PROCESSI STOCASTICI MA(q)

I MODELLI MEDIA MOBILE SONO STATI INTRODOTTI DOPO QUELLI AR PER LA DIFFICOLTÀ DI INTERPRETARE UN FENOMENO DINAMICO COME LA RISULTANTE DI UNA COMBINAZIONE LINEARE DI PROCESSI WN

$$Y_t = W_t - \theta_1 W_{t-1} - \theta_2 W_{t-2} - \ldots - \theta_q W_{t-q}$$

LA SINGOLA OSSERVAZIONE AD UN DATO ISTANTE TEMPORALE

↓

COMBINAZIONE LINEARE DI Q IMPULSI ALEATORI PRECEDENTI
E DI UNO SHOCK CASUALE ALLO STESSO TEMPO

consideriamo l'operatore ritardo B e indichiamo con

$$\Theta(\mathrm{B}) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots\ldots \theta_q B^q$$

APPLICHIAMO TALE FUNZIONE A Y_t

$$Y_t = \Theta(\mathrm{B}) W_t$$

CARATTERISTICHE DI UN PROCESSO STOCASTICO MA(q)

È SEMPRE STAZIONARIO (PER DEFINIZIONE) MA È INVERTIBILE SOLO SE L'EQUAZIONE CARATTERISTICA:

$$\Theta\left(B\right) = 0$$

CHE SI VERIFICA QUANDO LE RADICI ($i=1,\ldots,q$) IN MODULO SONO TUTTE MAGGIORI DI UNO $\left|B_i\right| > 1$

PARAMETRI

MEDIA

$$E(Y_t) = E(W_t - \theta_1 W_{t-1} - \theta_2 W_{t-2} - \ldots - \theta_q W_{t-q}) = 0$$

dopo una serie di impulsi casuali (indipendenti) si ritorna al valore medio

VARIANZA

$$\begin{aligned}\gamma_o &= Var(Y_t) = E(Y_t)^2 \\ &= E(W_t - \theta_1 W_{t-1} - \theta_2 W_{t-2} - \ldots - \theta_q W_{t-q})^2 = \\ &= \sigma_w^2 (1 + \theta_1^2 + \ldots + \theta_q^2)\end{aligned}$$

AUTOCORRELAZIONE

$$\rho_k = 1 \qquad \forall k=0$$

$$\rho_k = 0 \qquad \forall k>q$$

la funzione di autocorrelazione parziale tende a 0

PROCESSO STOCASTICO MA(1)

$$Y_t = W_t - \theta_1 W_{t-1} \rightarrow Y_t = (1 - \theta_1 B) W_t$$

$$(1 - \theta_1 B) = 0 \rightarrow \mathrm{B} = \frac{1}{\theta_1}$$

È INVERTIBILE $(|B_1| > 1)$ SE: $|\theta_1| < 1$

PARAMETRI

VALORE ATTESO

$$\mathrm{E}(Y_t) = \mathrm{E}(W_t - \theta_1 W_{t-1}) = 0$$

È SEMPRE STAZIONARIO

FUNZIONE DI AUTOCOVARIANZA

$$\gamma_k = \mathrm{E}(Y_{t-k}, Y_t) = \mathrm{E}\left[Y_{t-k}\left(W_t - \theta_1 W_{t-1}\right)\right] =$$

$$= \mathrm{E}(Y_{t-k}, W_t) - \theta_1 \mathrm{E}(Y_{t-k}, W_{t-1})$$

$\forall k = 0$

$$\gamma_0 = \mathrm{E}\left(Y_t, W_t\right) - \theta_1 \mathrm{E}\left(Y_t, W_{t-1}\right)$$

$$\mathrm{E}\left(Y_t, W_t\right) = \mathrm{E}\left(\left(W_t - \theta_1 W_{t-1}\right) W_t\right) = \sigma_w^2$$

$$\mathrm{E}\left(Y_t, W_{t-1}\right) = \mathrm{E}\left(\left(W_t - \theta_1 W_{t-1}\right) W_{t-1}\right) = -\theta_1 \sigma_w^2$$

quindi $\forall k = 0$

$$\gamma_0 = \sigma_w^2 + \theta_1^2\sigma_w^2 = \sigma_w^2(1+\theta_1^2)$$

$\forall k = 1$

$$\gamma_1 = \mathrm{E}(Y_{t-1}, Y_t) = \mathrm{E}\left[Y_{t-1}\left(W_t - \theta_1 W_{t-1}\right)\right] =$$

$$= \mathrm{E}(Y_{t-1}, W_t) - \theta_1 \mathrm{E}(Y_{t-1}, W_{t-1})$$

$$\mathrm{E}\left(Y_{t-1}, W_t\right) = \mathrm{E}\left(\left(W_{t-1} - \theta_1 W_{t-2}\right) W_t\right) = 0$$

$$\mathrm{E}\left(Y_{t-1}, W_{t-1}\right) = \mathrm{E}\left(\left(W_{t-1} - \theta_1 W_{t-2}\right) W_{t-1}\right) = \sigma_w^2$$

quindi $\forall k = 1$

$$\gamma_1 = -\theta_1 \sigma_w^2$$

$se\ \ \theta_1 > 0 \rightarrow \gamma_1 < 0$

$se\ \theta_1 < 0 \rightarrow \gamma_1 > 0$

$$\forall k \neq 1$$
$$es.k = 2$$

$$\gamma_2 = \mathrm{E}(Y_{t-2}, Y_t) = \mathrm{E}\left[Y_{t-2}\left(W_t - \theta_1 W_{t-1}\right)\right] =$$

