

## CAPITOLO 1

### *Analisi del segnale*

Si supponga di osservare, con opportuni strumenti di misura, una o più grandezze relative a un certo fenomeno fisico. Queste misure sono in genere dei segnali variabili nel tempo. L'analisi di questi segnali consiste in genere in:

- Descrivere in modo sintetico e significativo le grandezze in esame ed eventualmente la loro variazione temporale
- Correlare tra loro le varie grandezze, trovando eventuali relazioni di causalità o di non-causalità
- Indagare su parametri interni del processo generatore
- Ridurre gli eventuali errori presenti nei dati di misura

Per far ciò si utilizzano **modelli** matematici che rappresentano le caratteristiche di nostro interesse (cioè “semplificano” la realtà) e ci si può utilmente avvalere di una serie di **strumenti**, una specie di “cassetta degli attrezzi” (toolbox), che potranno essere utilizzati a seconda della necessità.

#### 1.1 Nozioni introduttive dei segnali

Un segnale è una funzione del tempo, e rappresenta una grandezza fisica.

Un segnale è detto **a tempo continuo**, o semplicemente **continuo**, se è definito per tutti i valori di un intervallo della variabile reale tempo  $t$ :

$$(1.1) \quad x(t) \quad \text{per} \quad t_{\text{iniziale}} \leq t \leq t_{\text{finale}}$$

È detto **discreto** se è definito per un insieme discreto dei valori della variabile  $t$ ; in tal caso in genere viene rappresentato dalla successione di questi valori:

$$(1.2) \quad x_1, x_2, \dots, x_N$$

$\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  è detta **successione** o **serie temporale**.

Talora gli indici non partono da 1, ma possono prendere valori negativi o anche lo zero. Spesso un segnale discreto viene ottenuto “campionando” un segnale continuo, cioè estraendo i valori del segnale continuo ad un insieme discreto di valori del tempo  $t_1, t_2, \dots, t_N$  ed otteniamo i valori:

$$(1.3) \quad x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)$$

Tali valori sono detti **campioni** (samples) e possono essere indicati come nella (1.2). Tale procedura viene detta **campionamento** (sampling); particolarmente usato è il **campionamento uniforme**, in cui è costante la differenza  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ , detta “tempo di campionamento” (sampling time).

Viene definita la **frequenza di campionamento** (sampling frequency) come:

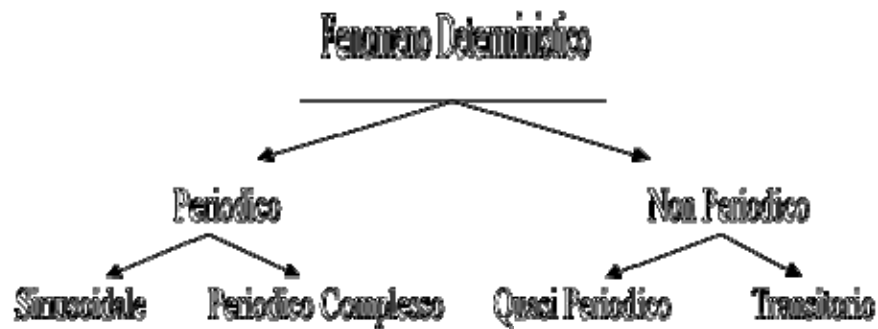
$$(1.4) \quad f = \frac{1}{\Delta t}$$

## 1.2 Classificazione dei segnali

Un qualsiasi segnale può essere classificato, in prima approssimazione come **Deterministico** o **Non-Deterministico (Random)**.

Deterministico è quel segnale che è possibile descrivere attraverso una relazione matematica esplicita.

Una possibile classificazione dei segnali deterministici può essere fornita dal seguente schema:

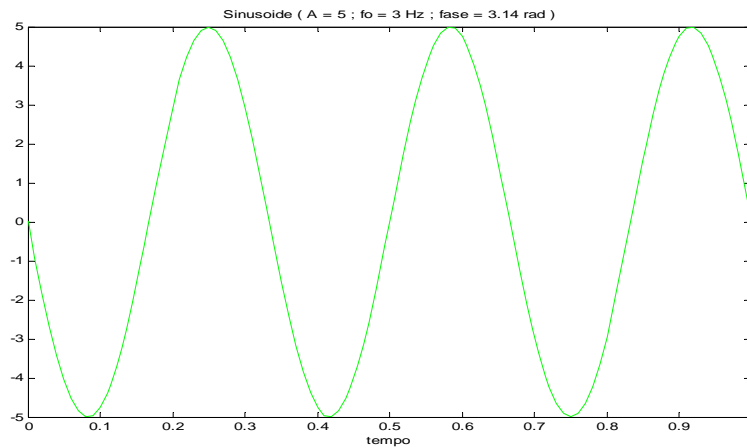


Un segnale sinusoidale è esprimibile con la seguente funzione del tempo:

$$(1.5) \quad x(t) = A \cdot \sin(2\pi f_0 t + \vartheta)$$

dove:

$A =$	Ampiezza
$f_0 =$	Frequenza in Cicli per Unità di Tempo
$\vartheta =$	Angolo di fase rispetto all'origine dei tempi (radianti)
$T = \frac{1}{f_0}$	Periodo, intervallo di tempo dopo il quale il segnale si ripete identicamente.



