

1 - Analisi modale sperimentale.

1.1 - Modi propri di una struttura e metodo della sovrapposizione modale.

I modi propri di una struttura, supposta discretizzata come un sistema ad n gradi di libertà, rappresentano un insieme di possibili deformate della struttura compatibili con i vincoli presenti su di essa. Essi costituiscono la soluzione del problema dinamico

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = 0 \quad (1.1)$$

ottenuta cercando soluzioni del tipo $\mathbf{x} = \mathbf{X} \cdot e^{i\omega t}$ (1.2). Sostituendo la (1.2) nella (1.1) si ottiene il problema omogeneo

$$(-\mathbf{M} \cdot \omega^2 + \mathbf{K}) \cdot \mathbf{X} = 0 \quad (1.3)$$

che ammette soluzioni, diverse da quella nulla, se il $\det(-\mathbf{M} \cdot \omega^2 + \mathbf{K}) = 0$. Per ogni valore ω_i , con $i=1..n$, che annulla tale determinante, si trova una soluzione \mathbf{Y}_i del problema omogeneo (1.3) che costituisce un modo proprio della struttura. I valori di tale vettore sono le ampiezze di una forma di vibrare che avviene con pulsazione ω_i . I modi propri sono linearmente indipendenti, cioè una loro combinazione lineare è nulla solo con scalari tutti nulli; inoltre essi sono ortonormali alle matrici di massa e rigidità, ovvero

$$\mathbf{Y}_i \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{Y}_k = 0 \quad i \neq k$$

$$\mathbf{Y}_i \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{Y}_k = 0 \quad i \neq k$$

In particolare quest'ultima proprietà indica che i modi propri sono energeticamente disaccoppiati, cioè un sistema che vibra ad una pulsazione ω_i , secondo un modo \mathbf{Y}_i , non possiede energia cinetica o potenziale relativa a modi diversi da quello sopra indicato.

In altre parole, l'energia totale del sistema può essere considerata come somma delle energie associate ai singoli modi propri, come se questi agissero indipendentemente, anche nel caso in

cui il moto reale sia ottenuto come sovrapposizione contemporanea dei vari modi di vibrare. Su tale ipotesi si basa il *metodo della sovrapposizione modale*, secondo il quale la soluzione del problema dinamico

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{P} \quad (1.4)$$

si può ottenere come combinazione lineare dei singoli modi propri

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{a} \quad \mathbf{Y} = \{\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n\}$$

secondo il vettore \mathbf{a} , funzione del tempo, il cui generico elemento, $\mathbf{a}_i(t)$, definisce l'entità della partecipazione del modo di vibrare \mathbf{Y}_i , nella risposta del moto reale \mathbf{X} .

Sfruttando le proprietà di ortonormalizzazione dei modi propri, e nell'ipotesi di smorzamento proporzionale (\mathbf{C} come combinazione lineare di \mathbf{M} , \mathbf{K} , o quantomeno un caso in cui le forze viscose sono più piccole delle forze elastiche e d'inerzia) il sistema (1.4) di n equazioni differenziali si riduce ad un sistema di n equazioni differenziali disaccoppiate, la cui singola soluzione fornisce il coefficiente $\mathbf{a}_i(t)$. Sfruttando le proprietà sopra elencate, si ottiene la i -esima equazione differenziale

$$\ddot{a}_i + \gamma_i \cdot \dot{a}_i + w_i^2 \cdot a_i = \mathbf{Y}_i^T \cdot \mathbf{P} \quad i = 1 \dots n$$

per le cui soluzioni del problema omogeneo e del forzato è possibile ipotizzare soluzioni del tipo

$$a_i = A_i \cdot e^{i\omega t}$$

Risolvendo il problema omogeneo si ottiene

$$a_i(t) = e^{-2\xi_i \cdot w_i \cdot t} \cdot \left[\left(\frac{a_{i_0}}{2} - i \frac{\xi_i \cdot w_i \cdot a_{i_0} + \dot{a}_{i_0}}{w_i \cdot \sqrt{1 - \xi_i^2}} \right) \cdot e^{i \cdot w_i \cdot \sqrt{1 - \xi_i^2} \cdot t} + \left(\frac{a_{i_0}}{2} + i \frac{\xi_i \cdot w_i \cdot a_{i_0} + \dot{a}_{i_0}}{w_i \cdot \sqrt{1 - \xi_i^2}} \right) \cdot e^{-i \cdot w_i \cdot \sqrt{1 - \xi_i^2} \cdot t} \right]$$

$$\gamma_i = 2 \cdot \xi_i \cdot w_i$$

I valori di a_{i_0} e \dot{a}_{i_0} sono ricavati dalle condizioni iniziali \mathbf{X}_0 e \mathbf{V}_0 con le relazioni

$$a_{i_0} = \mathbf{Y}_i^T \mathbf{M} \mathbf{X}_0; \quad \dot{a}_{i_0} = \mathbf{Y}_i^T \mathbf{M} \mathbf{V}_0;$$

La soluzione del problema forzato è data da

$$a_i(t) = \frac{\mathbf{Y}_i^T \cdot \mathbf{P}}{(\omega_i - \omega)^2 + 2i \cdot \xi_i \cdot \omega_i \cdot \omega} \cdot e^{i\omega t}$$

Limitandosi al solo contributo del termine forzato, permanente nel tempo, si ottiene la soluzione del j-esimo grado di libertà

$$\mathbf{X}_j = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{Y}_{ij} \cdot \mathbf{Y}_i^T \cdot \mathbf{P}}{(\omega_i - \omega)^2 + 2i \cdot \xi_i \cdot \omega_i \cdot \omega} \cdot e^{i\omega t}$$

1.2 - Analisi modale sperimentale.

1.2.1 - Introduzione.

Le tecniche di analisi modale sperimentale permettono di ricavare informazioni sul comportamento dinamico di una struttura, nella fattispecie i valori delle pulsazioni di risonanza w_i , i fattori di smorzamento modale ξ_i , e le forme modali \mathbf{Y}_i . Esse consistono nella misura della risposta del sistema ad un'eccitazione nota; in sostanza si applica una forza di pulsazione w , in un punto i della struttura e se ne misura la risposta, intesa come spostamento, velocità o accelerazione, in un altro punto j . Si ottiene così una funzione complessa $H_{ij}(w)$, nella variabile w , che rappresenta la funzione di risposta in frequenza nel punto, nota anche come F.R.F. Ripetendo le misurazioni in diversi punti della struttura si ottiene la matrice di risposta in frequenza \mathbf{H} , da cui è possibile ricavare il comportamento dinamico della struttura.

Le varie tecniche di analisi differiscono per tipo di eccitazione della struttura, per numero di punti di eccitazione, o per metodi di estrazione dei parametri modali. Riguardo al tipo di eccitazione esistono due principali categorie. La prima comprende eccitazioni di tipo random e di tipo impulsivo, necessitando per l'estrazione dei parametri modali l'uso di tecniche di analisi FFT dei segnali. La seconda comprende invece eccitazioni di tipo sinusoidale con la quale si ottiene una buona qualità della FRF richiesta, che deve però essere costruita per punti con l'ausilio di un software. Quest'ultimo metodo viene utilizzato per lo studio delle non linearità nel comportamento della struttura. Un'ulteriore differenza tra i metodi usati è data dal numero di punti di eccitazione. Sebbene l'uso di un solo punto di eccitazione sia più semplice, l'utilizzo di più punti di eccitazione simultanei permette di distribuire in maniera più uniforme l'energia nella struttura, ottenendo una risposta più uniforme, ed eliminando la probabilità di perdere la visualizzazione di modi propri qualora questi vengano eccitati in corrispondenza dei loro nodi. In tutti i metodi descritti la FRF viene calcolata servendosi delle funzioni di *autocorrelazione* e di *correlazione incrociata* applicate ai segnali di *risposta* (uscita) ed *eccitazione* (ingresso) della struttura. Dato un segnale $x(t)$ si definisce autocorrelazione la funzione

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x(t+\tau) \cdot dt$$

ed indica quanto il segnale è correlato con se stesso. L'autocorrelazione di una funzione periodica è periodica, mentre l'autocorrelazione di un segnale casuale tende a zero per $\tau \neq 0$. La

trasformata di Fourier di $R_{xx}(\tau)$ è detta *densità di potenza spettrale* (PSD) e si indica di solito con $S_{xx}(w)$

$$S_{xx}(w) = \mathbf{F}\{R_{xx}(\tau)\}$$

La funzione $S_{xx}(w)$ è legata alla trasformata di Fourier di $x(t)$ dalla relazione:

$$S_{xx}(w) = X^*(w) \cdot X(w) = |X(w)|^2$$

Essa è una funzione reale e contiene le informazioni sulle frequenze presenti in $x(t)$ ma non quelle sulle fasi. Si definisce invece, *correlazione incrociata* di due segnali $x(t)$ e $y(t)$ la funzione $R_{xy}(\tau)$ definita come