$$= \mathrm{E}(Y_{t-2}, W_t) - \theta_1 \mathrm{E}(Y_{t-2}, W_{t-1})$$

$$\mathrm{E}\left(Y_{t-2}, W_t\right) = \mathrm{E}\left(\left(W_{t-2} - \theta_1 W_{t-3}\right) W_t\right) = 0$$

$$\mathrm{E}\left(Y_{t-2}, W_{t-1}\right) = \mathrm{E}\left(\left(W_{t-2} - \theta_1 W_{t-3}\right) W_{t-1}\right) = 0$$

quindi $\forall k \neq 1$

$$\gamma_k = 0$$

la funzione di autocovarianza è zero $\forall k > q$

FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

se k=0 $\rightarrow \rho_0 = 1$

se k=1 $\rightarrow \rho_1 = \dfrac{-\theta_1 \sigma_w^2}{(1+\theta_1^2)\sigma_w^2} = \dfrac{-\theta_1}{(1+\theta_1^2)}$

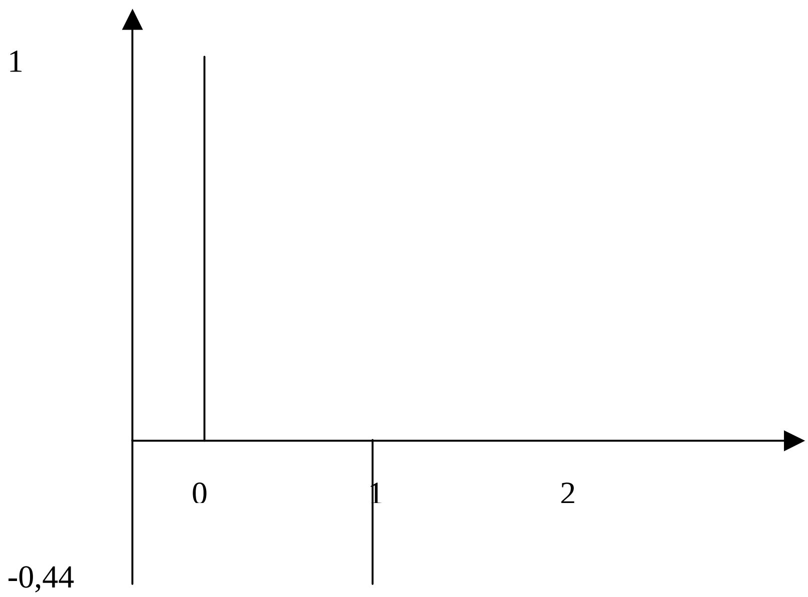
$$se \ \ \theta_1 > 0 \rightarrow \rho_1 < 0$$

$$se \ \theta_1 < 0 \rightarrow \rho_1 > 0$$

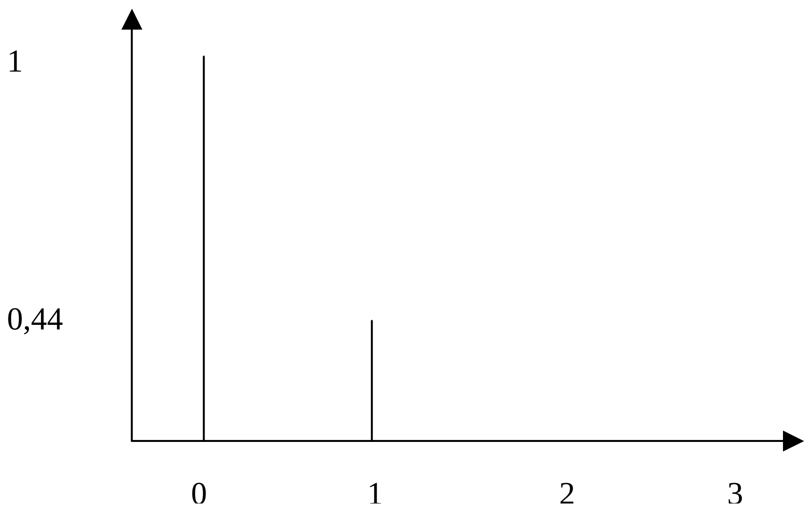
$$\forall k \neq 1 \rightarrow \rho_k = 0$$

CORRELOGRAMMA

$$\theta_1 = 0{,}6$$



$$\theta_1 = -0{,}6$$



PROCESSO STOCASTICO MA(2)

$$Y_t = W_t - \theta_1 W_{t-1} - \theta_2 W_{t-2}$$

VALORE ATTESO

$$\mathrm{E}(Y_t) = 0$$

È SEMPRE STAZIONARIO

VARIANZA

$$\gamma_o = \sigma_w^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$$

AUTOCORRELAZIONE

$$\rho_k = 1 \qquad \forall k=0$$

$$\rho_k = 0 \qquad \forall k>2$$

È INVERTIBILE SE

$$1 - \theta_1 \mathrm{B} - \theta_2 \mathrm{B}^2 = 0$$

$$|\mathrm{B}| > 1 \rightarrow \theta_1 + \theta_2 < 1 \text{ e } \theta_2 - \theta_1 < 1 \text{ e } -1 < \theta_2 < 1$$