**Figura 5** Grafico di un segnale sinusoidale

Un segnale periodico complesso è esprimibile con la seguente funzione del tempo:

$$(1.6) \quad x(t) = x(t \pm n \cdot T) \quad n = 1, 2, \dots$$

Tale segnale si ripete identicamente dopo un fissato periodo di tempo  $T$ . Questo tipo di segnale può essere scomposto in serie di Fourier con l'ausilio della seguente formula:

$$(1.7) \quad \begin{aligned} x(t) &= \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cdot \sin(n\omega t) + B_n \cdot \cos(n\omega t)] = \\ &= \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{A_n}{2i} (e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}) + \frac{B_n}{2} (e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}) \right] = \\ &= \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{A_n}{2i} + \frac{B_n}{2} \right) e^{in\omega t} + \left( -\frac{A_n}{2i} + \frac{B_n}{2} \right) e^{-in\omega t} \right] = \\ &= X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n e^{in\omega t} + C_{-n} e^{-in\omega t}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega t} \end{aligned}$$

dove:

$$\omega = 2\pi f_0$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cdot \sin(n\omega t) dt \quad n = 1, 2, \dots$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cdot \cos(n\omega t) dt \quad n = 1, 2, \dots$$

$$B_0 = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$$C_n = \frac{A_n}{2i} + \frac{B_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot e^{-in\omega t} dt$$

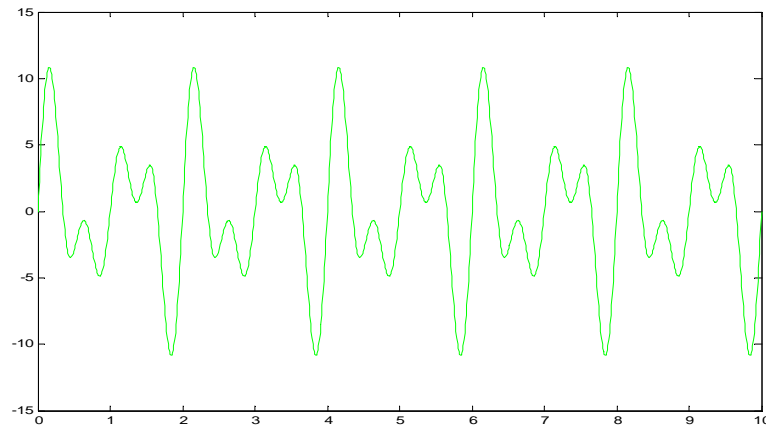
Ma può anche essere scritta come:

$$(1.8) \quad x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cdot \cos(\omega t - \mathcal{G}_n)$$

dove:

$$X_0 = \frac{B_0}{2} \quad X_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad \mathcal{G}_n = \tan^{-1}\left(\frac{A_n}{B_n}\right)$$

Questo equivale a dire che un fenomeno Complesso, ma Periodico, è scomponibile in una componente statica (a frequenza zero)  $X_0$ , ed un numero infinito di componenti sinusoidali, le **Armoniche**, ciascuna con la sua ampiezza e fase.



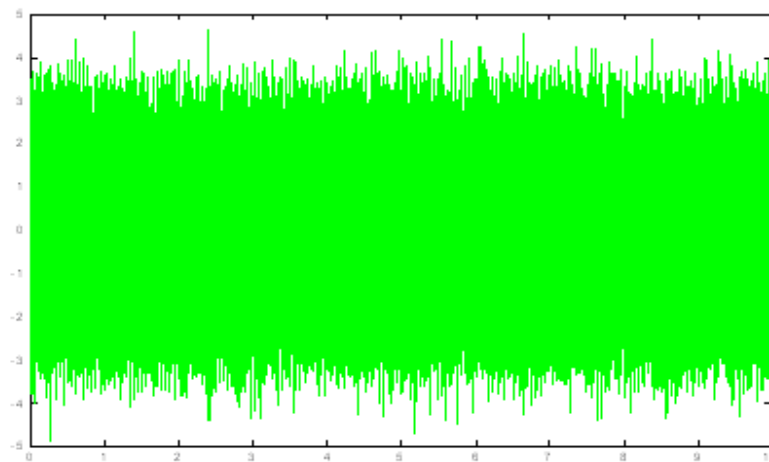
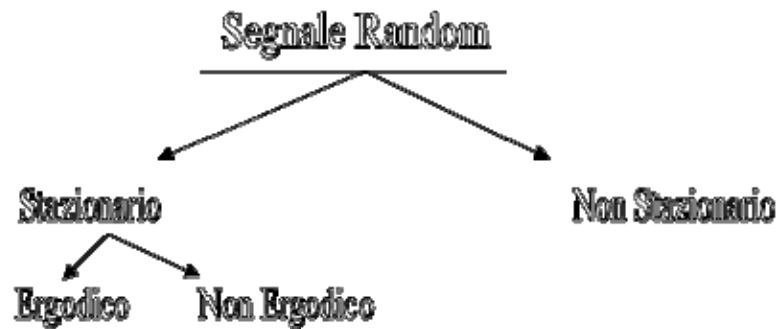
**Figura 6** Grafico di un segnale periodico complesso

Si può dimostrare che se le frequenze che formano il segnale, divise tra loro a due a due, danno un numero razionale, il segnale è Periodico, altrimenti il segnale è Quasi-Periodico.

I segnali transitori sono tutti quei segnali Deterministici che non sono rappresentabili con relazioni di Periodicità o Quasi-Periodicità.

Esempi di segnali transitori possono essere un segnale esponenziale o un'armonica del tipo sweep.

Classificazione dei segnali random:



**Figura 7** Grafico di un segnale random

In processi Non Deterministici i parametri da trattare hanno valore o senso probabilistico.

Supponendo di aver registrato più segnali dello stesso processo random, è possibile definire alcuni parametri statistici tra cui, per esempio, la MEDIA e la AUTOCORRELAZIONE:

(1.9) MEDIA 
$$\mu_x(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1)$$

(1.10) AUTOCORRELAZIONE 
$$R_x(t_1, t_1 + \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1)x_k(t_1 + \tau)$$

Il Processo Random è definito STAZIONARIO allorché la Media e l'Autocorrelazione non sono funzioni di  $t_1$ :

$$(1.11) \quad \mu_x(t_1) = \mu_x \quad ; \quad R_x(t_1, t_1 + \tau) = R_x(\tau)$$

Le definizioni di Media ed Autocorrelazione possono essere applicate anche ad uno qualunque, per esempio il k-esimo, dei processi random, ed ottenere:

$$(1.12) \quad \mu_x(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) dt$$

$$(1.13) \quad R_x(\tau, k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) x_k(t + \tau) dt$$

Se il Processo Random e' Stazionario e  $\mu_x(k)$  e  $R_x(\tau, k)$  non dipendono dal particolare k-esimo processo scelto, allora il processo random si definisce Ergodico.