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot y(t+\tau) \cdot dt$$

che indica quanto i due segnali sono correlati tra loro. La trasformata di Fourier di R_{xy} è detta *densità di spettro incrociato* (CSD) e si indica di solito con $S_{xy}(w)$

$$S_{xy}(w) = \mathbf{F}\{R_{xy}(\tau)\}$$

La funzione $S_{xy}(w)$ è legata alla trasformata di Fourier di $x(t)$ e $y(t)$ dalla relazione:

$$S_{xy}(w) = X^*(w) \cdot Y(w)$$

Essa è una funzione complessa nella variabile w e contiene informazioni sulla frequenza e sulle fasi. Indicando quindi con $f(t)$ l'eccitazione della struttura e con $x(t)$ la sua risposta, si definisce *funzione di risposta in frequenza*, o FRF, la funzione $H(w)$ ottenuta come rapporto delle loro trasformate di Fourier:

$$H(w) = \frac{X(w)}{Y(w)}$$

Per diminuire gli errori di misura si impiegano degli stimatori della FRF. Si hanno quindi lo stimatore H_1 definito come:

$$H_1(\omega) = \frac{S_{fx}(\omega)}{S_{ff}(\omega)}$$

che minimizza gli effetti dei disturbi sull'uscita, e lo stimatore H_2 definito come:

$$H_2(\omega) = \frac{S_{xx}(\omega)}{S_{xf}(\omega)}$$

che invece riduce gli effetti dei disturbi all'ingresso. In assenza di errori di misura sarebbe $H_1(\omega) = H_2(\omega) = H(\omega)$. Per giudicare l'attendibilità della misura si può usare la funzione coerenza $\gamma^2(\omega)$ definita come:

$$\gamma^2(\omega) = \frac{|S_{fx}(\omega)|^2}{S_{ff}(\omega) \cdot S_{xx}(\omega)} \quad 0 \leq \gamma^2(\omega) \leq 1$$

che indica quanto la risposta è coerente con l'eccitazione. Se $\gamma^2(\omega) < 0.75$ i risultati sono poco attendibili cioè il rapporto segnale/rumore è basso. Altre cause che danno luogo a bassi valori della coerenza sono:

- Presenza eccitazioni che però non vengono misurate.
- Comportamento non lineare del sistema.

1.2.2 - Tipi di eccitazione nell'analisi modale sperimentale.

I segnali d'eccitazione più comunemente usati nell'analisi modale sperimentale possono essere divisi in due principali categorie: segnali contenenti uno spettro di frequenze e segnali contenenti una singola frequenza. I segnali della prima categoria possono essere divisi in tre sottogruppi: *segnali periodici* (**pseudo random, periodic random, chirp**), *non periodici* (**pure random**) e *transitori* (**burst random, burst chirp, impatto**); i segnali della seconda categoria sono invece di tipo *sinusoidale* (**swept sine, stepped sine**). Si riportano di seguito alcune proprietà delle *funzioni aleatorie* o *random*. Data una variabile aleatoria $x(t)$ si definisce *densità di distribuzione di probabilità* la funzione $p(x)$ col seguente significato fisico: $p(x)dx$ rappresenta la probabilità che al tempo t_0 la variabile $x(t)$ abbia valori compresi tra x e $x+dx$ e si indica con

$$p(x)dx = \text{Prob}[x \leq x(t_0) \leq x+dx]$$

La *funzione distribuzione di probabilità* $P(x)$, che rappresenta la probabilità che $x(t_0)$ abbia valori compresi tra $-\infty$ e x è data da

$$P(x) = \int_{-\infty}^x p(x)dx$$

Il *valore atteso* in senso statistico della variabile aleatoria $x(t)$ è dato da

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x)dx$$

Un'importante classe di valori attesi è quella delle potenze di una o più variabili aleatorie; tali valori attesi sono chiamati *momenti*. Particolare importanza assume $E(x^2)$ che esprime la media dei valori di $x(t)$ elevato al quadrato, detta anche *valore quadratico medio* (RMS); esso indica di x e si indica

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx$$

Un processo aleatorio dipendente dal tempo è rappresentato dall'insieme delle possibili funzioni aleatorie $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, dette funzioni "campione". Per descrivere "statisticamente" il segnale $x(t)$ si può esaminare la distribuzione dei valori $x(t_1)$ che le varie funzioni campione hanno al tempo $t=t_1$. La grandezza $x(t_1)$ viene considerata una variabile aleatoria per la quale può essere definita una *funzione distribuzione di probabilità di primo ordine*. Analogamente si può fare per l'insieme dei valori al tempo t_2 . Conoscendo le distribuzioni statistiche ai tempi t_1 e t_2 può essere definita anche la *distribuzione di probabilità del secondo ordine* o *distribuzione congiunta*, che rappresenta il legame statistico tra queste due variabili aleatorie. Essa può essere funzione sia di t_1 , sia di t_2 o dalla differenza $\tau = t_1 - t_2$. Col termine *stazionario* si indica che le funzioni di distribuzione di probabilità di ordine superiore al primo non dipendono dal valore assoluto del tempo ma solo dalla differenza dei tempi, indicata con τ ; col termine *ergodico* invece si indica un processo stazionario in cui le medie fatte su una singola funzione campione al variare del tempo sono indipendenti dalla funzione campione; in altre parole una funzione campione è completamente rappresentativa dell'insieme delle funzioni campione. Fatta questa premessa si analizzano i fattori che influenzano la scelta del tipo di segnale.

Primo fra tutti la disponibilità e complessità delle attrezzature; essa può essere costituita da un semplice martello strumentato nel caso di eccitazione d'impatto, oppure dall' "insieme" costituito da generatore di segnale controllabile in frequenza e ampiezza, amplificatore di potenza, eccitatore (*shaker*), e connessione tra struttura e eccitatore nel caso di eccitazioni di tipo sinusoidale. In secondo luogo bisogna considerare il tempo di misurazione connesso al tipo di segnale scelto; un tipo di eccitazione che, per ricostruire la FRF, scandisce frequenza per frequenza l'intervallo di interesse (stepped sine) richiede più tempo di una che contiene al suo interno tutte le frequenze di interesse (burst random). D'altro canto l'uso di segnali di quest'ultimo tipo comporta la necessità di operare con grandezze medie al fine di ottenere una stima attendibile della FRF. Bisogna considerare inoltre che la complessità dell'attrezzature connesse al tipo di segnale richiede degli adeguati tempi di set-up, che in casi particolari possono essere maggiore del tempo di misurazione. Un altro parametro è costituito dalla sensibilità del segnale d'eccitazione agli errori. Il più importante errore è costituito dal *leakage*. Esso è una distorsione dello spettro dovuta all'applicazione di tecniche FFT a segnali non periodici nel tempo di campionamento. Sono segnali periodici dei segnali che non presentano discontinuità all'inizio o alla fine di tale tempo e vengono ripetuti indefinitamente al suo esterno. Segnali con tali caratteristiche sono quelli contenuti interamente nel tempo di campionamento, o segnali ciclici che al suo interno completano un numero intero di cicli. Quindi se il segnale di risposta della struttura ad un'eccitazione decade a zero (o vicino allo zero) prima della fine del tempo di

campionamento non vi sarà *leakege* nello spettro. Bisogna inoltre tenere conto, nella scelta del tipo d'eccitazione, del comportamento della struttura; strutture con caratteristiche non lineari presenteranno una FRF che dipende dal tipo e dal livello del segnale d'eccitazione. In tal caso, se l'obbiettivo della prova è cercare una stima lineare del comportamento della struttura, è auspicabile utilizzare segnali d'eccitazione che agiscono in un intervallo in cui la non linearità non si manifesta. Ciò significa evitare segnali con un basso rapporto picco-RMS, tipico dei segnali impulsivi. Se invece lo scopo della prova è caratterizzare il comportamento non lineare della struttura è preferibile utilizzare segnali d'eccitazione facilmente controllabili quali quelli sinusoidali.

1.2.2.1 - Pure random.

L'eccitazione *pure random* è un segnale aleatorio non periodico con una distribuzione di probabilità gaussiana. Il suo spettro presenta tutte le frequenze contenute in una specifica banda, ed essendo definito in maniera aleatoria è essenziale l'uso di un processo di media delle misure per stimare la FRF. Per effetto del basso rapporto tra picco-RMS, l'eccitazione pure random permette di eliminare facilmente il rumore; inoltre fornisce una buona approssimazione lineare di un sistema non lineare in quanto, effettuando un numero sufficiente di medie, gli effetti non lineari del sistema eccitati casualmente tenderanno a autocompensarsi. Un'altra caratteristica positiva di tale tipo di segnale è la relativa semplicità dell'attrezzatura richiesta, costituita da un generatore esterno di rumore. Il principale problema di questo tipo d'eccitazione è costituito dal *leakage*. Essendo il segnale non periodico nel tempo di osservazione tale errore non può essere evitato. L'uso di "dedicati" filtri nel dominio tempo (Hanning), non può rimuovere completamente l'effetto di tale disturbo, causando effetti indesiderati quali una diminuzione della frequenza di risoluzione. Un minor inconveniente è costituito tempo di prova relativamente lungo per effetto delle medie richieste per una buona stima della FRF. La figura 1.1 mostra le principali caratteristiche di questo segnale.

