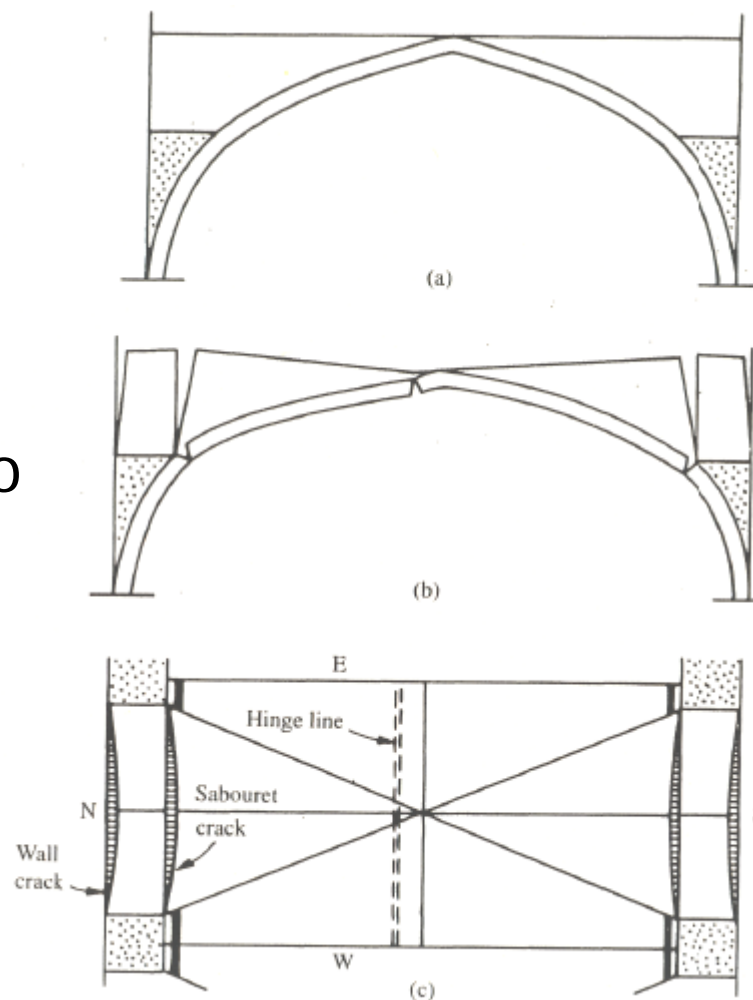
Lesioni dovute a spostamento dei contrafforti

- Il sistema fessurativo trasforma la volta in 3 blocchi:
 - Fessure si formano in prossimità e in adiacenza al muro perimetrale
 - Una cerniera lineare si forma vicino alla chiave
- Le lesioni si generano perché la muratura non è sufficiente a contenere le spinte



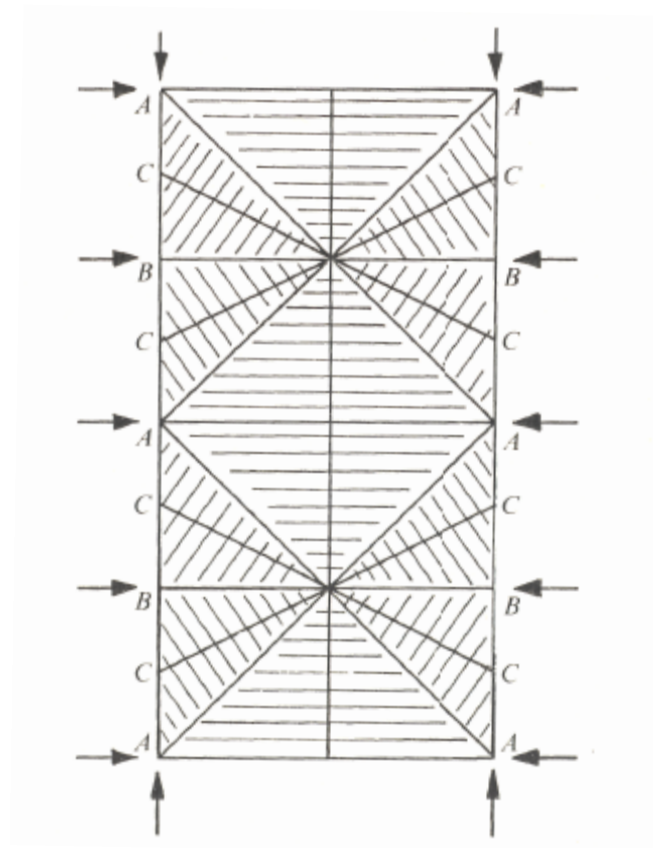
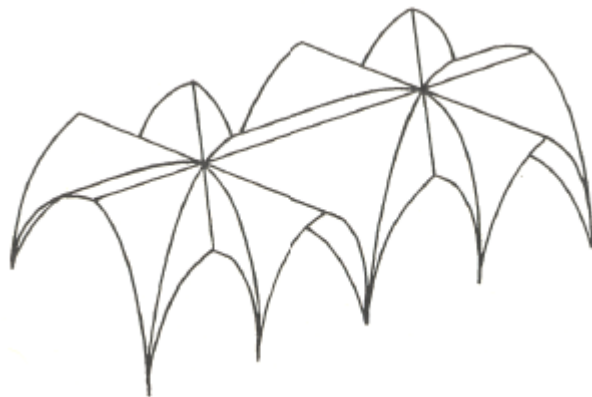
Lesioni dovute a spostamento dei contrafforti

- Le fessure di Sabouret e quelle murarie comportano completa separazione della muratura
- Nessuna forza può più essere trasmessa attraverso queste fessure
- Le forze di compressione corrono parallelamente alle fessure

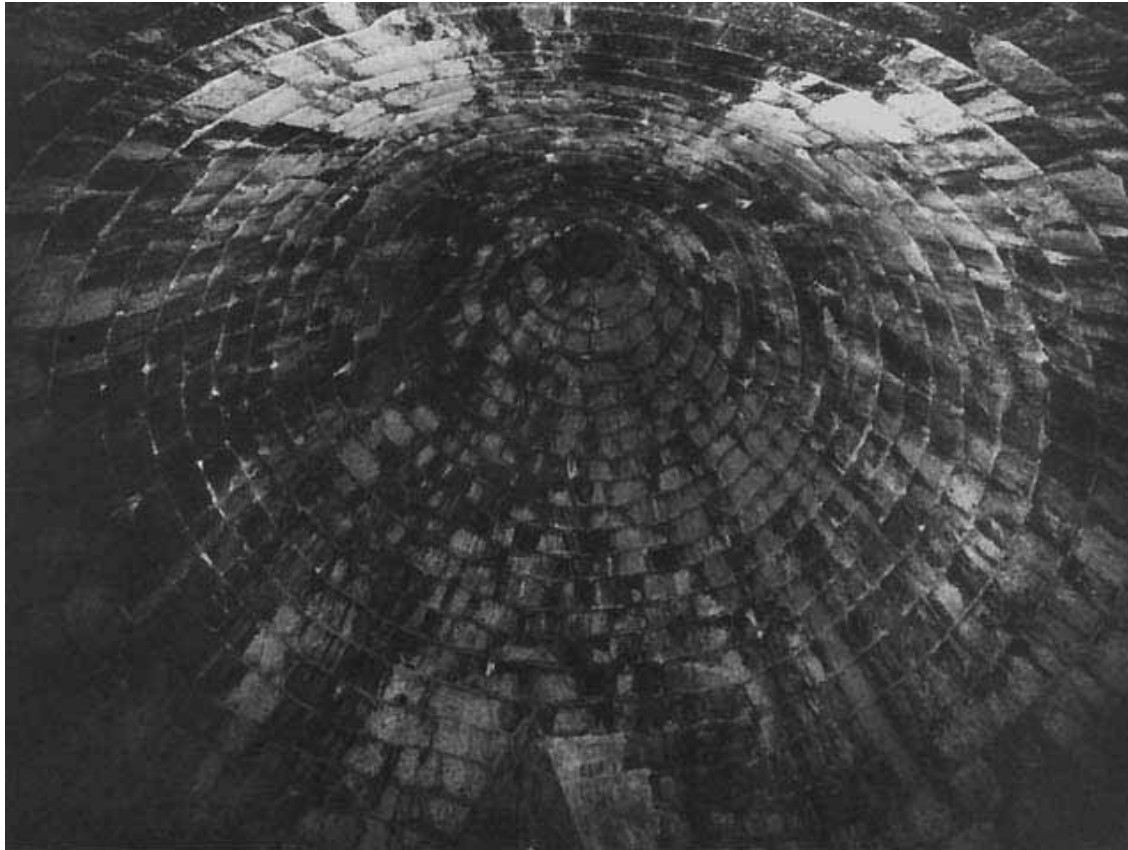


Le volte esapartite

- Nella volta esapartita le campate sono voltate a coppie
- I costoloni connettono campate alterne