Bisogna ricordare alcune principali funzioni statistiche che sono in genere utilizzate per descrivere le caratteristiche di un Segnale Random:

Il Valore Quadratico Medio di un Processo Random, che fornisce un'indicazione grossolana dell'ampiezza dei dati, è definito come:

$$(1.14) \quad \phi_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$$

In aggiunta al valore quadratico medio si definisce Varianza la fluttuazione del processo random rispetto alla media:

$$(1.15) \quad \sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \mu_x]^2 dt$$

La radice quadrata della Varianza è la Deviazione Standard.

Si noti che vale la relazione:

$$(1.16) \quad \sigma_x^2 = \varphi_x^2 - \mu_x^2$$

La funzione di Autocorrelazione (definita prima) che fornisce informazioni sul segnale nel dominio del tempo.

Fino ad ora abbiamo utilizzato una sola modalità di rappresentazione di un segnale, vale a dire quella nel dominio del tempo; è di notevole interesse però anche il contenuto energetico delle varie frequenze che lo compongono. Quest'ultima analisi si può ottenere tramite lo "spettro del suono", in pratica una rappresentazione grafica su diagramma cartesiano, avente in ascisse le frequenze e in ordinate le ampiezze.

In questa analisi è importante definire la funzione di Densità di Potenza Spettrale (PSD, Power Spectral Density), che fornisce informazioni sul segnale nel dominio delle frequenze, come:

$$(1.17) \quad S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \right|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

La funzione PSD è la Trasformata di Fourier della funzione di Autocorrelazione.

Quest'ultima frase sarà più chiara leggendo il prossimo paragrafo che dà maggiori informazioni sulla trasformata di Fourier.

### 1.3 Trasformata di Fourier

La base matematica su cui si appoggia l'analisi di Fourier è il **Teorema di Fourier**:

“un segnale complesso, ma periodico, è sempre rappresentabile dalla sovrapposizione di un infinito numero d'onde sinusoidali ciascuna dotata d'opportuna ampiezza e fase”.

Se una funzione è periodica, cioè se  $x(t) = x(t \pm n \cdot T)$   $n = 1, 2, \dots$  per tutti i  $t$ , come è noto, possiamo svilupparla in serie di Fourier, cioè:

$$(1.18) \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega t} \quad C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot e^{-in\omega t} dt$$

La trasformata di Fourier è una generalizzazione dello sviluppo in serie di Fourier al caso in cui la funzione  $x(t)$  non sia periodica (ovvero sia di periodo infinito). La trasformata di Fourier è simile alla trasformata di Laplace; in essa però la variabile “trasformata”, coniugata del tempo, è reale e indica la pulsazione (in Inglese *angular frequency*).

La trasformata di Fourier di una funzione  $x(t)$  è data da:

$$(1.19) \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

Come si vede è un caso particolare della trasformata (bilatera) di Laplace, dove  $s = i\omega$ . Le funzioni della base trasformata sono, come si vede, esponenziali complesse. Nella trasformata di Fourier c'è una simmetria perfetta tra la variabile  $t$  e la variabile  $\omega$ . In pratica però, molto spesso nel dominio  $t$  le funzioni sono reali mentre sono complesse nel dominio  $\omega$ .

Notiamo che

$$(1.20) \quad X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$$

La trasformata inversa si ottiene da

$$(1.21) \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

Data la parentela con la trasformata di Laplace, la trasformata di Fourier gode di proprietà simili, più altre dovute alla maggiore “simmetria” tra le variabili coniugate.

Guardiamo con attenzione queste proprietà, poiché nell’analisi dei segnali si fa largo uso di questa trasformata:

- **Linearità:**  $a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t) \leftrightarrow a \cdot X_1(\omega) + b \cdot X_2(\omega)$

Se conosciamo la trasformata di due segnali, possiamo calcolare immediatamente la trasformata della combinazione dei due segnali. Possiamo, quando è il caso, scomporre opportunamente un segnale per calcolare, o intuire, la sua trasformata.

- **Spostamento nel tempo:**  $x(t - \tau) \leftrightarrow e^{-i\omega\tau} X(\omega)$

Se trasliamo un segnale nel tempo, per la trasformata abbiamo lo stesso valore assoluto e uno sfasamento che varia linearmente con  $\omega$ . **Si noti che  $|X(\omega)|$  è indipendente da spostamenti nel tempo.**

- **Spostamento nel dominio  $\omega$ :**  $e^{i\omega_0 t} x(t) \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$

Questa è la duale della precedente.  $e^{i\omega_0 t}$  rappresenta una oscillazione complessa: moltiplicare  $x(t)$  per questa oscillazione complessa provoca una traslazione della trasformata di Fourier. Se  $x(t)=1$ , troviamo che  $e^{i\omega_0 t} \leftrightarrow \delta(\omega - \omega_0)$

- **Convoluzione:** 
$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \cdot x_2(t - \tau) d\tau \leftrightarrow X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

Sostituire un'operazione come la convoluzione, spesso complicata, se eseguita analiticamente, o computazionalmente costosa, se eseguita numericamente, con una moltiplicazione rende spesso molto utile lavorare nel dominio trasformato di Fourier.

#### 1.4 Trasformata di Fourier discreta (DFT)

Come si fa a trattare un segnale reale, invece di una funzione espressa in forma analitica, per mezzo del formalismo di Fourier?

Se torniamo a considerare la formula che definisce la trasformata, notiamo che nei casi di segnali misurabili, l'integrale è necessariamente esteso ad un intervallo finito  $T$  e, inoltre, il segnale è definito solo su un insieme discreto di  $N$  campioni.

Supponiamo che i gli istanti di campionamento siano equispaziati nel tempo e che l'intervallo di campionamento sia  $\Delta t = T / N$ . E' abbastanza naturale approssimare l'integrale nel modo seguente:

$$(1.22) \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_0^T x(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \sum_{n=0}^{N-1} x(t_n) \cdot e^{-i\omega t_n} \Delta t$$

Poiché ci sono  $N$  campioni non ci possono essere più di  $N$  frequenze linearmente indipendenti e, siccome i tempi di campionamento sono equispaziati, assumiamo ora che anche le frequenze che ci interessano siano equispaziate, definiamo dunque:

$$(1.23) \quad X_m = X(\omega_m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(t_n) \cdot e^{-i\omega_m t_n} \quad \text{con } \omega_m = m\Delta\omega \quad t_n = n\Delta t$$

Resta ora da definire l'intervallo  $\Delta\omega$ , oppure - ed è la stessa cosa - la frequenza massima.