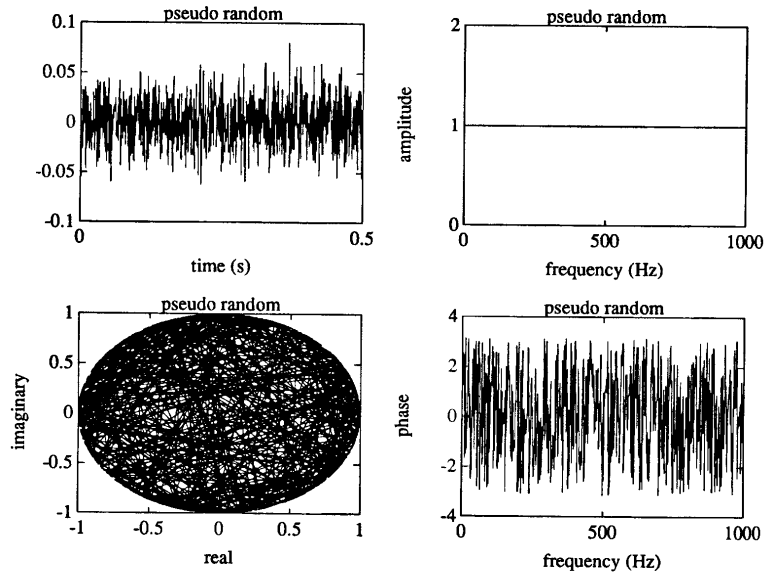


Fig.3: Pseudo random: time and frequency content

Figura 1.1: Pure random: contenuto temporale ed in frequenza.

1.2.2.2 – Pseudo random.

L'eccitazione pseudo random è un segnale stazionario ergodico, con uno spettro che contiene solo multipli interi dell'incremento di frequenza presente nella sua trasformata di Fourier. Lo spettro dell'ampiezza è in genere molto piatto mentre quello della fase è casuale. La generazione di un segnale di questo tipo richiede l'uso di un hardware dedicato, quale un convertitore analogico digitale. Essendo un segnale periodico non presenta problemi di leakage, tuttavia la ripetizione dello stesso intervallo di tempo, in un processo di medie, comporta la stessa eccitazione delle non linearità della struttura, che pertanto non vengono eliminate. Comunque per strutture lineari in genere sono richieste pochi campioni, per cui tale tipo d'eccitazione risulta conveniente in termini di tempo, mostrando anche un buon rapporto tra picco-RMS. La figura 1.2 mostra le principali caratteristiche di questo segnale.

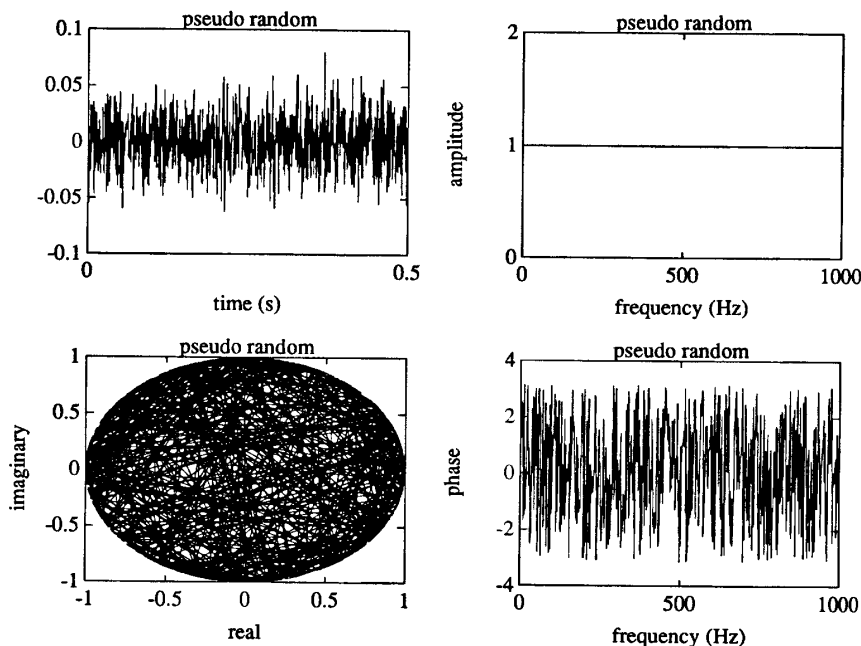


Figura 1.2: Pseudo random: contenuto temporale e in frequenza.

1.2.2.3 – Periodic random.

Simile al segnale pseudo random, l'eccitazione periodic random ha uno spettro che contiene frequenze discrete costituite da i multipli interi della risoluzione di frequenza usata nella sua FFT. Il segnale è generato unendo un numero casuale di generatori al fine di avere un contenuto in ampiezza e fase casuale. Si genera così un segnale “base” di una certa durata, la cui ripetizione in sequenza genera il segnale d'eccitazione della struttura. Per effetto della sua periodicità questo tipo d'eccitazione non presenta problemi di leakage; inoltre la variabilità tra le varie misurazioni di un processo di media, permette l'eliminazione delle non linearità eventualmente eccitate. Si ottiene pertanto una buona stima lineare di un sistema non lineare. Essendo interessati alla risposta forzata della struttura è necessario, durante una misurazione, attendere che il contributo transitorio si estingua; ciò comporta in strutture debolmente smorzate un periodo di misurazione elevato, risultando uno dei principali svantaggi di tale metodo. La figura 1.3 mostra l'andamento temporale di questo tipo d'eccitazione.

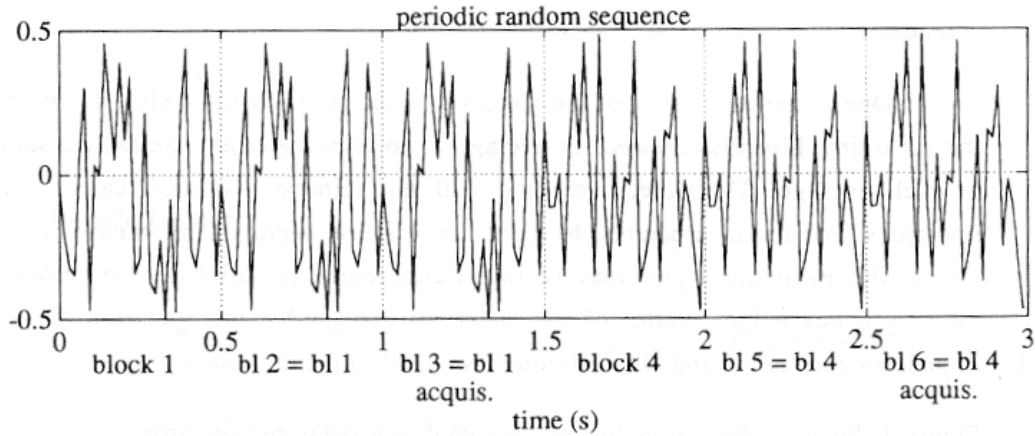


Figura 1.3: Tipica sequenza d'eccitazione periodic random.

1.2.2.4 – Periodic chirp.

Il periodic chirp è costituito da un segnale sinusoidale la cui frequenza viene variata durante il periodo d'eccitazione; tale variazione è ripetuta in maniera tale da ottenere un segnale periodico. Questo tipo di segnale può essere considerato un caso particolare del pseudo random, quindi con caratteristiche simili. Una volta estinto il contributo transitorio, la risposta della struttura a questo tipo di segnale sarà anch'essa periodica per cui non vi sono problemi di leakage. Inoltre questo tipo di segnale presenta un eccellente rapporto picco-RMS, ed un buon rapporto segnale-rumore. Tuttavia, effettuando diverse misurazioni, le non linearità della struttura vengono eccitate nella stessa maniera, per cui non possono essere eliminate con un processo di media. Un miglioramento delle caratteristiche del segnale può essere ottenuto utilizzando un unico segnale per ogni misurazione, ma con una scelta casuale dei limiti di variazione della frequenza. La figura 1.4 mostra le caratteristiche di questo tipo di segnale.

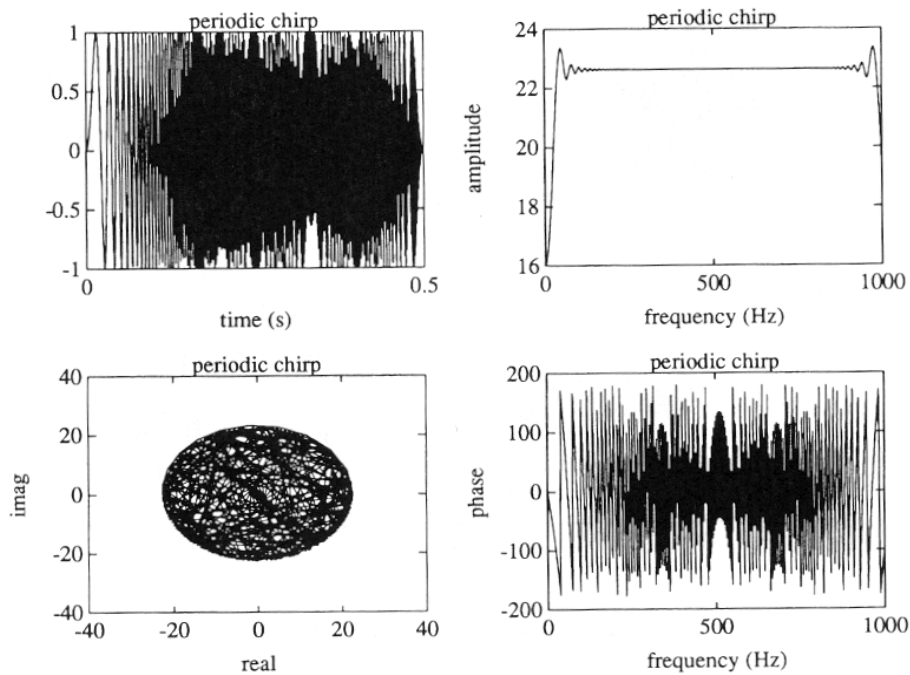


Figura 1.4: Periodic chirp: contenuto temporale ed in frequenza.