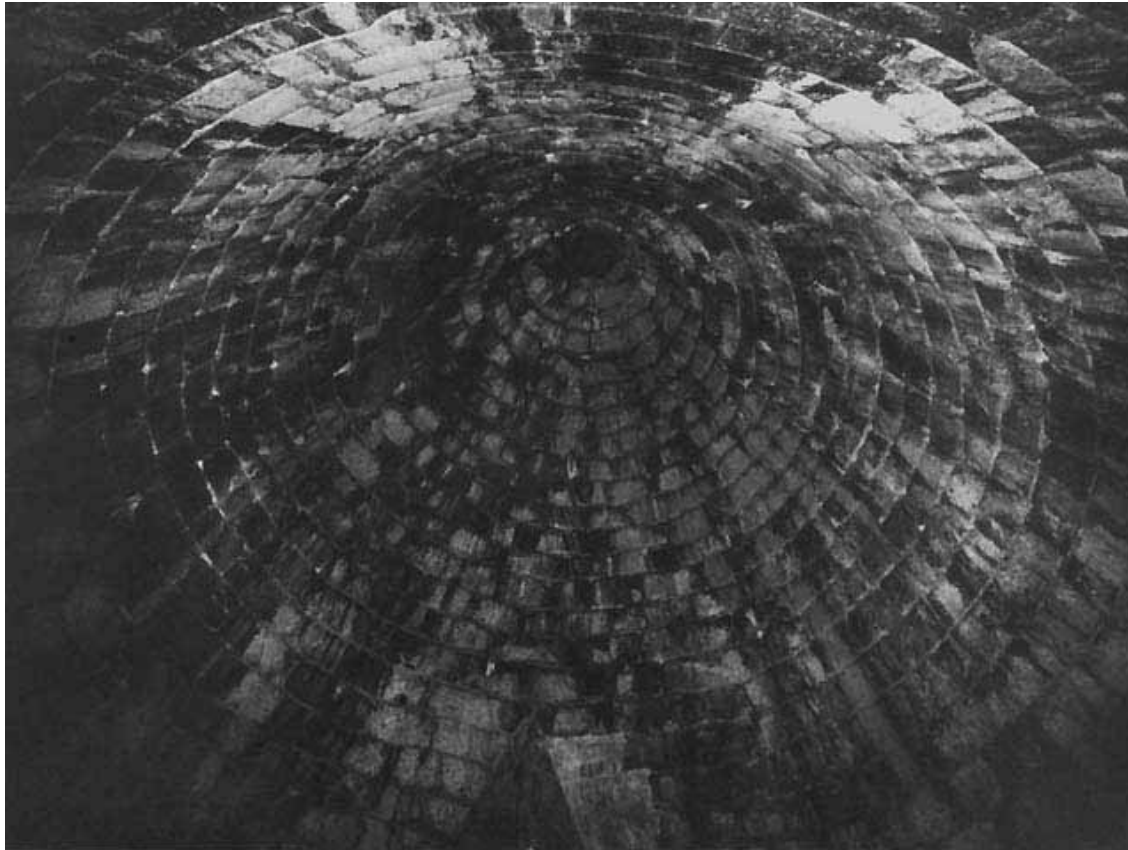
Le cupole



- Nella copertura del Tesoro di Atreo a Micene si rintraccia l'origine della cupola
- Pseudo - cupola formata da pietre poste su letti orizzontali in aggetto a formare una struttura anulare regolare



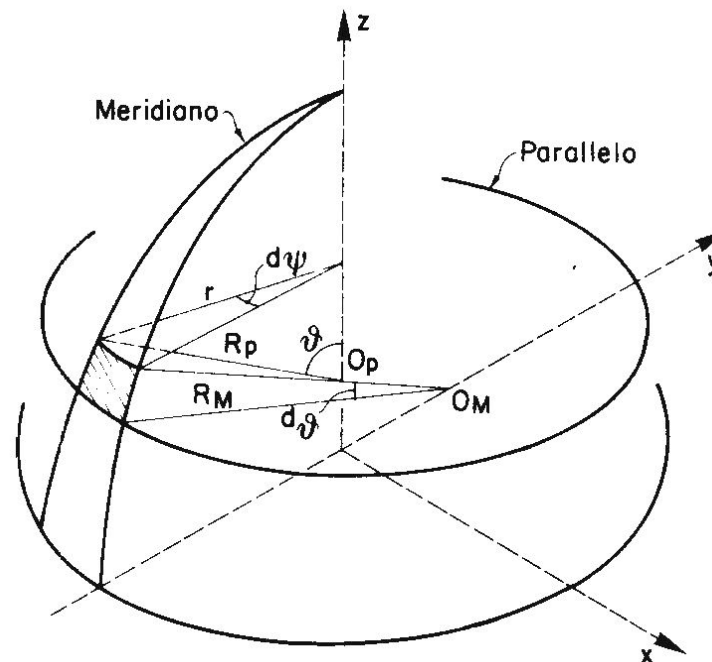
Le cupole



- La volta è alta 13m e copre una sala a pianta circolare con diametro di 14,5m

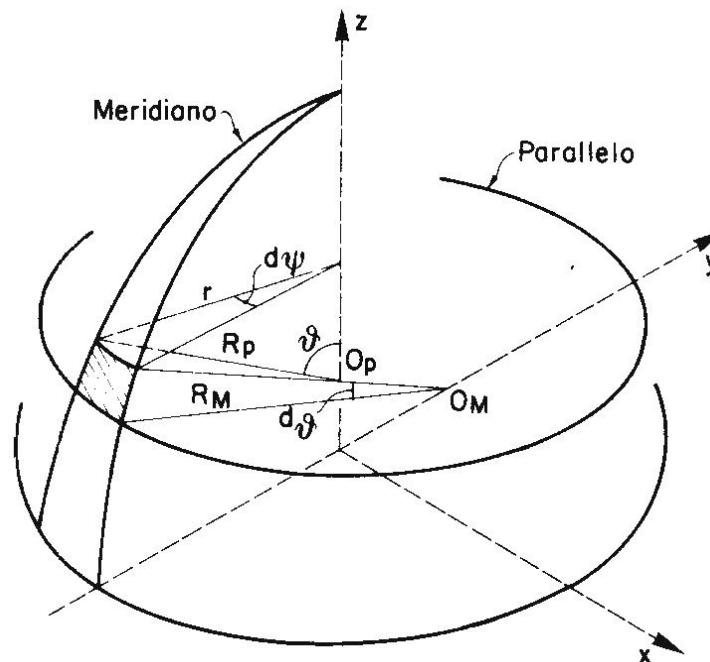
Le cupole

- La cupola si può considerare una membrana di rivoluzione generata per rotazione di un arco rispetto al suo asse centrale



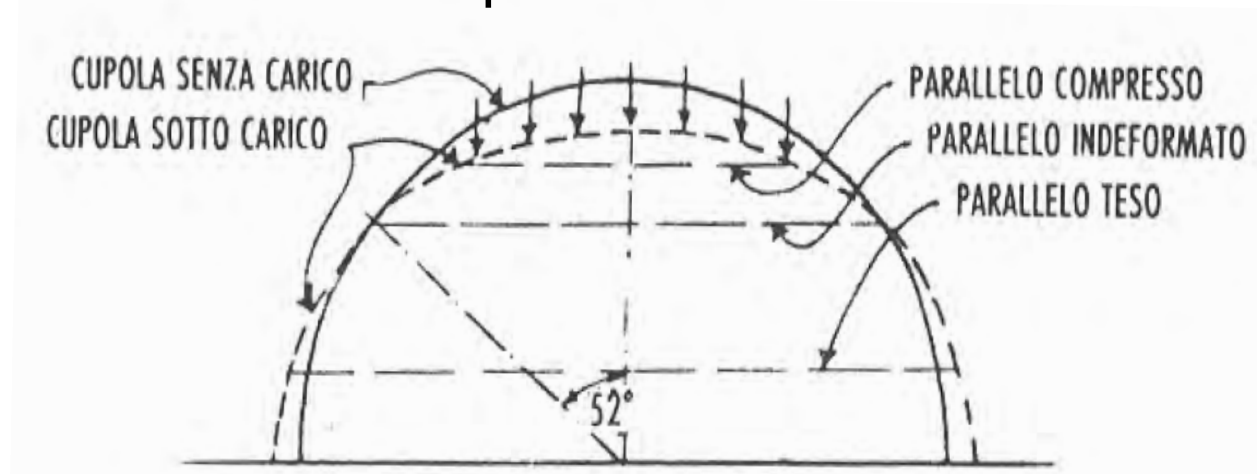
Le cupole

- La curva generatrice può avere forma circolare, parabolica o un profilo più complesso