Si noti che il segnale è definito sull'intervallo  $(0, T)$ , mentre la trasformata di Fourier richiede che esso sia definito su tutto l'asse reale; allora, per calcolare la trasformata del segnale, dobbiamo estenderlo in qualche modo a tutto l'asse reale. Una possibile scelta è quella di considerarlo nullo al di fuori dell'intervallo  $(0, T)$ . Però la sommatoria contiene funzioni periodiche che sono definite e sono non nulle anche al di fuori di  $(0, T)$  e, quindi, è naturale fare l'altra possibile scelta: considerare il segnale una funzione periodica di periodo  $T$ .

In questo caso la frequenza angolare fondamentale, associata a questa periodicità, è  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ , mentre le altre sono suoi multipli, segue che  $\Delta\omega = \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ .

Si noti adesso che la trasformata di Fourier comprende, allo stesso modo, sia frequenze positive sia frequenze negative e, quindi, solo metà delle frequenze che compaiono nella formula sono positive. La frequenza angolare massima, quindi, è

data da  $\omega_{\max} = \frac{N}{2} \Delta\omega = \frac{2\pi N}{2T} = 2\pi \frac{1}{2\Delta t}$  e la massima frequenza è

$f_{\max} = \frac{\omega_{\max}}{2\pi} = \frac{1}{2\Delta t}$ , tale frequenza è anche conosciuta come frequenza di Nyquist..

Proseguiamo ora notando che  $\Delta\omega \cdot \Delta t = 2\pi \frac{1}{T} \frac{T}{N} = \frac{2\pi}{N}$  e

$$(1.24) \quad X_m \approx \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i m n}{N}}$$

Ciò significa che nella trasformata così discretizzata le funzioni periodiche rilevanti sono gli esponenziali del tipo  $e^{\frac{2\pi imn}{N}}$ .

Abbiamo così definito la trasformata di Fourier discreta, o DFT (Discrete Fourier Transform).

Esempio: DFT di una sinusoide

Consideriamo una sinusoide definita dalla formula  $x_n = A \cos(2\pi f \cdot t_n)$  applicando la formula appena trovata si ha la DFT della sinusoide:

$$X_m = A \frac{N}{2} (\delta_f - \delta_{N-f}).$$

Come si vede ci sono due picchi che hanno un'ampiezza pari all'ampiezza della sinusoide originale moltiplicata per la metà dei campioni.

Si ricordi ora la definizione di densità spettrale data in precedenza

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \right|^2$$

Dal teorema di Parseval per la DFT si ricava la definizione naturale di potenza media corrispondente ad una generica frequenza è

$$(1.25) \quad S_m = \frac{|F_m|^2}{N}$$

Questa stima della densità spettrale è nota anche con il nome di *periodogramma*.

Esempio: spettro di una segnale sinusoidale

Abbiamo visto che la DFT di un segnale sinusoidale è  $X_m = A \frac{N}{2} (\delta_f - \delta_{N-f})$

da cui si ricava che lo spettro è

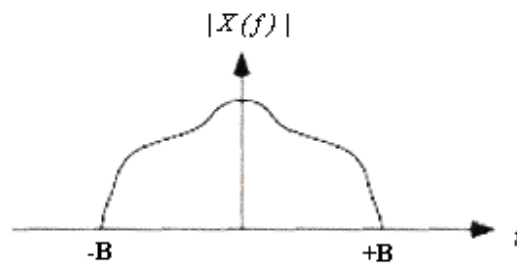
$$S_m = A^2 \frac{N}{4} (\delta_f - \delta_{N-f})$$

Il calcolo della DFT, per grandi valori di  $N$  (che può essere per esempio dell'ordine di  $10^6$ ), richiede un grandissima potenza di calcolo. Infatti, trascurando il calcolo delle  $e^{\frac{2\pi i m n}{N}}$ , che possono essere calcolati a priori, dobbiamo eseguire circa  $N^2$  moltiplicazioni ed altrettante addizioni (per  $N=10^6$  abbiamo  $10^{12}$  operazioni di ciascun tipo).

È stato però introdotto (da Cooley e Tukey nel 1965) un algoritmo di calcolo, la **Fast Fourier Transform** o **FFT**, che riduce il numero di operazioni a un valore proporzionale a  $N \cdot \log_2 N$  (in una delle migliori implementazioni è  $5N \cdot \log_2 N$ , per  $N=10^6$  abbiamo  $2 \cdot 10^7$ , cioè quasi 100000 volte più veloce).

### 1.5 Teorema del campionamento (Teorema di Nyquist)

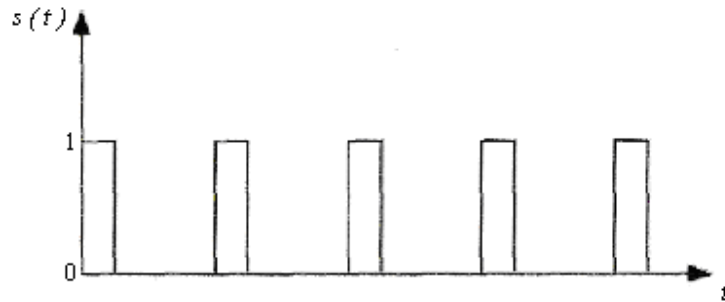
Consideriamo ora un segnale  $x(t)$  che ha una trasformata di Fourier  $X(f)$  limitata in banda (con ciò si intende dire che si annulla al di fuori di una certa banda di frequenze  $[-B, B]$ ).