1.2.2.5 – Burst random.

Il segnale Burst random inizia come il Pure random, ma dopo un certo tempo di eccitazione viene troncato a zero in maniera tale da permettere alla struttura di completare le sue oscillazioni entro il periodo di acquisizione. Lo spettro di frequenza ha un'ampiezza e fase casuale e contiene energia in tutta la banda di frequenza d'interesse. La figura 1.5 mostra le caratteristiche di questo tipo di segnale. Il periodo di eccitazione, dopo il quale il segnale viene troncato a zero, dipende sostanzialmente dallo smorzamento della struttura in prova. Un ruolo importante è dato al tipo d'eccitazione. Infatti l'uso di uno shaker comporta che, dopo l'interruzione dell'eccitazione, la struttura, col suo transitorio di assestamento, mette in movimento lo shaker. Queste oscillazioni, per effetto del campo magnetico presente tra le armature dello shaker, generano una tensione e quindi una forza che, opponendosi a tale movimento, aumenta lo smorzamento delle oscillazioni della struttura. Pertanto, per evitare l'introduzione di errori nella stima della FRF, è necessario registrare tale forza. Il segnale Burst random ha gli stessi vantaggi del periodic random. La sua periodicità permette di minimizzare gli errori di leakage, mentre l'eccitazione casuale fornisce una buona approssimazione lineare di una struttura non lineare. Ha dei buoni rapporti segnale-rumore e picco-RMS; inoltre, essendo

che la struttura ritorna dopo l'eccitazione nelle stesse condizioni iniziali, non è necessario alcun tempo di attesa tra le acquisizioni, diminuendo così il tempo di prova. Il principale svantaggio è la necessità di una attrezzatura "dedicata" alla generazione del segnale.

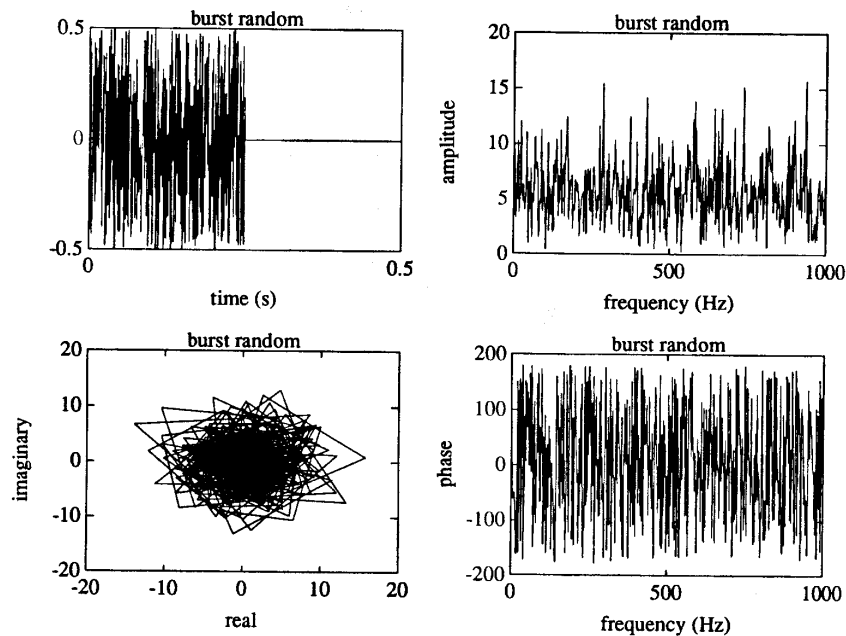


Figura 1.5: Burst random: contenuto temporale ed in frequenza.

1.2.2.6 – Burst chirp.

Il burst chirp è un segnale sinusoidale, con frequenza variabile, che similmente al burst random, viene troncato a zero nell'ultima parte del periodo d'eccitazione. Questo permette alla struttura di completare le sue oscillazioni e minimizzare gli errori di leakage. Rispetto al burst random, l'uso di un'eccitazione sinusoidale fornisce un rapporto migliore di picco-RMS e segnale-rumore; inoltre il controllo dell'ampiezza del segnale ad ogni frequenza, lo rende adatto per la caratterizzazione di sistemi non lineari. Tuttavia, una stima lineare del sistema può essere ottenuta utilizzando un unico segnale per ogni campione e scegliendo in maniera casuale la banda di variazione della frequenza. La figura 1.6 mostra le caratteristiche di questo tipo di segnale.

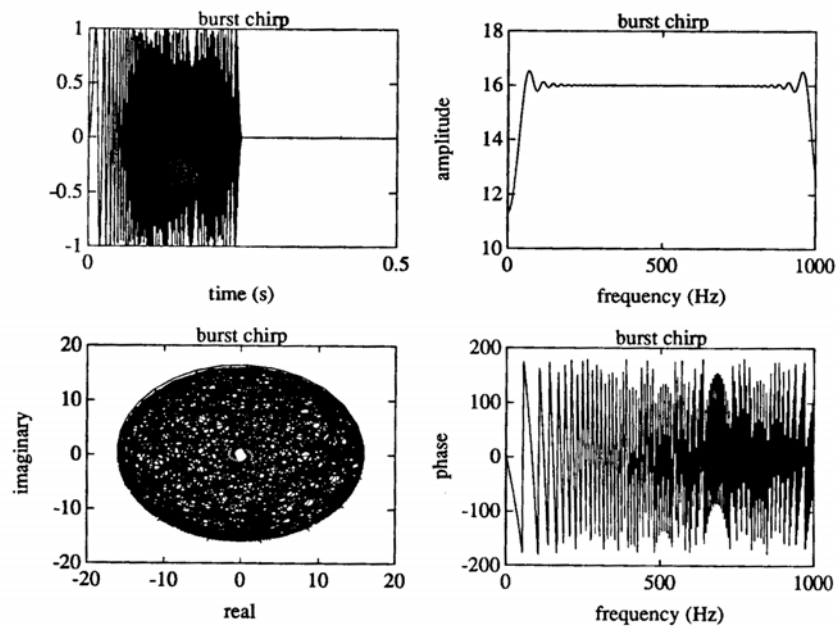


Figura 1.6: Burst chirp: contenuto temporale ed in frequenza.

1.2.2.7 – Impatto.

L'eccitazione d'impatto è un segnale transitorio, consistente in un impulso di durata molto limitata rispetto al tempo di acquisizione. La forma, e l'ampiezza dell'impulso controllano principalmente il livello dello spettro, la durata, invece influenza la larghezza di banda. La massima frequenza nello spettro è inversamente proporzionale alla durata dell'impulso. La figura 1.7 mostra le caratteristiche di questo tipo di segnale. L'impatto è il metodo più veloce per l'eccitazione di strutture lineari, inoltre richiede un'attrezzatura minima, e dei tempi di set-up limitati. Tali caratteristiche lo rendono adatto misure "sul campo" e test rapidi. L'impulso è determinato dalla forza dell'esecutore, dal peso del martello, dalla durezza della sua punta e dalla deformabilità della zona d'impatto; una superficie dura, un peso del martello contenuto e una limitata forza impressa, genereranno un impulso "stretto" e quindi una larga banda di frequenza. La prova più comune di impatto è quella definita con "martello errante". In tale prova l'accelerometro è fissato ad un punto della struttura e questa viene eccitata di volta in volta in punti diversi in maniera da riprodurre la matrice di risposta in frequenza della struttura H_{ij} e ricavarne quindi le forme modali. L'unico inconveniente di tale metodo è che i punti della struttura non possono essere eccitati in tutte le direzioni contemporaneamente. Per ovviare a ciò

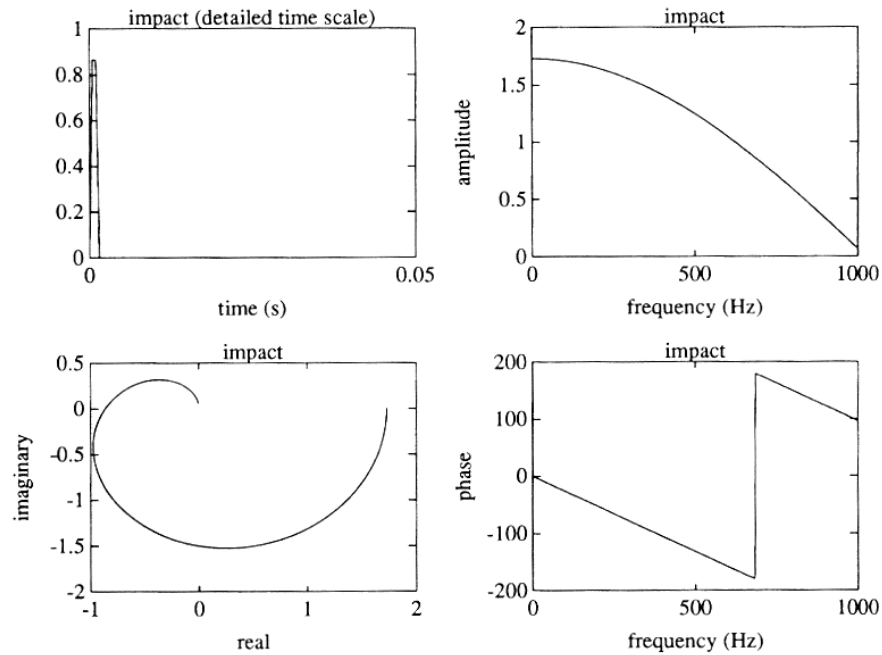


Figura 1.7: Impatto: contenuto temporale e in frequenza.