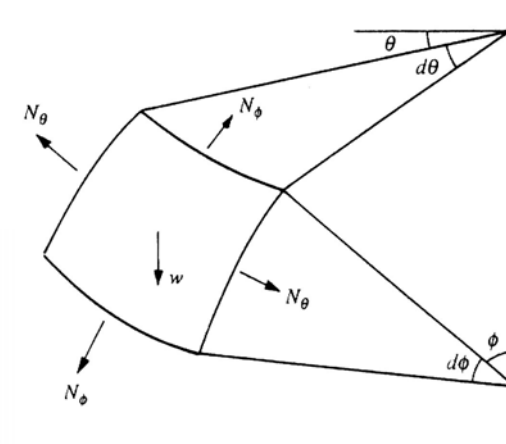
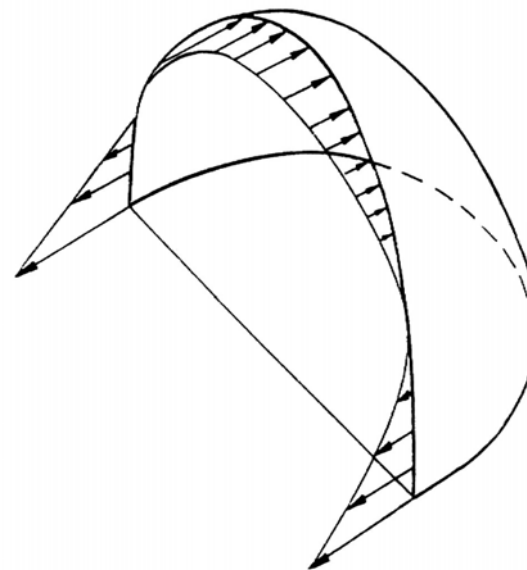
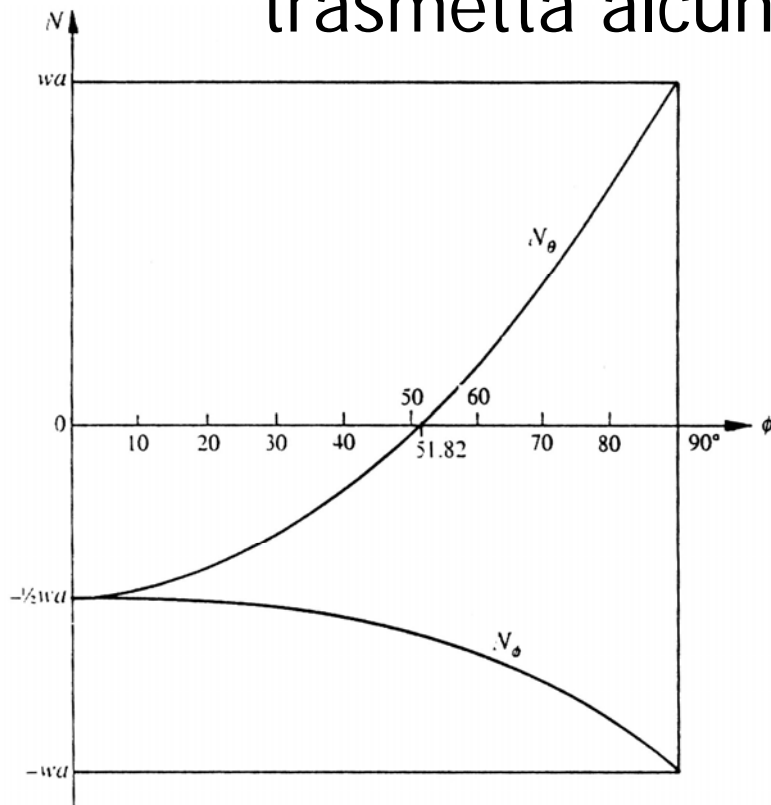
Le cupole

- Una membrana può essere idealizzata matematicamente come una superficie curva il cui spessore è piccolo se comparato alle altre dimensioni della struttura ($R/t > 20$) in grado di trasmettere solo sforzi interni giacenti sul piano tangente
- Le forze che agiscono sulla membrana si trasformano in stati tensionali di trazione o di compressione contenuti nel suo spessore



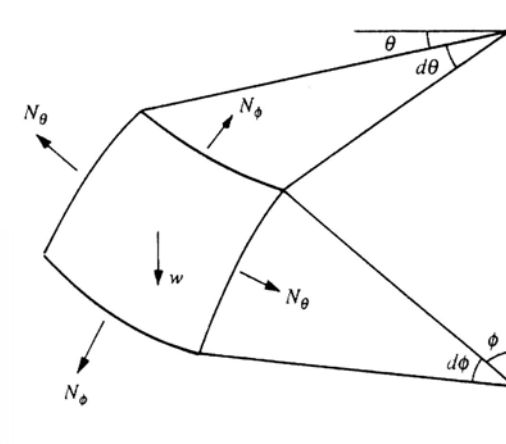
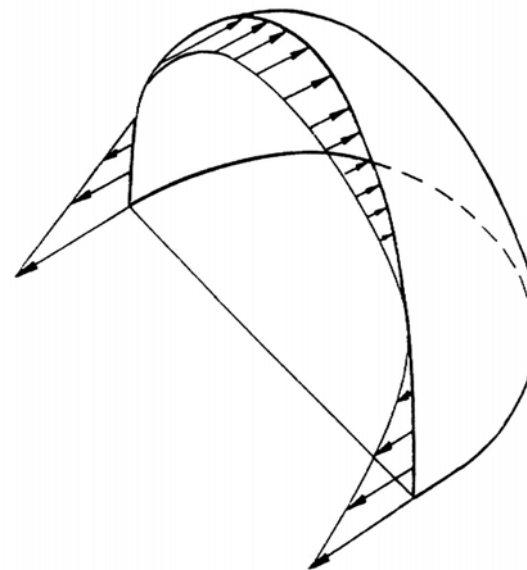
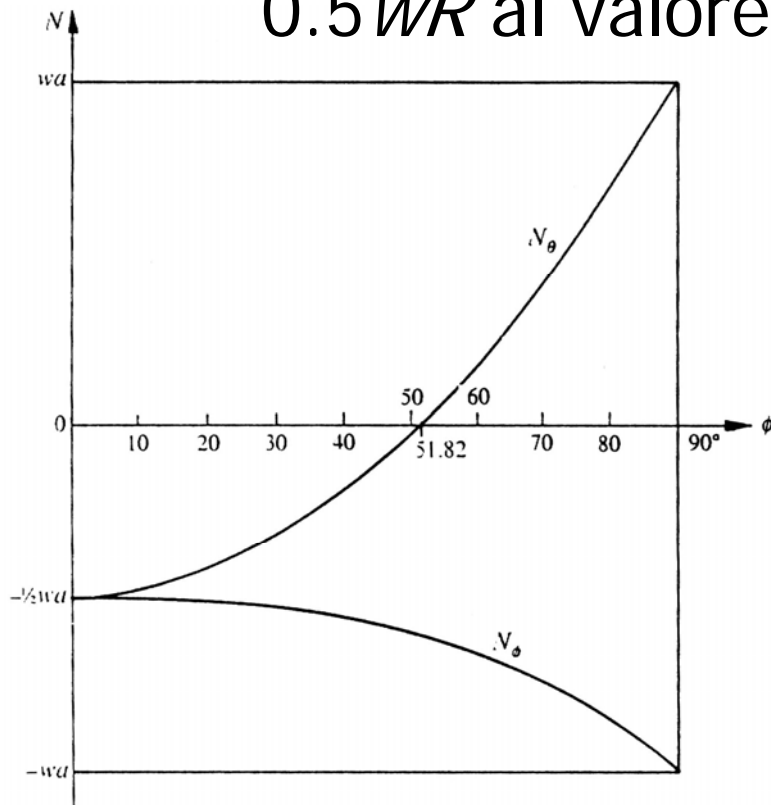
Le tensioni nella cupola