**Figura 8** Trasformata di Fourier limitata in banda

Campionare il segnale significa osservarlo di tanto in tanto in modo da misurarne l'ampiezza: un campionatore meccanico potrebbe essere costituito da un interruttore rotante, in cui c'è un contatto strisciante che passa con regolarità su una parte

metallizzata e permette il passaggio di corrente così che il circuito chiuso ha una dipendenza temporale così fatta:



**Figura 9** Risposta del campionatore

La risposta  $s(t)$  del campionatore è in ogni caso un segnale periodico con frequenza  $f_s = \frac{1}{\Delta t}$  dove  $\Delta t$  è il periodo del campionatore. Possiamo, quindi, rappresentare  $s(t)$  per mezzo di una serie di Fourier

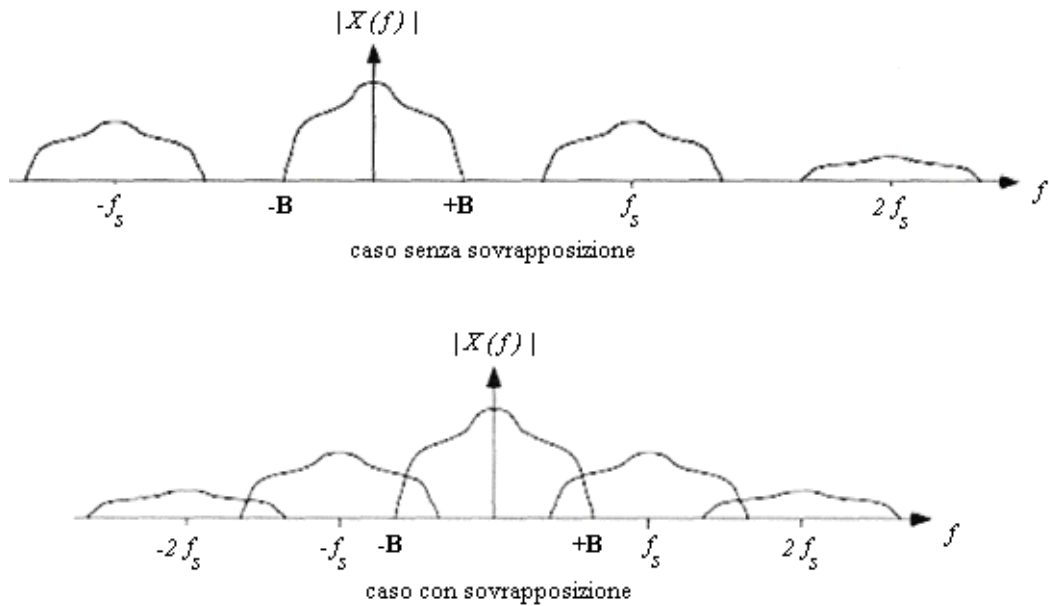
$$(1.26) \quad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi i n \cdot f_s t}$$

mentre il segnale campionato è dato dalla funzione  $g(t) = f(t) \cdot s(t)$ , la cui trasformata di Fourier è

$$(1.27) \quad \begin{aligned} G(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi i n \cdot f_s t} e^{-2\pi i f t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i (f - n \cdot f_s) t} dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot F(f - n f_s) \end{aligned}$$

dove questa formula è il cosiddetto *teorema del campionamento* e  $f_s = \frac{1}{\Delta t}$  è la *frequenza di campionamento*.

Questa trasformata di Fourier è una ripetizione di tante copie della trasformata del segnale originale, distanziate di  $f_s$  una dall'altra e scalate con l'opportuno coefficiente di Fourier:

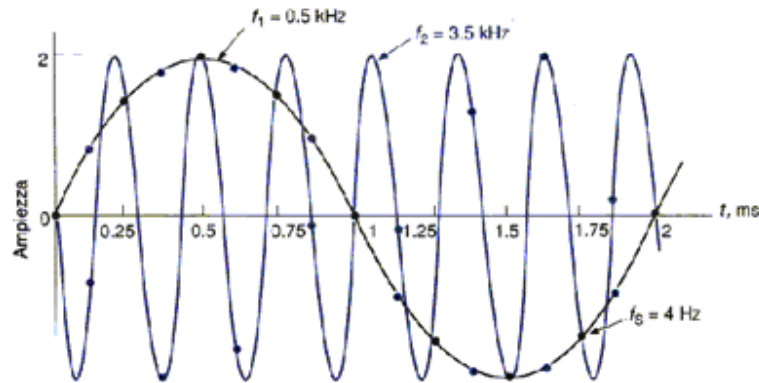


**Figura 10** Trasformata di Fourier del segnale campionato

Come si vede le copie non si sovrappongono solo se  $B < f_N \equiv f_s/2$ : se ciò accade, la parte di trasformata del segnale campionato che compare tra  $-B$  e  $+B$  è sufficiente a ricostruire il segnale originale, mentre se c'è sovrapposizione non c'è più modo di recuperare la trasformata originale, quindi la trasformata di Fourier originale è ricostruibile dal segnale campionato solo se il campionamento avviene ad una frequenza  $f_N > 2B$ .

Se non si rispetta questo teorema le componenti di suono a frequenza più elevate saranno sottocampionate e appariranno a frequenze più basse; questo fenomeno di

sovrapposizione di informazione ad alta frequenza su informazione a bassa frequenza è noto come *aliasing*.



Le sinusoidi a 0.5 kHz ed a 3.5 kHz hanno la stessa ampiezza se vengono campionate ogni 0.25 ms. Campionando invece ogni 0.125 ms si ottengono valori diversi

**Figura 11** Esempio di Aliasing

Abbiamo già visto in precedenza che se conosciamo la trasformata di Fourier  $F$  allora conosciamo perfettamente anche il segnale, da ciò concludiamo che campionando il segnale  $x(t)$  con una frequenza  $f_s$  riusciamo a ricostruirlo perfettamente se le sue componenti di frequenza sono tutte inferiori a  $f_N = f_s/2 =$  frequenza di Nyquist.

### 1.6 Definizione di Decibel

Supponiamo di voler confrontare la potenza  $W$  di un segnale con la potenza  $W_0$  di un certo segnale di riferimento: è chiaro che l'operazione più ovvia per fare questo confronto è definire il rapporto  $W/W_0$ .