esiste una variante di tale metodo, definita come “accelerometro errante”, nella quale la struttura è eccitata ad un punto fisso con un martello, mentre un accelerometro tri-assiale mobile misura in punti diversi lo spostamento della struttura così da ricostruire una forma modale tridimensionale. I due metodi, in base al principio di reciprocità di Maxwell, sono equivalenti. Nonostante i vari vantaggi, quali velocità e semplicità, tale metodo d’eccitazione comporta alcune complicazioni. Innanzi tutto, la difficoltà nel riprodurre eccitazioni regolari con lo stesso livello, e quindi la richiesta di personale esperto. Inoltre il basso rapporto picco-RMS comporta un’elevata sensibilità a problemi di sovraccarico dei canali d’acquisizione ed eccitazione di un eventuale comportamento non lineare delle struttura. Un’altra caratteristica negativa è il basso rapporto segnale-rumore che richiede apparecchiature “dedicate” per l’analisi del segnale. Infatti il segnale d’eccitazione è diverso da zero per un breve periodo del tempo di acquisizione e uguale a zero per il restante; ciò significa che il rumore di misurazione, sparso su tutto il periodo d’acquisizione, diviene della stessa entità del segnale d’eccitazione. Per evitare ciò si usano dei particolari filtri, nel dominio tempo, quali il *Force window*, che intervenendo dopo la durata dell’impulso, azzerava il rumore di misurazione. Problemi analoghi si rilevano nell’acquisizione della risposta di strutture estremamente smorzate e periodi elevati d’acquisizione. Per strutture debolmente smorzate, si usano invece dei filtri, quali l’*Exponential window* che, introducendo uno smorzamento artificiale sulla risposta permettono l’azzerarsi delle oscillazioni nel tempo di

campionamento, minimizzando così gli errori di leakage. Sebbene questo smorzamento sia conosciuto e se ne può tenere conto in fase di analisi, molte volte comporta il decoupling di modi propri.

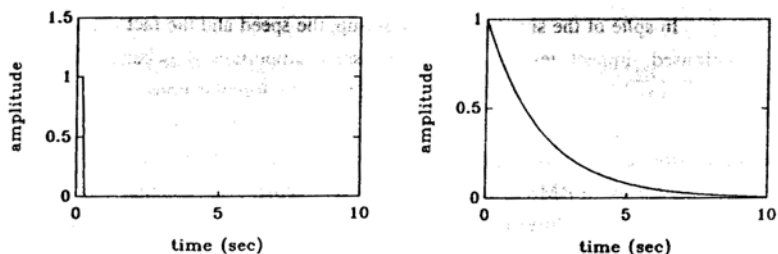


Figura 1.8: Azione del *Force window* e *exponential window*.

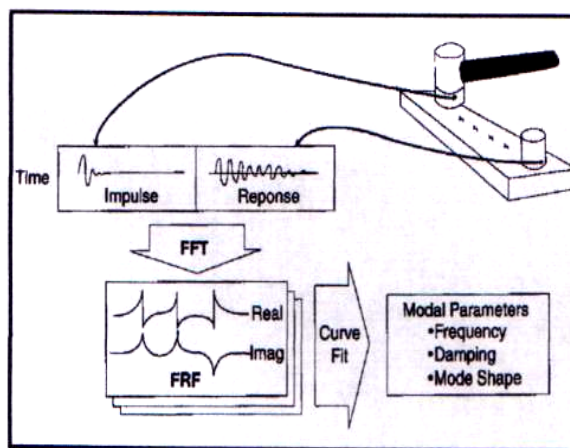


Figura 1.9: Prova con eccitazione d'impatto.

1.2.2.8 – Swept sine.

Lo swept sine è una eccitazione costituita da un segnale sinusoidale, con una lenta e continua variazione di frequenza. Esso è uno dei più antichi metodi d'eccitazione e ad esso sono stati applicati per prima le tecniche di analisi dei segnali, quali i filtri passa banda. In questo tipo d'eccitazione la struttura è virtualmente eccitata ad una sola frequenza, e dato il lento incremento di variazione si può assumere che la risposta sia stazionaria. Tipico di questo tipo

d'eccitazione è il buon rapporto picco-RMS e segnale-rumore; inoltre l'elevato controllo su frequenza e ampiezza lo rende indicato per la caratterizzazione di strutture dal comportamento non lineare. Il limite principale di questo tipo d'eccitazione è costituito dalla lenta variazione di frequenza che comporta un tempo di prova elevato.

1.2.2.9 – Stepped sine.

L'eccitazione stepped sine può essere considerata la versione moderna dello swept sine, ottenuta di fatto, applicando a questa le moderne tecniche di analisi dei segnali digitali. Invece di una variazione continua di frequenza, lo stepped sine prevede un incremento discreto di frequenza. I passi principali di tale metodo sono:

1. definizione della banda di frequenza d'interesse, attraverso frequenza iniziale, frequenza finale, ed incremento di frequenza.
2. conversione del segnale digitale in analogico attraverso un convertitore(DAC), ed eccitazione del "insieme" amplificatore di segnale-shaker.
3. Acquisizione del segnale analogico dall' "insieme" accelerometro-amplificatore tramite una scheda di conversione analogico-digitale(ADC), settata ad una frequenza di scansione pari al prodotto della frequenza d'eccitazione per il numero di punti voluti in un'onda.
4. Attesa di estinzione del termine transitorio della risposta della struttura, quindi registrazione dei dati acquisiti e successiva analisi.

I punti da 1 a 4 sono ripetuti per ogni incremento di frequenza. Paragonato allo swept sine, questo metodo presenta gli stessi vantaggi in termini di qualità e controllabilità del segnale. La gestione di segnali digitali permette inoltre di variare l'incremento di frequenza riducendo i tempi di prova; inoltre fornisce un buon controllo contro errori quali l'*aliasing* e il *leakage*. Rimane comunque un metodo lento dovuto al modo di scandire la banda di frequenza interessata, ed al periodo d'attesa richiesta per l'estinzione del termine transitorio della risposta. Esso richiede inoltre un'attrezzatura software e hardware "dedicata".

La tabella 1.1 fornisce un chiaro quadro riassuntivo sui vari tipi d'eccitazione usati nell'analisi modale sperimentale.

CARATTERISTICHE	TIPO DI SEGNALE								
	BANDA DI FREQUENZA							SINGOLA FREQUENZA	
	NON PERIOD	PERIODICO			TRANSITORIO				
	<i>Pure random</i>	<i>Pseudo random</i>	<i>Periodic random</i>	<i>Periodic chirp</i>	<i>Burst random</i>	<i>Burst chirp</i>	<i>Impact</i>	<i>Swept sine</i>	<i>Stepped sine</i>
<i>Minimizzazione Leakage</i>	--	++	++	++	+	+	+	+	++
<i>Rapp. Segnale-rumore</i>	0	0	0	+	-	-	--	+	++
<i>Rapp. densità di energ-Hz</i>	0	0	0	0	-	-	--	+	++
<i>Rapp. Picco-RMS</i>	+	+	+	++	0	+	--	++	++
<i>Sensibilità Sovraccarico</i>	++	++	++	-	++	-	--	-	-
<i>Tempo di Misurazione</i>	+	++	0	+	++	++	++	-	--
<i>Controllabilità di Frequenza</i>	0	++	++	++	++	++	--	++	++
<i>Controllabilità di Ampiezza</i>	--	--	--	++	--	++	--	++	++
<i>Rimozione dei disturbi non lineari</i>	++	--	++	--	++	--	--	--	--
<i>Caratterizzazione delle non linearità</i>	-	-	-	+	-	+	--	++	++
<i>Necessità di Attrezzatura speciale</i>	+	-	-	--	-	--	++	--	--

++: molto buono +: buono 0: equo -: scarso --: molto scarso

Tabella 1.1: Confronto fra i vari tipi d'eccitazione.

1.2.3 – Metodi di analisi modale sperimentale.

I metodi di analisi sperimentali, usati per ricavare i parametri modali di una struttura, possono essere raggruppati in tre categorie.