- L'ipotesi di comportamento a membrana comporta che la cupola a tutto sesto non trasmetta alcuna spinta



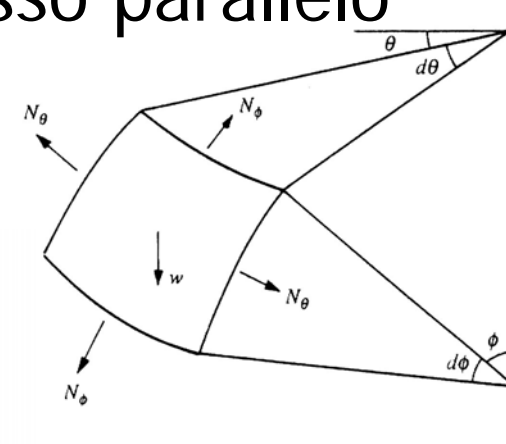
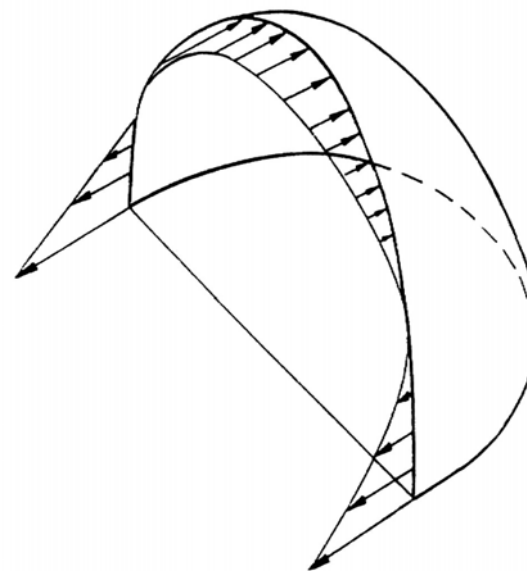
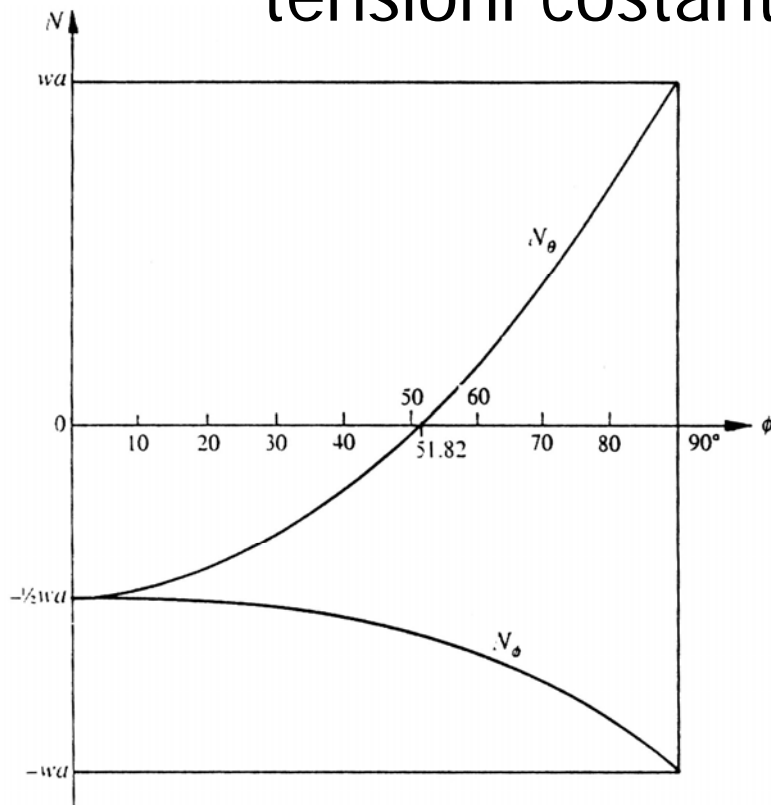
Le tensioni nella cupola

- Le tensioni che agiscono lungo i meridiani crescono dalla chiave all'imposta dal valore $0.5wR$ al valore wR .



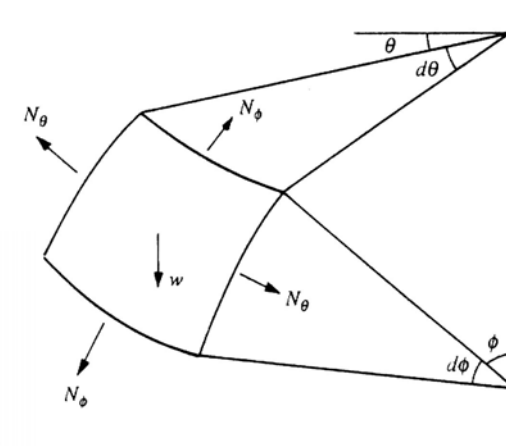
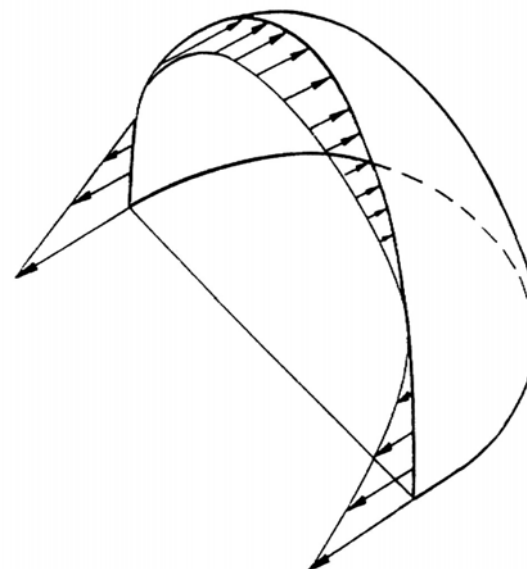
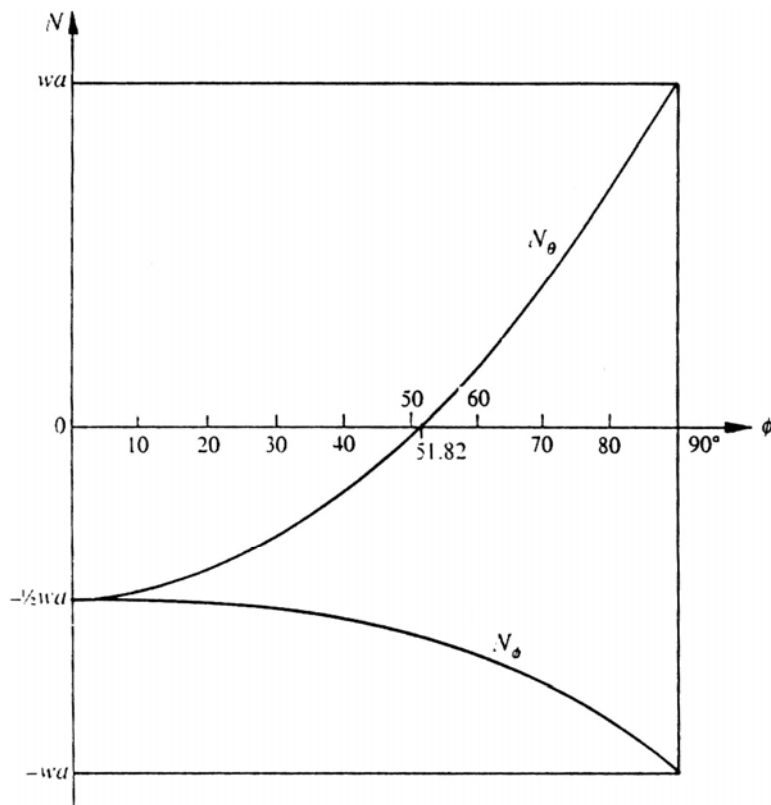
Le tensioni nella cupola