C'è però un problema, questo rapporto copre normalmente molti ordini di grandezza, e quindi si preferisce usare il logaritmo in base 10 dello stesso rapporto. Questo logaritmo è il *bel*, ma ancora più importante è una quantità derivata, il *decibel*:

$$(1.28) \quad dB = 10 \cdot \log \left( \frac{W}{W_0} \right)$$

Poiché nei circuiti elettrici la potenza è normalmente proporzionale al modulo quadro della tensione  $V$ , il decibel può essere ridefinito nella seguente forma

$$(1.29) \quad dB = 10 \cdot \log \left( \frac{V^2}{V_0^2} \right) = 20 \cdot \log \left( \frac{V}{V_0} \right)$$

Fonte o descrizione del rumore	Livello del rumore (dBA)	Fonte o descrizione del rumore	Livello del rumore (dBA)
Soglia del dolore	130	Piccolo magazzino	45–55
Martello che batte su una lamiera d'acciaio (a 50 cm)	114	Hotel	42
Rivettatrice (a 10 m)	97	Appartamento	42
Fabbriche e negozi	50–75	Casa in una grande città	40
Strada con molto traffico	68	Casa in campagna	30
Conversazione (a 1 m)	65	Teatro di prosa (vuoto) <sup>1</sup>	25–35
Stazione ferroviaria	55–65	Sala da concerto (vuota) <sup>2</sup>	25–35
Terminal di aeroporto	55–65	Chiesa (vuota) <sup>3</sup>	30
Stadio	55	Aula scolastica (vuota) <sup>4</sup>	30
Ufficio di grandi dimensioni	60–65	Studio radiofonico senza pubblico	20–25
Ufficio in una fabbrica	60–63	Studio televisivo senza pubblico	25–35
Magazzino di grandi dimensioni	50–60	Studio televisivo con pubblico	30–40
Magazzino di medie dimensioni	45–60	Palcoscenico	20–35
Ristorante	45–55	Studio di registrazione	20–30
Ufficio di medie dimensioni	45–55	Bisbiglio	15–20
Automobile a 80 km/h	45–50	Bisbiglio molto leggero (a 1 m)	10–15
Garage	55	Soglia di udibilità	0–5

### 1.7 Utilizzo delle finestre

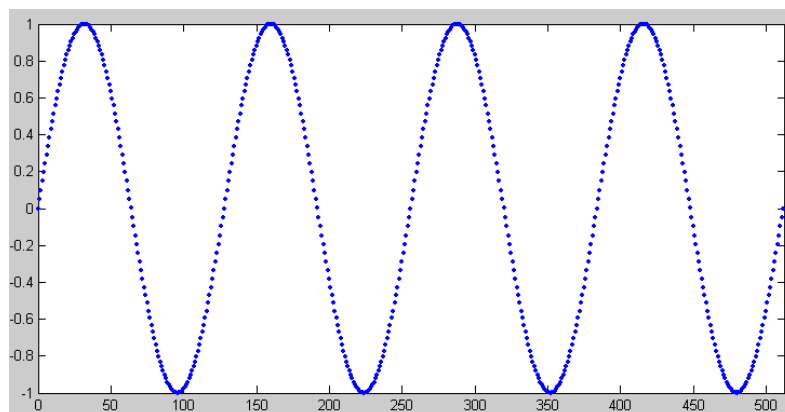
Consideriamo un processo di campionamento con  $N$  campioni e un intervallo di campionamento  $\Delta t$ : in questo caso il tempo di campionamento totale è  $T = N\Delta t$  e

l'intervallo tra frequenze successive nella corrispondente DFT è  $\Delta\omega = 2\pi / \Delta t$ . In altri termini si definisce un "pettine" di frequenze e la DFT stessa è equivalente ad una modellazione fisica del segnale, osservato per mezzo di un insieme discreto di funzioni sinusoidali con frequenze corrispondenti a questo pettine di frequenze.

Che succede se consideriamo un segnale sinusoidale la cui frequenza non corrisponde ad alcuna frequenza del pettine?

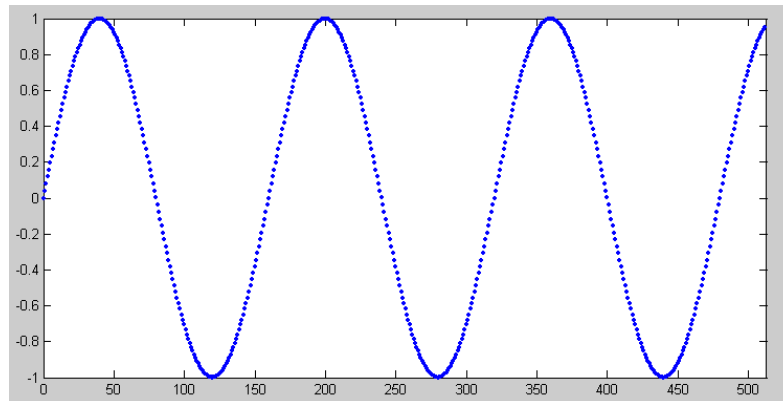
Osserviamo le figure seguenti:

la prima figura mostra una sinusoide campionata 512 volte; il periodo della sinusoide è un sottomultiplo del tempo di campionamento (il periodo della sinusoide è uguale a  $128\Delta t$ ) vale a dire che la frequenza della sinusoide è un multiplo di quella fondamentale e si vede che l'estremità destra della funzione campionata si raccorda perfettamente con l'estremità sinistra.