1. **Sinusoidal Input-Output Model.**
2. **Frequency Response Function.(F.R.F.)**
3. **Damped Complex Exponential Response.**

Storicamente i primi due metodi sono quelli più comunemente usati; l'ultimo è invece un metodo d'approccio che utilizza algoritmi matematici per l'estrazione dei parametri modali. Tutte le categorie si basano su alcune assunzioni riguardanti il comportamento della struttura e le caratteristiche dell'eccitazione. Per quel che riguarda il comportamento della struttura, si assume innanzi tutto che esso sia

- *Lineare.* Ciò significa che la risposta della struttura ad una combinazione di forze eccitatrici, simultaneamente applicate, è la somma delle singole risposte a ciascuna di queste forze, come se agissero da sole. Tale assunzione risulta valida per una vasta gamma di strutture e permette di utilizzare delle forze eccitatrici di forma e ampiezza conveniente per le misurazioni, senza influire sulla stima dei parametri modali.
- *Tempo invariante.* Ciò significa che i parametri modali trovati sono costanti nel tempo. Una struttura tempo variante presenterà invece caratteristiche quali massa, rigidità, smorzamento dipendenti, in maniera diretta o meno, dal tempo. Un esempio di comportamento tempo variante è fornito dalla dipendenza delle caratteristiche meccaniche di un materiale dalla variabile temperatura e quindi, in ultimo, dal suo andamento nel tempo.
- *Osservabile.* L'osservabilità garantisce che le misure di eccitazione e risposta che vengono effettuate, contengono una quantità di informazioni sufficienti per sviluppare un corretto modello di comportamento della struttura. Una inosservabilità di una struttura è dovuta, ad esempio, alla presenza di componenti "sciolti", il cui moto non può essere eccitato e "sentito" da sensori posizionati sul resto struttura, oppure dall'esistenza di gradi di libertà di moto che non sono misurati.

Un'altra assunzione sul comportamento della struttura, è la validità del teorema di reciprocità di Maxwell che permette, in alcuni metodi d'eccitazione quali l'impatto, di ricostruire la matrice di risposta in frequenza \mathbf{H}_{ij} più velocemente.

Per qualche riguarda invece le assunzioni fatte sull'eccitazione, quella di primaria importanza è che essa sia *osservabile*; ciò significa che, le caratteristiche dell'eccitazione, ricavate dalle misure effettuate coincidono con quelle effettivamente trasmesse alla struttura. Tali assunzioni diventano più restrittive nel caso in cui la stima dei parametri modali viene effettuata sulle informazioni contenute nella sola risposta della struttura. In particolare si assume che

- Nel caso di eccitazioni impulsive l'autospettro dell'impulso "corto" è uniforme, costante in ampiezza e indipendente dalla forma dell'impulso.
- Nel caso di eccitazione con rumore bianco, l'autospettro del rumore è uniforme nella banda di frequenza contenuta nel segnale.
- Nel caso di risposta libera, o libero decadimento, la struttura viene eccitata con uno spostamento o velocità diverso da zero e alla rimozione del vincolo viene misurata la risposta.

Tali assunzioni sono dovute al fatto che i poli della funzione di risposta in frequenza della struttura sono costituiti dai poli della risposta e dagli zeri dell'eccitazione. Per cui, affinché la risposta fornisca informazioni sulla funzione risposta in frequenza, è necessario che lo spettro dell'eccitazione sia privo di zeri.

1.2.3.1 – Sinusoidal Input-Output Model.

I metodi raggruppati in questa categoria sono caratterizzati da un'eccitazione che, nel periodo d'osservazione, presenta una sola frequenza. Per effetto di questa eccitazione la risposta della struttura sarà somma di un termine transitorio che si estingue nel tempo, e dalla risposta forzata, stazionaria nel tempo ed alla stessa frequenza dell'eccitazione. Talvolta la risposta forzata può contenere più frequenze nello spettro dovute all'eccitazione delle non linearità del sistema; in tal caso il segnale prima di essere analizzato, viene filtrato, lasciando nello spettro la sola frequenza d'interesse. I metodi che appartengono a questa categoria sono

- **Forced Normal Mode Excitation Method.** È uno dei più vecchi metodi utilizzati per la stima dei parametri modali di una struttura ed è stato uno dei primi ad essere utilizzato nel caso di eccitazioni multiple; al giorno d'oggi è ancora largamente in uso nell'industria aeronautica per la misura di vibrazioni su strutture d'aerei. Sostanzialmente, tale metodo si basa sulla possibilità di settare gli eccitatori della struttura, in maniera da bilanciare, ad una certa frequenza le forze dissipative presenti al suo interno. In tal caso il sistema di equazioni dinamiche della struttura, idealmente

discretizzata, può essere ridotto a quello di una struttura non smorzata e priva d'eccitazione. Quando ciò avviene, si osserva che la risposta della struttura presenta un ritardo rispetto all'eccitazione di circa 90 gradi. Si individua così la frequenza di risonanza e, utilizzando più canali d'acquisizione, la forma modale della struttura. Un'ulteriore controprova è costituita dalla rimozione dell'eccitazione. Infatti se la risposta forzata conteneva frequenze relative ad un singolo modo proprio, il transitorio d'arresto conterrà anch'esso la stessa frequenza, ed il suo decadimento nel tempo darà una stima dello smorzamento della struttura. Questo metodo funziona bene nel caso in cui valga l'ipotesi di smorzamento proporzionale inoltre non considera la possibilità di modi complessi di vibrare. Per effetto di tali limitazioni si usa una tolleranza di 10 gradi sul ritardo della risposta.

- **Forced Response Decomposition Method.** Questo metodo si basa sul *metodo della sovrapposizione modale* della risposta per il quale, la risposta forzata di una struttura può essere considerata come combinazione lineare dei singoli modi propri, secondo funzioni dipendenti dal tempo. Sostanzialmente, un insieme di eccitatori, settati alla stessa frequenza, vengono applicati alla struttura generando una risposta che, a parte il transitorio iniziale, sarà stazionaria ed alla stessa frequenza d'eccitazione. L'ampiezza e la fase degli eccitatori, tenute costanti durante il periodo d'osservazione, sono scelte in maniera casuale. Utilizzando più punti di misurazione si genera un vettore di risposta forzata che, secondo il metodo della sovrapposizione modale, in un dato range di frequenza, sarà generato da N modi propri. Per cui se si generano N o più vettori di risposta forzata, indipendenti tra loro, è possibile costruire un sistema di equazioni da cui determinare gli N modi propri. I vettori di risposta forzate indipendenti possono essere generati o scegliendo, ad una certa frequenza, in maniera casuale fase ed ampiezza, oppure ripetendo l'eccitazione a diverse frequenze contenute entro il range d'interesse.

1.2.3.2 – Frequency Response Function Method.

Il metodo della funzione risposta in frequenza, o F.R.F, è una delle tecniche più utilizzate per la stima dei parametri modali di una struttura. Esso consiste nella ricostruzione, per una struttura idealmente discretizzata, della funzione complessa $H_{ij}(w)$, che rappresenta la funzione di trasferimento tra la risposta della struttura lungo il grado di libertà i , ed un'eccitazione applicata

in j e di pulsazione w . Ricostruendo tale funzione per diversi punti della struttura, variando sia il punto d'eccitazione che quello della risposta, si ottiene la matrice di risposta in frequenza $\mathbf{H}(w)$, da cui è possibile estrarre i parametri modali della struttura.

Si considerano le equazioni del problema dinamico di una struttura (1.4), e assumendo che tutte le condizioni iniziali siano nulle, vi si applica la trasformata di Laplace; si ottiene:

$$(\mathbf{M} \cdot s^2 + \mathbf{C} \cdot s + \mathbf{K}) \cdot \mathbf{X}(s) = \mathbf{P}(s) \quad (1.5)$$

che raccogliendo i termini a primo membro fornisce:

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{M} \cdot s^2 + \mathbf{C} \cdot s + \mathbf{K} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{B}(s) \cdot \mathbf{X}(s) = \mathbf{P}(s)$$

Si definisce matrice di trasferimento la matrice \mathbf{H} definita come

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{B}(s)^{-1}$$

che fornisce

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{H}(s) \cdot \mathbf{P}(s) \quad (1.7)$$

La matrice inversa è definita come:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{B}(s)^{-1} = \frac{\mathbf{D}}{\det(\mathbf{B})}$$

dove con \mathbf{D} si indica la matrice dei minori complementari di \mathbf{B} . Essendo che sia ciascun elemento di \mathbf{D} , sia il determinante di \mathbf{B} , sono dei polinomi in s , ogni elemento di \mathbf{H} sarà costituito da una funzione polinomiale fratta, nella variabile s . Tali funzioni H_{ij} sono le funzioni risposta in frequenza dei vari punti. Si osserva che gli elementi di \mathbf{H} hanno tutti lo stesso lo stesso denominatore, costituito dal determinante di \mathbf{B} ; per tanto tutte le funzioni risposta in

frequenza, H_{ij} , avranno gli stessi poli. Le forme modali, chiamati anche vettori modali, possono essere ricavati dalla matrice \mathbf{D} . Si ha infatti che:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I} \tag{1.8}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{D} = \det(\mathbf{B}) \cdot \mathbf{I}$$

Se si considera l'equazione 1.8 in corrispondenza di un polo si ha che il determinante si annulla, per cui

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

Prendendo la k-esima colonna di \mathbf{D}

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}_k = \mathbf{0} \tag{1.9}$$

si osserva che l'equazione 1.9 fornisce la soluzione omogenea dell'equazione 1.6. Pertanto la k-esima colonna di \mathbf{D} , a meno di un fattore costante, è una stima del vettore modale relativo al polo scelto. Essendo che la k-esima colonna è stata scelta in maniera arbitraria, ogni colonna di \mathbf{D} costituisce, secondo costanti diverse, una stima della forma modale. Infine si osserva che le colonne di \mathbf{H} sono uguali alle colonne di \mathbf{D} , a meno di fattore costante dato dal valore del $\det(\mathbf{B})$; pertanto le colonne di \mathbf{H} , in corrispondenza di un polo, forniranno una stima dei modi propri della struttura. Conoscendo le funzioni $H_{ij}(w)$ è possibile calcolare lo smorzamento modale col metodo della larghezza di banda. Il metodo della F.R.F. può essere utilizzato sia con eccitazioni a singola frequenza, ricostruendo la curva di risposta per punti, sia con eccitazioni a banda larga servendosi di tecniche di analisi F.F.T. L'utilizzo di più punti d'eccitazione nella struttura consente al solito di evitare di eccitare le forme modali in corrispondenza dei nodi, e quindi di perderne la loro visualizzazione nello spettro.