- I paralleli sono compressi in chiave ($\sigma = 0.5 wR$) e tesi all'imposta ($\sigma = -wR$) con tensioni costanti lungo uno stesso parallelo



Le tensioni nella cupola

- L'azione di cerchiatura svolta dai paralleli annulla le spinte dei meridiani



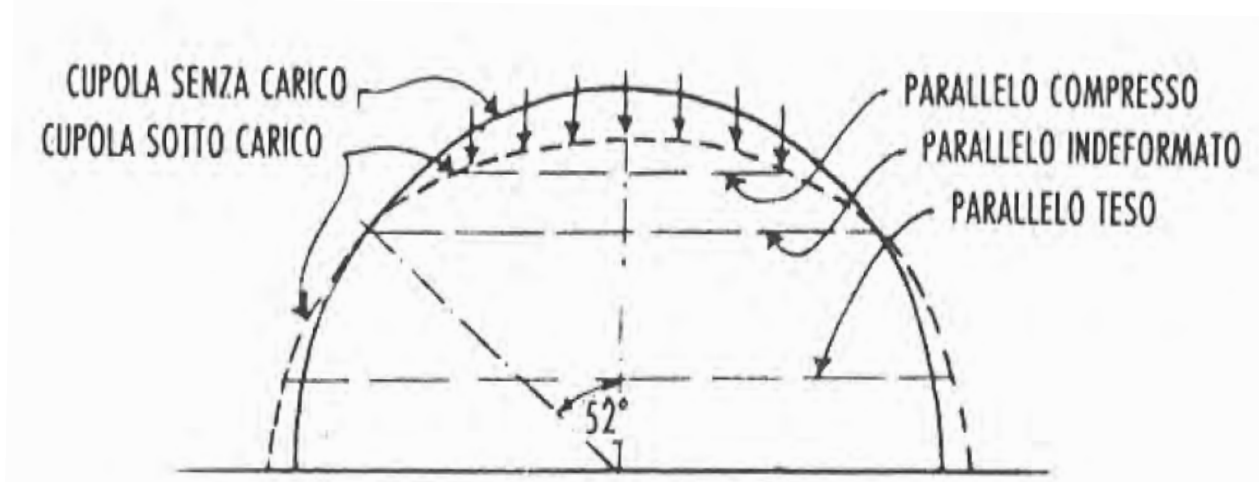


Differenze tra arco e cupola

- Nell'arco la linea delle pressioni si modifica al variare dei carichi applicati all'arco (come la catenaria di Hooke si deforma per effetto dei carichi ad essa applicati)
- L'arco è funicolare per una sola condizione di carico
- I meridiani di una cupola sono funicolari per qualunque condizione di carico simmetrica per l'azione di cerchiatura svolta dai paralleli

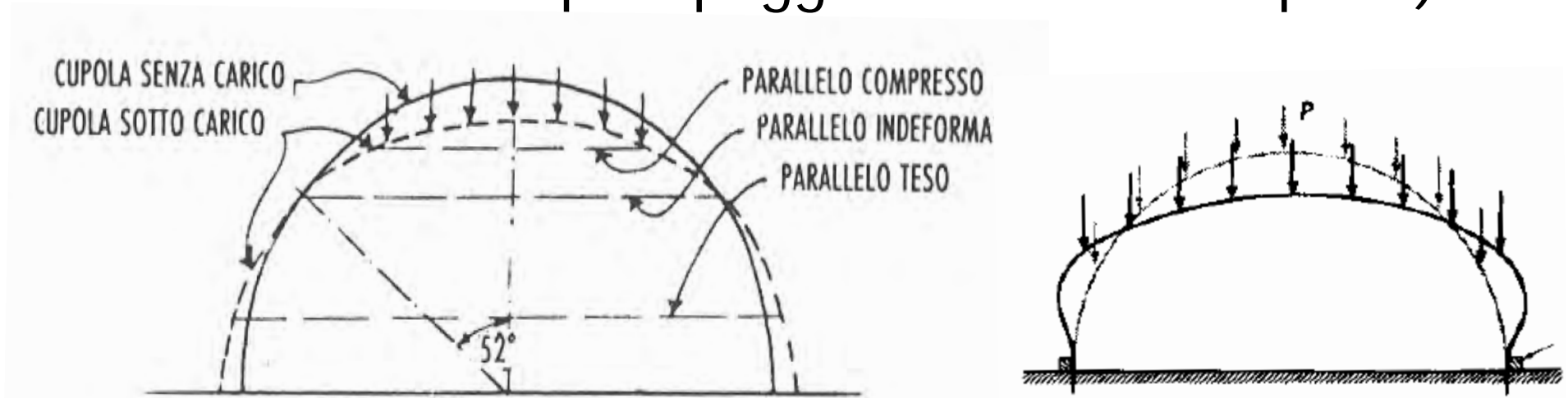
Le tensioni nella cupola

- La deformazione in sommità non è impedita pertanto si può sviluppare uno stato puro di tensione di membrana
- Affinché uno stato puro di tensione di membrana si sviluppi al bordo è necessario che questo si possa spostare verso l'esterno



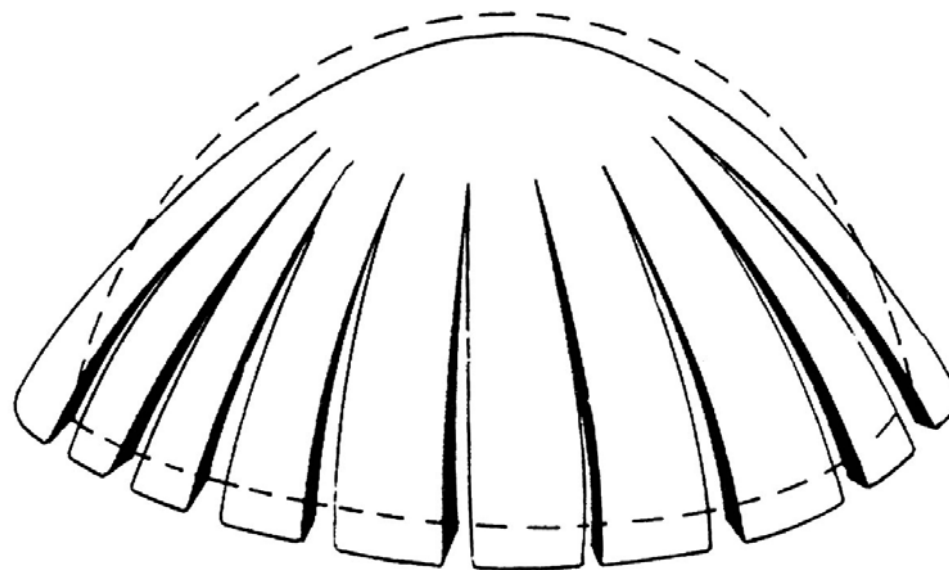
Le tensioni nella cupola

- Se questo non avviene (come è in realtà) una sollecitazione di flessione si produce in prossimità del bordo
- Ciò avviene ogniqualvolta le reazioni al contorno non sono tangenti ai meridiani (ad es. se la cupola poggia solo su alcuni punti)



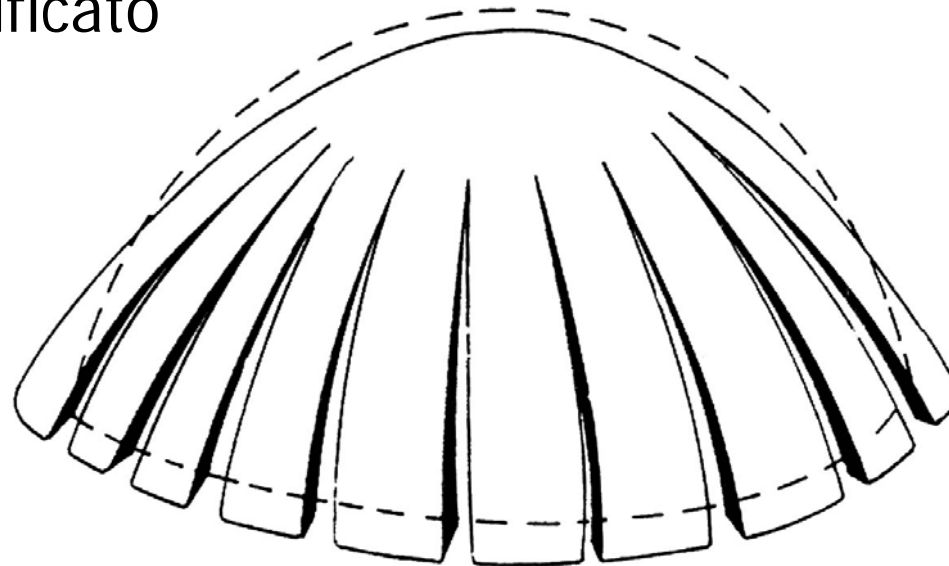
Le cupole in muratura

- In una cupola in muratura non ci si può aspettare che l'azione di cerchiatura svolta dai paralleli si realizzi efficacemente