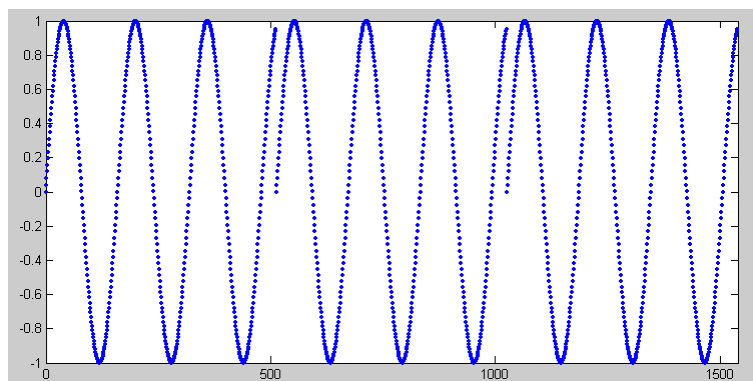
**Figura 12** Sinusoide con periodo di  $128\Delta t$

La figura seguente mostra invece un caso in cui la frequenza della sinusoide non corrisponde ad un multiplo della frequenza fondamentale (il periodo della sinusoide è uguale a  $160\Delta t$ )



**Figura 13** Sinusoide con periodo di  $160 \Delta t$

si vede che l'estremità sinistra non si raccorda con l'estremità destra. Tenendo conto del fatto che la DFT produce un modello dei dati fisici che ha una periodicità uguale al tempo di campionamento, nel caso mostrato in Figura 13, l'estensione periodica dei dati campionati ha l'aspetto mostrato nella figura seguente (che copre tre periodi completi)



**Figura 14** Estensione periodica della sinusoide di figura 13

è chiaro che l'estensione periodica non corrisponde ad una sinusoide.

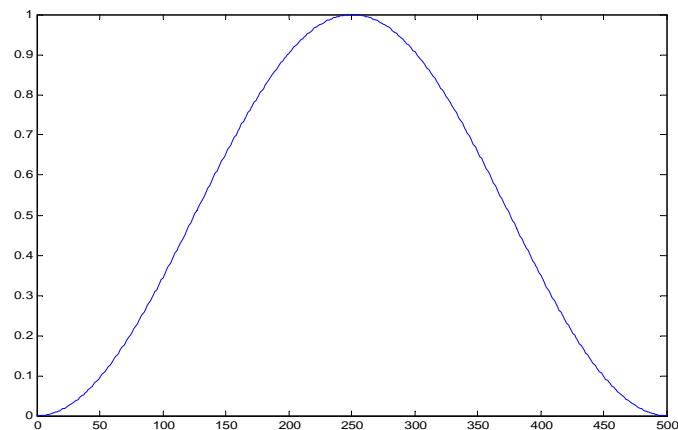
Per ovviare al problema si pesano opportunamente i campioni originali, in modo da ridurre il più possibile la discontinuità ai bordi: la funzione peso  $w_n$  si chiama funzione finestra (window).

## 1.8 Finestra di Hanning

Per capire più in dettaglio come funzionano le finestre, consideriamo un caso particolare, quello della finestra di Hanning che ha la forma

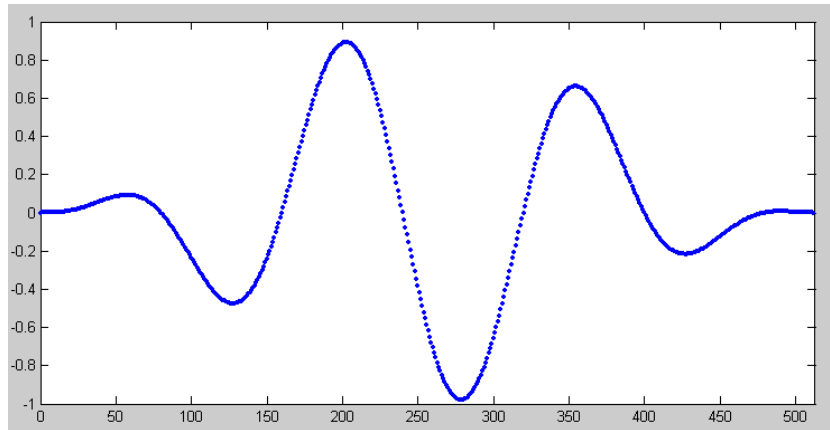
$$(1.30) \quad w_n = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi n}{N} \right) = \sin^2 \frac{\pi n}{N}$$

ed è mostrata nella figura seguente (per un tempo di campionamento totale uguale a quello delle figure precedenti)



**Figura 15** Grafico della funzione “finestra di Hanning”

Torniamo ora alla sinusoida con periodo  $160 \Delta t$  mostrata in Figura 13, per la quale non c’era raccordo tra estremità destra ed estremità sinistra: il grafico dei campioni pesati dalla finestra di Hanning è il seguente



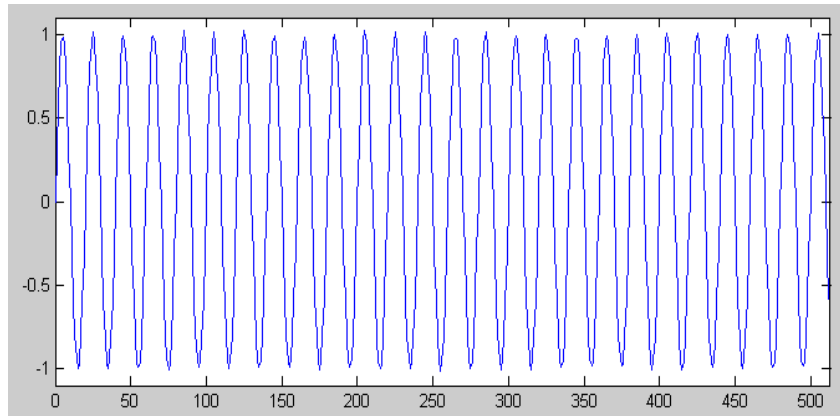
**Figura 16** Grafico della senoide di figura 13 dopo l'applicazione della finestra

Si vede che non ci sono più problemi di raccordo alle estremità, ma la finestra ha prodotto un cambiamento del segnale, specialmente alle basse frequenze.

Le proprietà della funzione finestra implicano che :

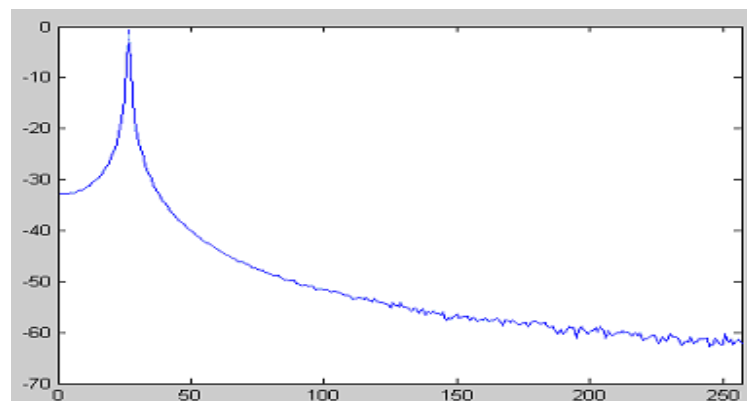
- La risoluzione in frequenza della finestra si riduce di poco
- Quando si applica una finestra si deve compensare la riduzione di ampiezza

Vediamo ora in un caso pratico come agisce la finestra di Hanning sulla densità spettrale: la figura seguente mostra un segnale con periodo  $20 \Delta t$  a cui è sommato un segnale di rumore (un segnale caotico con caratteristiche che possono definite solo statisticamente).



