PROCESSI STOCASTICI ARMA(p,q)

I MODELLI ARMA O MODELLI MISTI SONO STATI INTRODOTTI PERCHÉ LE CLASSI DI PROCESSI AR E MA CONSIDERATE ISOLATAMENTE SONO POCO EFFICIENTI PER UNA PARAMETRIZZAZIONE PARSIMONIOSA

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \ldots - \phi_p Y_{t-p} =$$
$$= \phi_0 + W_t - \theta_1 W_{t-1} - \theta_2 W_{t-2} - \ldots - \theta_q W_{t-q}$$

CASI PARTICOLARI

- Y_t~ARMA(p,0) ≡AR(p)
- Y_t~ARMA(0,q) ≡MA(q)
- Y_t~ARMA(0,0) ≡AR(0)≡MA(0)=WN

consideriamo l'operatore ritardo B si può quindi scrivere

$$\phi(\mathrm{B})Y_t = \phi_0 + \Theta(\mathrm{B})W_t$$

E'STAZIONARIO SE TUTTE LE p RADICI SONO IN MODULO >1
E' INVERTIBILE SE TUTTE LE q RADICI SONO IN MODULO >1

FUNZIONE DI AUTOCOVARIANZA E DI AUTOCORRELAZIONE

FINO A q $\longrightarrow$ funzione di autocovarianza e di autocorrelazione dipendono da AR e MA

PER $K>q$ $\longrightarrow$ funzione di autocovarianza e di autocorrelazione dipendono solo da AR. La funzione di autocorrelazione globale tende a zero (e dipende dai parametri dell'AR), la funzione di autocorrelazione parziale tende a zero in maniera esponenziale

PROCESSO STOCASTICO
ARMA(1,1)

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + W_t - \theta_1 W_{t-1}$$

-IL PROCESSO E' STAZIONARIO SE $|\phi_1| < 1$

- IL PROCESSO E' INVERTIBILE SE $|\theta_1| < 1$

VALORE ATTESO

$$E(Y_t) = \frac{\phi_0}{1-\phi_1} \longrightarrow E(Y_t) = 0 \quad \forall \phi_0 = 0$$

$$Var(Y_t) = \frac{(1+\theta_1^2 - 2\theta_1\phi_1)}{1-\phi_1^2}\,\sigma_w^2$$

FUNZIONE DI AUTOCOVARIANZA E DI AUTOCORRELAZIONE

FINO A *1* $\longrightarrow$ funzione di autocovarianza e di autocorrelazione dipendono da AR e MA

PER *K*>*1* $\longrightarrow$ funzione di autocovarianza e di autocorrelazione dipendono solo da AR. La funzione di autocorrelazione globale tende a zero (e dipende dai parametri dell'AR), la funzione di autocorrelazione parziale tende a zero in maniera esponenziale

PROBLEMI DI NON-STAZIONARIETÀ

☞NON-STAZIONARIETÀ IN MEDIA (fase di specifica del modello)
la non-stazionarietà in media si evidenzia generalmente con un andamento di lungo periodo (funzione di autocorrelazione globale stimata che tende a zero molto lentamente) e comporta una varianza infinita

esempio: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + W_t \rightarrow \mathrm{E}(Y_t) = \beta_0 + \beta_1 t$

METODI PER LA RIMOZIONE DELLA NON-STAZIONARIETÀ IN MEDIA
A)Considerare i residui di una funzione nota del tempo
problemi: quale funzione? previsioni?

B)Differenze successive

esempio

$$\begin{aligned}\Delta Y_t &= \beta_0 + \beta_1 t + W_t - \beta_0 - \beta_1 (t-1) - W_{t-1} \\ &= \beta_1 + W_t - W_{t-1}\end{aligned}$$

☞NON-STAZIONARIETÀ IN VARIANZA (fase di stima del modello)

esempio:

$$Var(Y_t) = c^2 \mu_t \rightarrow Log\{Var(Y_t)\}$$

$$Var(Y_t) = c\mu_t \rightarrow \sqrt{\{Var(Y_t)\}}$$

PROCESSI STOCASTICI ARIMA(p,d,q)

I PROCESSI ARIMA SONO PROCESSI ARMA DEFINITI SULLE DIFFERENZE DI ORDINE d TRA I DATI

$$Y_t \rightarrow \Delta^d Y_t$$

$$\Downarrow$$

INTUITIVAMENTE IL PROCESSO DIVENTA STAZIONARIO DOPO L'APPLICAZIONE DELL'OPERATORE DIFFERENZA d VOLTE

$$\Delta^d Y_t - \phi_1 \Delta^d Y_{t-1} - \phi_2 \Delta^d Y_{t-2} - \ldots - \phi_p \Delta^d Y_{t-p} =$$
$$= W_t - \theta_1 W_{t-1} - \theta_2 W_{t-2} - \ldots - \theta_q W_{t-q}$$

la funzione di autocorrelazione globale è significativa per un numero elevato di lag e non tende rapidamente a zero

N.B.

$\Delta^1 Y_t = Y_t - Y_{t-1} \longrightarrow$ *incrementi stazionari*

$\Delta^2 Y_t = \Delta^1 Y_t - \Delta^1 Y_{t-1} = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2} \longrightarrow$ *media e varianza cambiano nel tempo*

per d=3 il processo diventa molto regolare

CASI PARTICOLARI

$d=p=q=0 \longrightarrow Y_t \sim WN$

$d=q=0 \longrightarrow Y_t \sim AR(p)$

$d=p=0 \longrightarrow Y_t \sim MA(q)$

$d=0 \longrightarrow Y_t \sim ARMA(p,q)$

$p=0\ d=1\ q=0 \longrightarrow Y_t \sim$ *random walk* $I(1)$