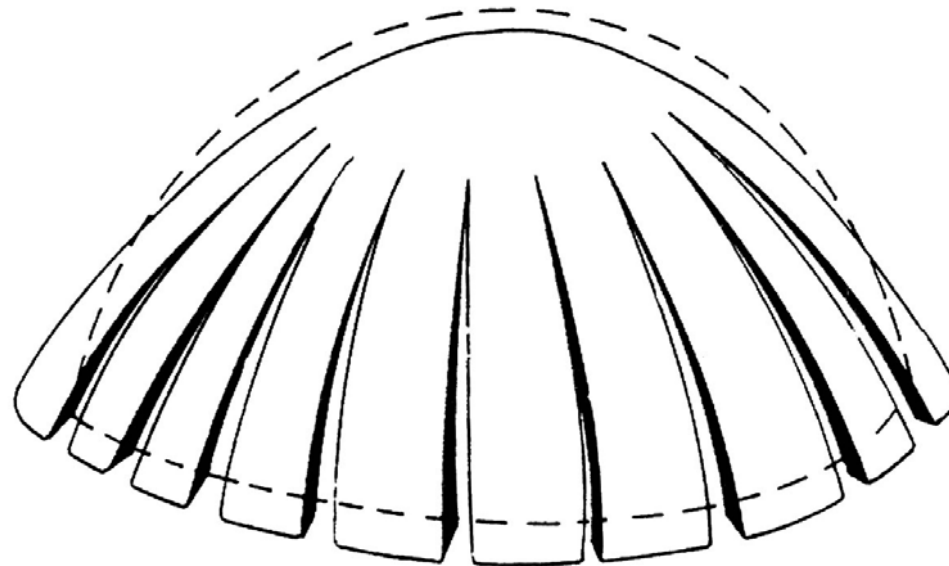
Le cupole in muratura

- Superata la resistenza a trazione della muratura (cui può contribuire l'attrito tra i blocchi) si formano lesioni nei meridiani:
 - Si annullano gli sforzi di trazione nei paralleli
 - L'ipotesi di comportamento a membrana perde significato



Le cupole in muratura

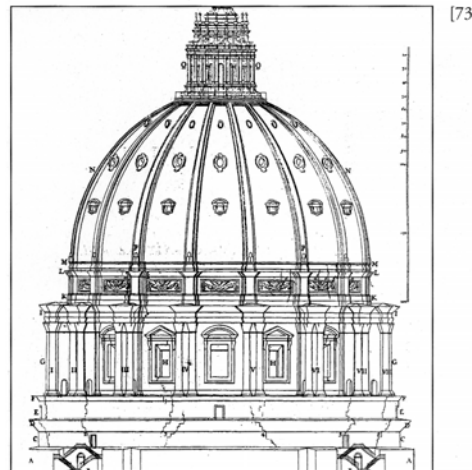
- Gli spicchi di cupola che rimangono integri si comportano come puntoni e la loro reazione inclinata si trasforma in spinta sull'imposta



Giovanni Poleni

Lo studio della cupola di S. Pietro

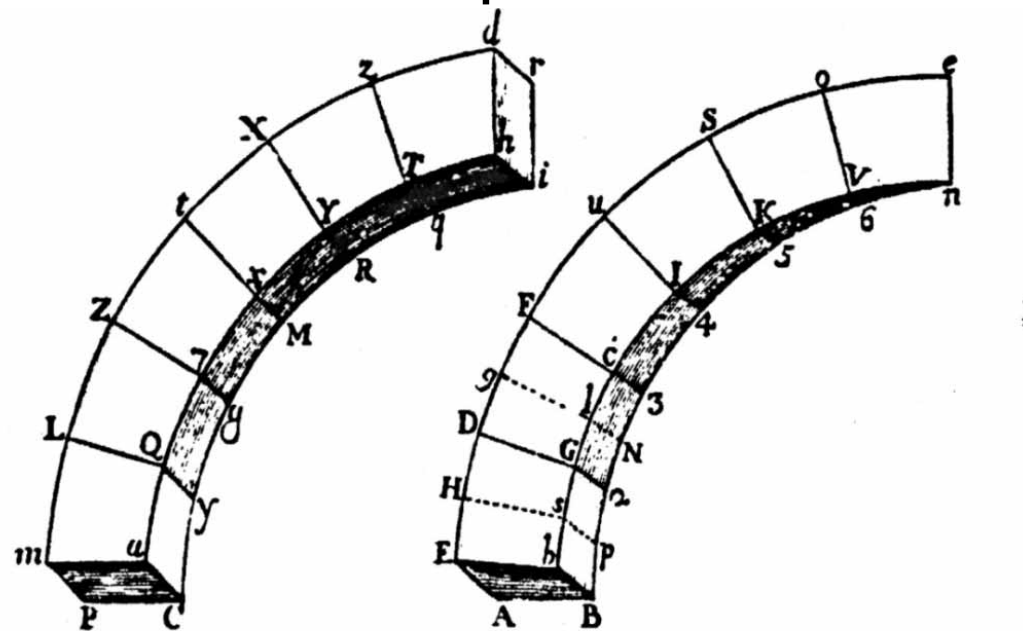
- Giovanni Poleni condusse uno studio (1748) sullo stato fessurativo della cupola di S. Pietro 200 anni dopo la sua costruzione
- Osservò che le fessure avevano diviso la cupola in spicchi semisferici
- La domanda cui dare una risposta era se le fessure fossero pericolose o meno



Giovanni Poleni

Lo studio della cupola di S. Pietro

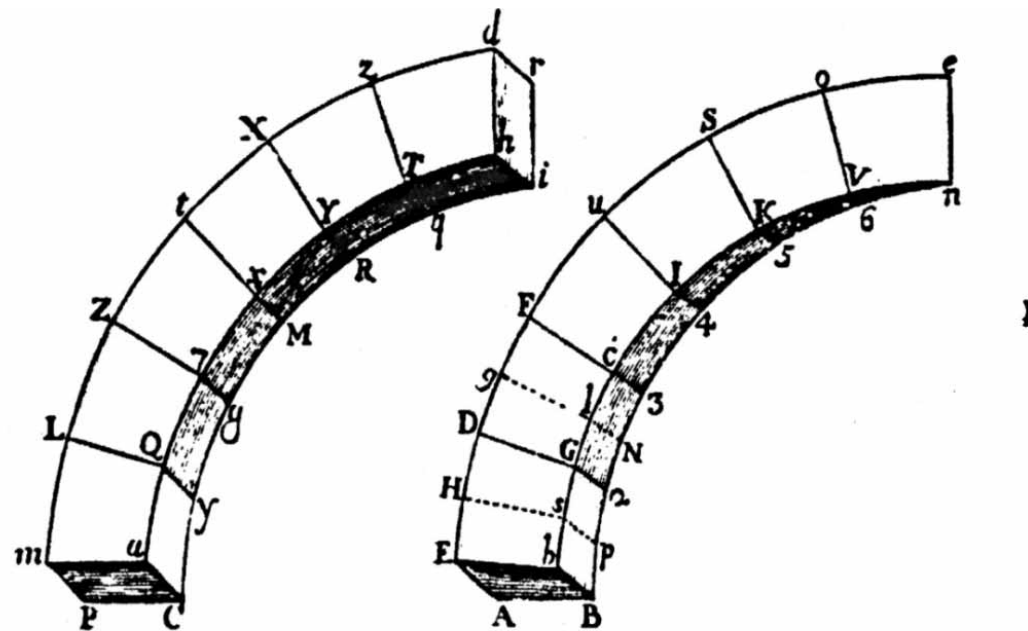
- La condizione di partenza era che la condizione di stabilità della volta risiedesse nel fatto che la linea delle pressioni fosse contenuta nello suo spessore