**Figura 17** Sinusoide con periodo di  $20 \Delta t$  a cui è stato aggiunto un segnale random

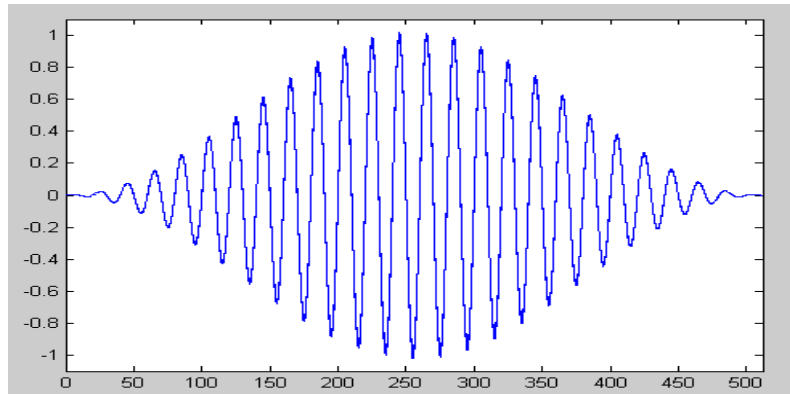
La densità spettrale, calcolata con l'algoritmo FFT è la seguente (scala verticale in dBVrms, scala delle frequenze in unità arbitrarie)



**Figura 18** Densità spettrale del segnale in figura 17

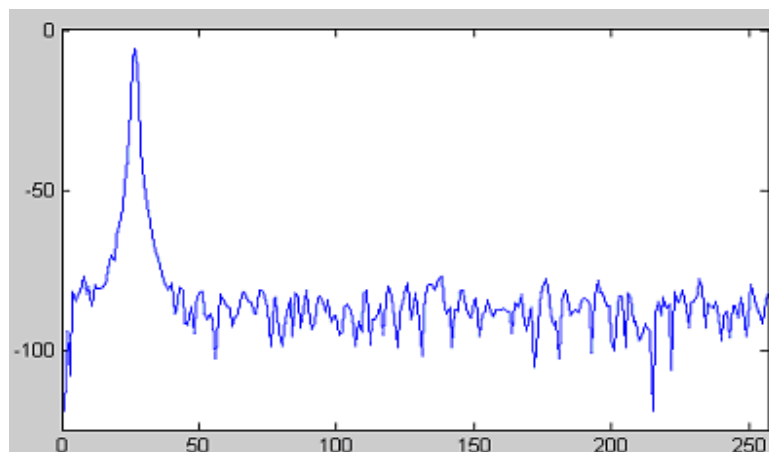
il picco è decisamente molto largo.

Applichiamo ora la finestra di Hanning: i campioni pesati sono mostrati nella figura seguente



**Figura 19** Finestratura del segnale in figura 17

e la densità spettrale è la seguente



**Figura 20** Densità spettrale del segnale in figura 19

Il picco è ancora abbastanza largo, ma molto meno di prima, ed il fondo di rumore è delineato in modo assai più chiaro.

Con la finestra di Hanning abbiamo un guadagno di picco di  $1/2$  ovvero una riduzione di metà ampiezza.

In realtà, questo guadagno comprende un “fattore di guadagno incoerente”, che vale  $\sqrt{3/8}$  di cui bisognerebbe tener conto apportando un “fattore di correzione”.

**Funzioni finestra di uso comune**

Finestra	Espressione analitica $\left(t_n = \frac{2\pi n}{N}\right)$
<i>Blackman</i>	$w_n = 0.42 - 0.50 \cos(t_n) + 0.08 \cos(2t_n)$
<i>Blackman-Harris</i>	$w_n = 0.42323 - 0.49755 \cos(t_n) + 0.07922 \cos(2t_n)$
<i>Cosine tapered</i>	$w_n = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{N}\right) & \text{per } n=0, \dots, m-1 \text{ e } n=N-m, \dots, N-1 \\ 1 & \text{altrove} \end{cases}$ con $m = \left\lfloor \frac{N}{10} \right\rfloor$
<i>Exact Blackman</i>	$w_n = a_0 - a_1 \cos(t_n) + a_2 \cos(2t_n)$ con $a_0 = 7938/18608$ , $a_1 = 9240/18608$ , $a_2 = 1430/18608$ .
<i>Exponential</i>	$w_n = \exp(an)$ dove $a = \ln(f)/(N-1)$ e $f$ è il valore finale
<i>Flat top</i>	$w_n = 0.2810639 - 0.5208972 \cos(t_n) + 0.1980399 \cos(2t_n)$
<i>Force</i>	$w_n = \begin{cases} 1 & n \leq d \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ dove $d$ è il duty cycle
<i>General cosine</i>	$w_n = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k a_k \cos(kt_n)$ dove gli $a_k$ sono coefficienti da determinare secondo le necessità della misura
<i>Hamming</i>	$w_n = 0.54 - 0.46 \cos(t_n)$
<i>Hanning</i>	$w_n = \frac{1}{2} (1 - \cos(t_n))$
<i>Kaiser-Bessel</i>	$w_n = \frac{I_0 \left( \beta \sqrt{1 - \left( \frac{2n}{N-1} - 1 \right)^2} \right)}{I_0(\beta)}$ dove $I_0$ è la funzione di Bessel modificata di ordine 0
<i>Triangle (Bartlett)</i>	$w_n = 1 - \left  \frac{2n - N}{N} \right $