1.2.3.3 – Damped Complex Exponential Method.

I metodi che appartengono a questa categoria estraggono i parametri modali di una struttura analizzando le sue oscillazioni libere a partire da determinate condizioni iniziali. Il più

importante è l'**Ibrahim Time Domain Approach**. In questo metodo le oscillazioni libere vengono misurate in diversi punti della struttura; se per motivi di equipaggiamento non è possibile un'acquisizione simultanea dei vari punti, si effettuano più misure mantenendo una posizione comune dei sensori tra una misura ed un'altra. Le oscillazioni dei punti della struttura vengono registrati a partire da due istanti diversi

$$\mathbf{P}(t) = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{N_0}(t) \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{Q}(t) = \begin{Bmatrix} y_1(t+\alpha) \\ y_2(t+\alpha) \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{N_0}(t+\alpha) \end{Bmatrix}; \quad (1.10)$$

con N_0 maggiore del numero di modi da estrarre. Nell'ipotesi assenza di forze esterne, il transitorio della struttura, contenuto nei vettori \mathbf{P} e \mathbf{Q} , può essere espresso come una combinazione lineare dei di N_m funzioni esponenziali

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{R} \cdot e^{\lambda(t)}; \quad \mathbf{Q}(t) = \mathbf{R} \cdot e^{\lambda(t+\alpha)} = \mathbf{R} \cdot e^{\lambda(t)} \cdot e^{\lambda\alpha}; \quad (1.11)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T = \{\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_{N_m}\};$$

Eliminando $e^{\lambda(t)}$ dalla (1.11) si ottiene una relazione tra i vettori \mathbf{P} e \mathbf{Q} , valida per ogni campione acquisito nel tempo di misurazione.

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{R} \cdot e^{\lambda\alpha} \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{P}(t);$$

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}(t);$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \cdot e^{\lambda\alpha} \cdot \mathbf{R}^{-1};$$

Si genera una matrice di ricorrenza, \mathbf{A} , i cui autovalori costituiscono le pulsazioni proprie del sistema, mentre dagli autovettori corrispondenti si ricavano le forme modali. L'uso di diverse condizioni iniziali garantisce che tutti i modi propri vengano eccitati, in maniera analoga all'uso di diversi punti di eccitazione degli altri metodi.

1.2.4 – Strumentazione usata nell'analisi modale sperimentale.

L'utilizzo di un adeguata strumentazione riveste un ruolo fondamentale per il buon esito dell'analisi modale di una struttura. Sostanzialmente la strumentazione è costituita da

- **Sistema d'eccitazione.**
- **Trasduttori di forza e di spostamento**
- **Sistema di analisi e misura dei segnali.**

Il sistema d'eccitazione ha il compito di trasmettere una forza alla struttura; i trasduttori misurano l'entità della forza applicata alla struttura e lo spostamento che essa subisce, convertendoli in segnali elettrici; tali segnali sono poi registrati dal sistema di analisi che in genere ne analizza il contenuto in frequenza.

1.2.4.1 – Sistema d'eccitazione.

I sistemi d'eccitazione sono comunemente classificati in due categorie: **sistemi d'eccitazione fissi**, cioè che sono collegati alla struttura da eccitare, e **sistemi d'eccitazione non fissi** che non presentano alcun contatto con la struttura. I sistemi d'eccitazione fissi più comuni sono gli *shaker elettro-idraulici* e gli *shaker elettrodinamici*. Le loro principali caratteristiche sono l'entità di forza e spostamento che possono generare e il range di frequenza che possono coprire. La figura 1.10 mostra il range d'utilizzo di questi tipi d'eccitatori.

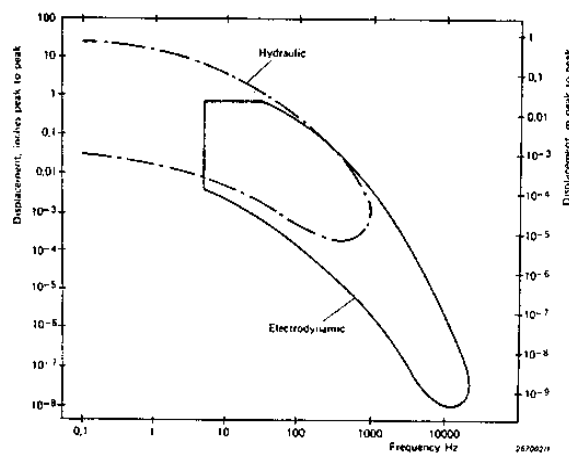


Figura 1.10: Range di utilizzo dei tipi d'eccitatore.

Gli shaker elettroidraulici vengono utilizzati in prove condotte a bassa frequenza (0-20 Hz) in cui si richiedono elevati livelli di forza o spostamento. Essi sono costituiti da un sistema di controllo elettronico che permette di generare e regolare facilmente il segnale di vibrazione, e da un sistema di attuazione idraulico che garantisce livelli elevati di forza. Per tali caratteristiche questo tipo di eccitatore è impiegato per simulare il comportamento di veicoli su strade dissestate, o di edifici durante i terremoti; il suo limite principale è che necessita di un impianto di idraulico di supporto per l'approvvigionamento dell'olio. La figura 1.11 mostra una sezione di un eccitatore elettroidraulico.

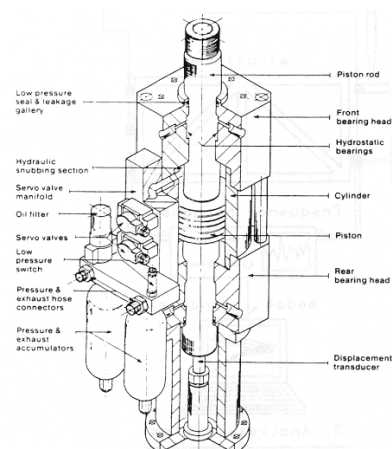


Figura 1.11: Sezione di un eccitatore elettroidraulico.

Gli shaker elettrodinamici sono caratterizzati da una maggiore versatilità, e la loro necessita del solo segnale di alimentazione li rende adatti a analisi su strutture “in opera”. La figura 1.12 mostra uno schema costruttivo di questo tipo d'eccitatore. Sostanzialmente una bobina mobile, connessa al supporto di collegamento, è posizionata all'interno di un campo magnetico; un sistema elettronico genera un segnale che, opportunamente amplificato, alimenta la bobina mobile, generando così una forza ed un moto che vengono trasmesse, tramite il supporto di collegamento, alla struttura in esame. La figura 1.13 mostra una curva “caratteristica” di questo tipo di eccitatore. Si nota che questo tipo d'eccitatore possiede una propria “risposta in frequenza”, con la quale modula la forza generata, in base alla frequenza del segnale d'eccitazione. Questo comporta che l'ampiezza della forza generata non sarà sempre proporzionale al segnale d'eccitazione. Nel caso di eccitazioni random, la misura

dell'eccitazione elimina l'insorgere di errori; in altri casi bisogna ricorrere a tipi di eccitatori che, grazie a particolari dispositivi, presentano una curva caratteristica piatta.

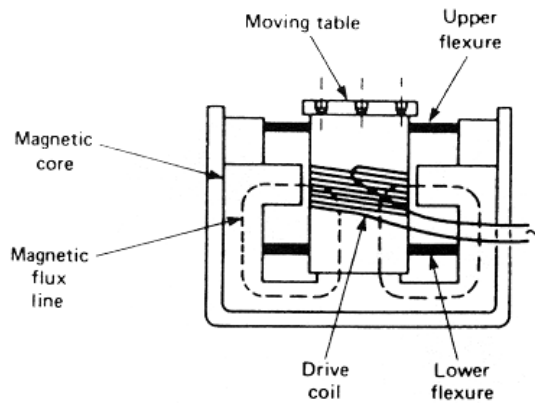


Figura 1.12: Schema costruttivo di un eccitatore elettrodinamico.