Giovanni Poleni

Lo studio della cupola di S. Pietro

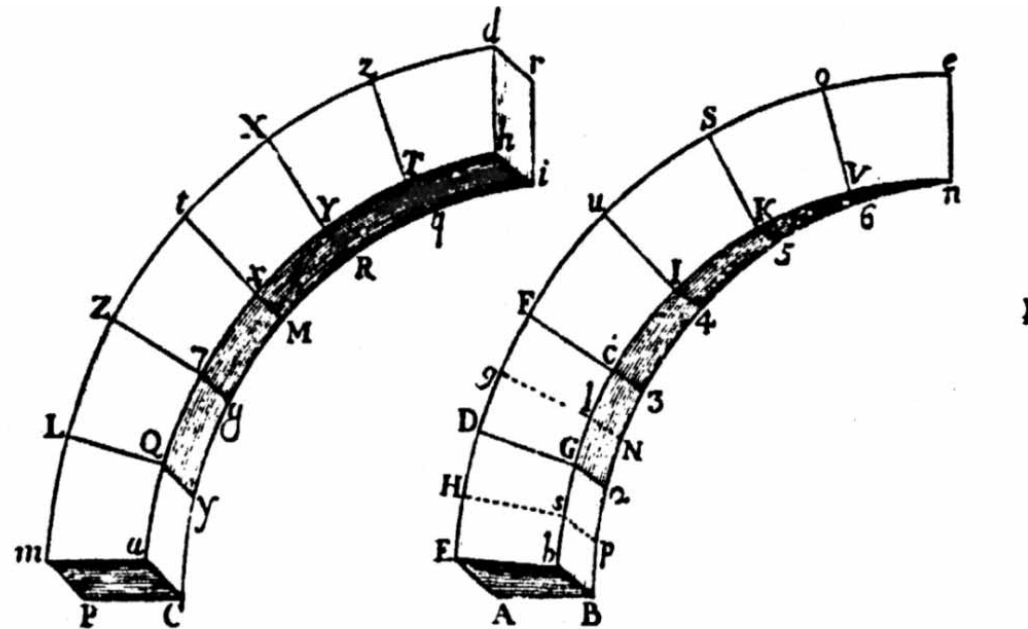
- Egli immaginò una cupola ideale costituita di un materiale cui attribuì una densità media uniforme per compensare pieni e vuoti



Giovanni Poleni

Lo studio della cupola di S. Pietro

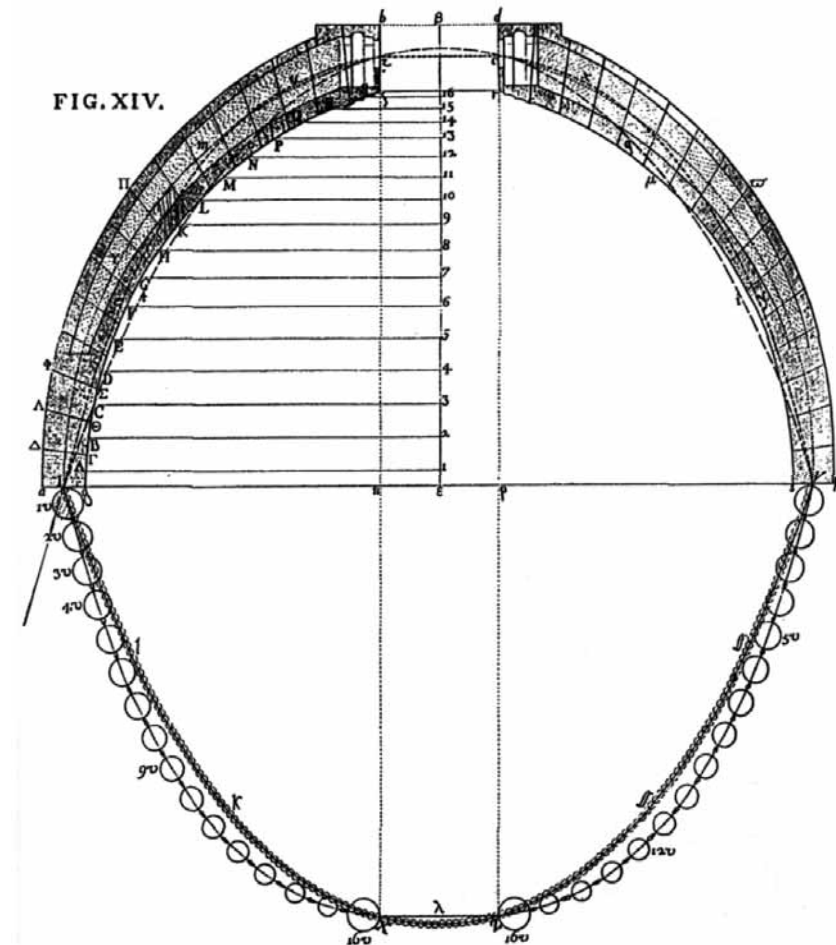
- Divise il solido ideale in 50 spicchi corrispondenti a 25 archi e studiò l'equilibrio dell'arco quasi-bidimensionale formato da uno di questi spicchi.



Giovanni Poleni

Lo studio della cupola di S. Pietro

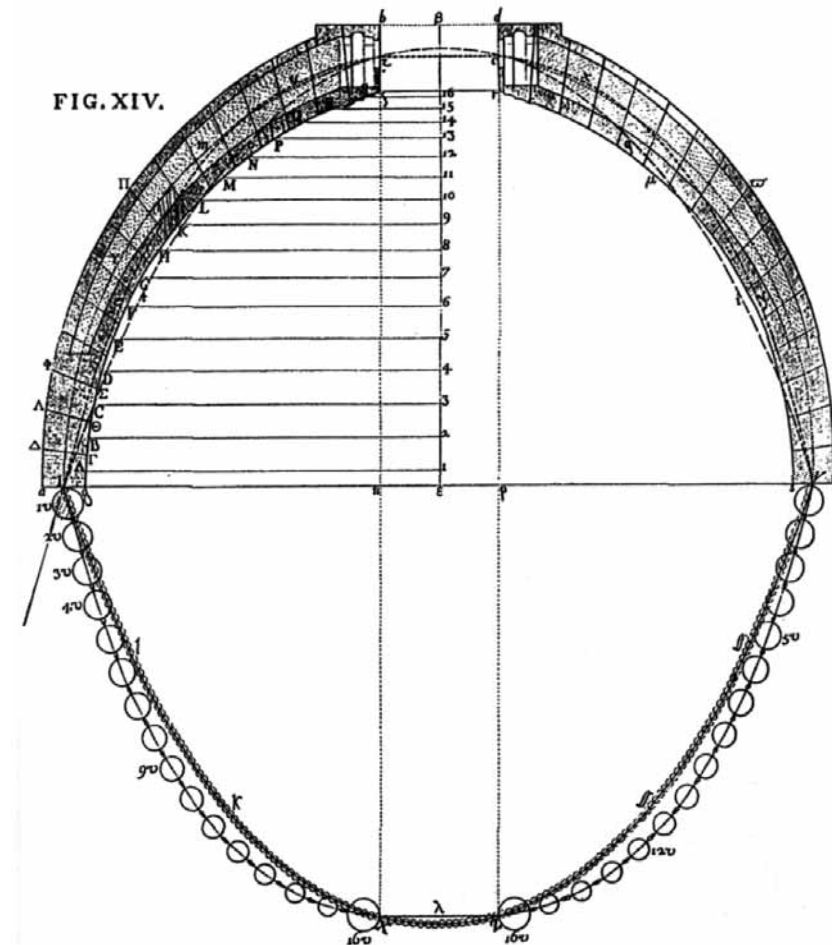
- A ciascun arco Poleni attribuì il peso complessivo di 2 milioni di libbre cui aggiunse il peso di 160000 libbre della lanterna
- Divise ciascun semiarco in 16 parti



Giovanni Poleni

Lo studio della cupola di S. Pietro

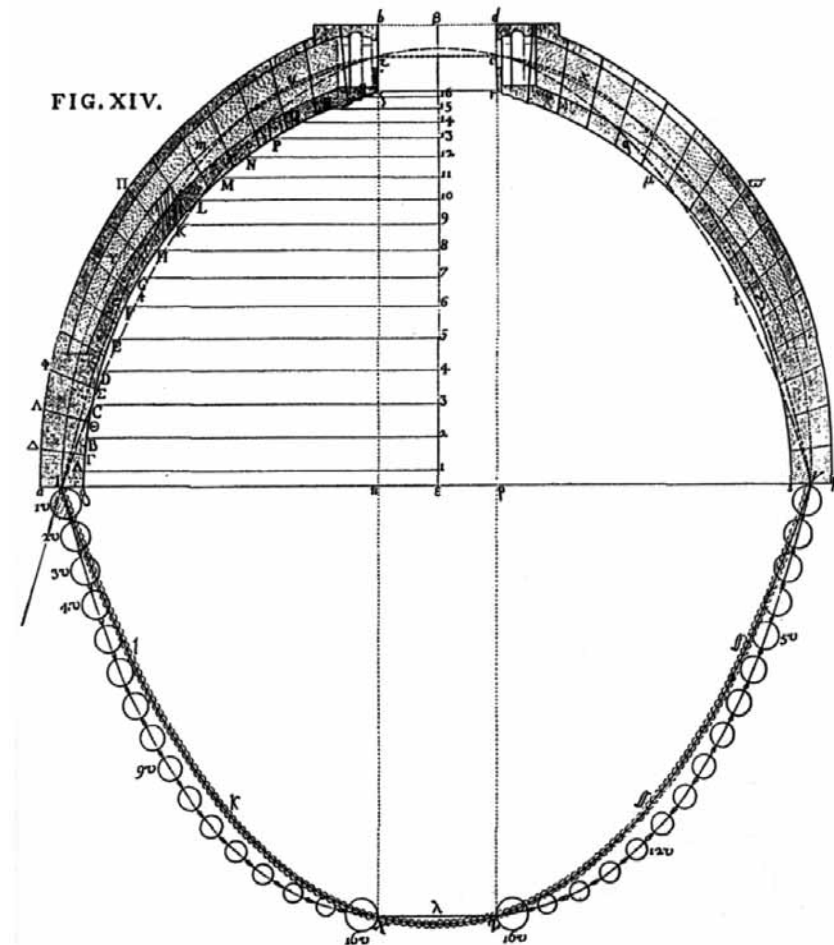
- Facendo riferimento alla catenaria di Hooke caricò una corda flessibile con 32 pesi diseguali corrispondenti alla sezione dell'arco
- L'inversione della catenaria sembrava effettivamente essere contenuta nello spessore dell'arco



Giovanni Poleni

Lo studio della cupola di S. Pietro

- Con questo modello ottenne la curva dell'equilibrio che fece passare per 4 punti:
 - I centri delle 2 sezioni di imposta
 - I centri delle 2 sezioni corrispondenti al vano della lanterna





Giovanni Poleni

Lo studio della cupola di S.Pietro

- Poleni concluse:

- “ E per dir breve, in questo esame fatto con la catenaria, il punto principale consisteva nel vedere, se veramente alcuna parte della catenaria cadesse fuori de' contorni della volta...”
- “...in un certo modo convalidata resta anche la proposizione, in cui costituito abbiamo, che per non cattiva la figura della gran volta riputar si debba”

Giovanni Poleni

Lo studio della cupola di S.Pietro

- Ma uno scostamento della catenaria dalla sagoma dell'arco avrebbe significato l'impossibilità di un equilibrio che in realtà si realizzava
- Per ottenere la curva funicolare Poleni fu costretto a farla passare per 4 punti
- La soluzione che egli ottenne era una delle soluzioni possibili



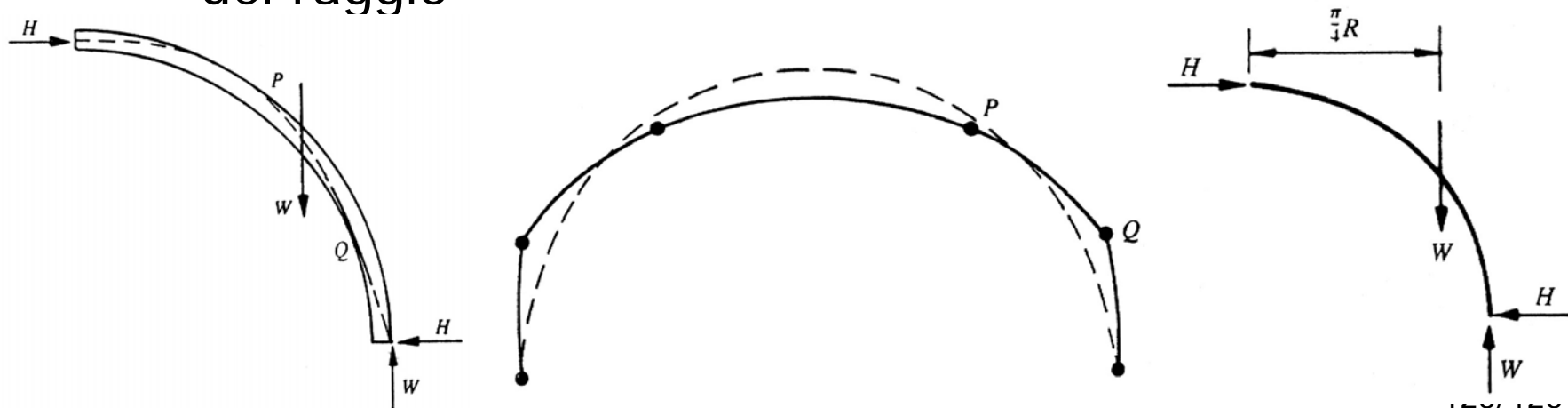
Giovanni Poleni

Lo studio della cupola di S.Pietro

- Per escludere che lo stato della cupola potesse peggiorare ritenne necessario inserire delle catene
- L'inclinazione della catenaria in corrispondenza delle imposte rivelava la presenza di spinte che dovevano essere contenute

Spessore minimo della cupola

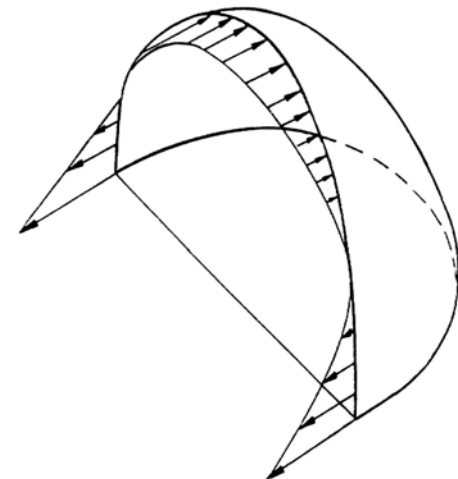
- La posizione limite della linea delle pressioni tocca l'estradosso in P e l'intradosso in Q e passa attraverso l'estradosso alla base
- Dalla condizione di equilibrio alla rotazione si ottiene la spinta orizzontale $H = (1 - \pi/4)W = 0.215W$
- In una cupola emisferica lo spessore minimo è il 4.2% del raggio



Posizione limite della curva delle pressioni e meccanismo di collasso corrispondente

Cupole emisferiche incomplete

- In un arco la mancanza dei conci in chiave determina il collasso dell'arco stesso
- Nella cupola le tensioni si distribuiscono in più direzioni pertanto una volta che un cerchio è stato completato è stabile senza supporto
- Metà cupola è stabile quando è soggetta a forze orizzontali sbilanciate



Cupole emisferiche incomplete

- Una cupola emisferica incompleta può essere utilizzata come contrafforte
- La cupola principale di Hagia Sofia (32 m di luce) è sostenuta a est e a ovest da 2 semicupole secondo uno dei sistemi bizantini di sostegno delle alte cupole



(a) (b) (c)
Sistemi bizantini di sostegno delle alte cupole





Cupole emisferiche incomplete

- Se lo spessore è sufficiente per sostenere metà cupola allora lo è anche per sostenere tre quarti di cupola
- La cupola principale di Hagia Sofia si è trovata 2 volte in queste condizioni:
 - dopo il terremoto del 986 che causò il collasso della semicupola occidentale e di un quarto della cupola principale
 - dopo il terremoto del 1346 che causò il collasso della semicupola orientale con il quarto corrispondente di cupola principale