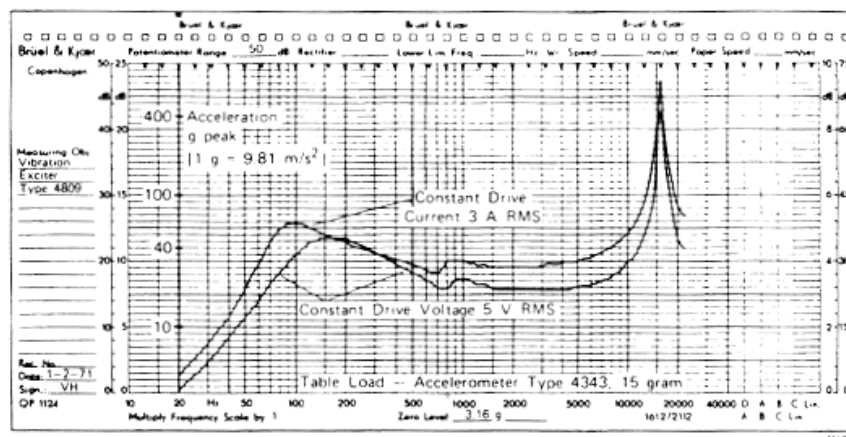


Figura 1.13: Curva caratteristica di un eccitatore elettrodinamico.

Un altro tipo d'eccitatore, rappresentato in figura 1.14, è costituito dallo shaker squilibrato, la cui caratteristica è di essere sospeso alla sola struttura, senza alcun collegamento col suolo. Il suo funzionamento si basa sulla forza di squilibrio, generata da due eccentrici controrotanti, posti al suo interno. Il suo limite principale è costituito dalla dipendenza tra forza generata e velocità di rotazione, nonché dalla potenza del motore elettrico. Inoltre il suo peso grava sulla struttura influenzandone così il comportamento.

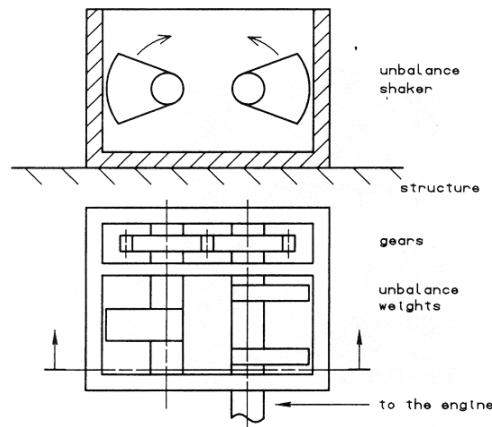


Figura 1.13: Schema di uno shaker squilibrato.

Merita una nota di attenzione, anche il tipo di collegamento tra eccitatore e struttura; essendo che tra essi è sempre interposta una cella di carico, capace di misurare le forze lungo una direzione, è necessario che la struttura venga eccitata solo lungo la direzione di misura. Ciò viene realizzato utilizzando un'asta di collegamento molto snella, ottenendo una rigidità elevata nella direzione di misurazione, e una deformabilità nelle altre direzioni.

Per quel che riguarda i sistemi d'eccitazione non fissi, quello più comunemente utilizzato è il martello strumentato, costituito da un semplice martello su cui è montato un trasduttore di forza. Il livello di energia e il contenuto in frequenza trasmesso alla struttura dipendono dalla forza dell'impatto, dal peso del martello, dal tipo di punta e dalla deformabilità del punto di contatto. In genere, un martello dalla punta dura e dal peso contenuto genera un contatto che dura per un tempo molto limitato con un contenuto in frequenza molto ampio; ciò viene utilizzato per strutture dal basso peso e relativamente rigide quali dischi di compressori, fogli di metallo. Viceversa, un martello pesante con una punta tenera genera un maggiore tempo di contatto, quindi un'eccitazione con basse frequenze; ciò viene utilizzato per strutture pesanti con basse frequenze di risonanza quali edifici, fondazioni, treni. Il limite principale di questo tipo di eccitatore è costituito dalla non facile ripetibilità dell'impulso trasmesso; per evitare ciò esistono martelli automatici capaci di ripetere l'eccitazione limitandone la variabilità, e di informare nel caso di eccitazioni anomale.

Un altro tipo di eccitazione non fissa è costituita dal precarico della struttura e dal conseguente rilascio. Inoltre per strutture leggere eccitate ad alta frequenza è possibile utilizzare l'energia acustica irradiata da un altoparlante.

1.2.4.2 – Trasduttori di forza e di spostamento.

I trasduttori di forza più utilizzati nell'analisi modale sono i *trasduttori piezoelettrici*. Essi sono costituiti da un cristallo piezoelettrico, generalmente delle ceramiche policristalline o dei cristalli di quarzo, che subendo una deformazione genera una differenza di carica tra le sue facce. Questa differenza di carica viene convertita in un segnale, in termini di tensione, da un amplificatore di carica, oppure da un integratore. Il principale svantaggio del primo metodo è che i cavi che collegano l'amplificatore al trasduttore sono molto sensibili ad influenze esterne, quali la tribo-elettricità. Lo svantaggio del secondo metodo è che l'integratore necessita di una sorgente di alimentazione esterna.

Per quanto riguarda i sensori di spostamento il più comune è l' *accelerometro*, il cui schema è mostrato nella figura 1.14. Esso non è altro che un piccolo sistema vibrante, fatto da massa-molla, che subendo uno spostamento della sua carcassa, collegata alla struttura, inizia ad oscillare. L'accelerometro restituisce un segnale proporzionale all'accelerazione (e quindi allo spostamento) della sua carcassa, valido in un range di frequenza ben al di sotto della propria frequenza di risonanza. Ciò significa che gli accelerometri sono apparecchiature piuttosto rigide e molto leggere la cui inserzione non modifica il comportamento della struttura. Il meccanismo massa-molla interno può essere costruito in diversi modi. In alcuni l'elemento elastico è costituito da una mensola al quale è collegata la massa vibrante, il cui moto eccita un estensimetro. In altri l'elemento elastico è costituito da un materiale piezoelettrico che sollecitato dalla massa ad azioni di compressione o di taglio, genera una tensione tra le sue facce. Il range di utilizzo dell'accelerometro comprende frequenze fino ad un decimo della propria frequenza di risonanza. Tale campo di validità può essere esteso superiormente con l'introduzione di uno smorzamento interno, raggiungendo valori fino ad un quinto della frequenza di risonanza. Tuttavia questo limita il suo utilizzo in strutture sollecitate non in maniera non puramente armonica, in quanto la presenza dello smorzamento interno introdurrebbe uno sfasamento diverso tra le varie armoniche, che in realtà non è presente nel movimento della struttura.

1.2.4.3 – Sistema di analisi e misura dei segnali.

Il compito del sistema di analisi e di misura è di acquisire i dati di una prova sperimentale, registrarli e successivamente analizzarli, al fine di estrarre i parametri modali della struttura.

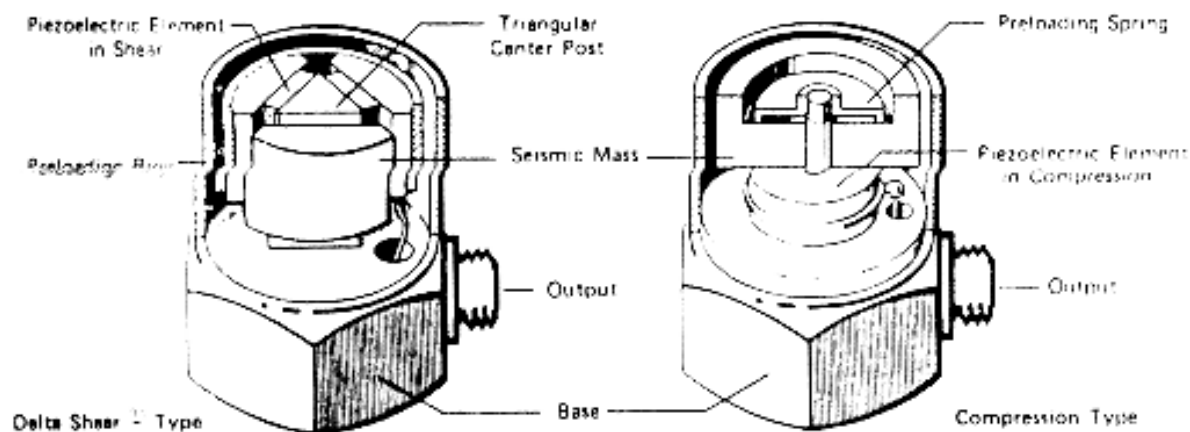


Figura 1.14: Schema costruttivo di un accelerometro piezoelettrico.

Oggigiorno sul mercato esistono diverse configurazioni di sistemi di analisi e di misura, differenti per caratteristiche, configurazione, complessità, e non ultimo, prezzo; quest'offerta, peraltro in continua evoluzione, permette di soddisfare largamente le esigenze degli utilizzatori. In ordine di complessità la prima configurazione del sistema di analisi è costituita da un PC su cui sono installate una o più schede di acquisizione dati, affiancate normalmente da un'installazione software che permette di trattare i segnali. Nell'installazione hardware è possibile individuare un'unità di acquisizione dati contenente un convertitore analogico-digitale, ed un'unità di condizionamento, con filtri programmabili e amplificatori. L'installazione software permette di registrare i dati, effettuare un'analisi FFT ed estrarre i parametri modali della struttura, trasformando così il PC in un analizzatore FFT. La versione più complessa del sistema di analisi usa invece delle periferiche separate, sia per effettuare la conversione dei segnali in analogico digitale e viceversa, sia per l'analisi in frequenza, lasciando al PC il solo compito di registrare i dati ed eventualmente di controllare l'analizzatore FFT; si ottiene così un sistema con elevate performance.