

Appunti del corso di Geometria II

Laurea in Ingegneria Civile, Civile S.S.
Laurea specialistica in Ingegneria Strutturale e Geotecnica,
Ingegneria dei Sistemi Idraulici e di Trasporto

A. A. 2004-2005

Dott. A. De Paris

1 Rappresentazione parametrica di una retta nello spazio

Esercizio 1 Sia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ un riferimento dello spazio, sia P un punto di coordinate (x, y, z) e sia \mathbf{v} un vettore di componenti (l, m, n) (rispetto al riferimento vettoriale $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$). Dimostrare che le coordinate del punto $P + \mathbf{v}$ sono

$$(x + l, y + m, z + n).$$

Suggerimento: prendere ispirazione dalla Proposizione 173 degli appunti di Geometria I (pag. 63).

Esercizio 2 Sia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ un riferimento dello spazio e siano P, P' punti di coordinate rispettivamente (x, y, z) e (x', y', z') . Dimostrare che le componenti del vettore $P' - P$ sono

$$(x' - x, y' - y, z' - z).$$

Domanda 3 Che cos'è un vettore direzionale di una retta?

Suggerimento: vedere la Definizione 175 degli appunti di Geometria I (pag. 64).

Definizione 4 Sia r una retta e si fissi un riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ dello spazio. Le componenti (l, m, n) di un vettore direzionale di r vengono dette numeri direttori (o parametri direttori) di r , rispetto al riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$.

Domanda 5 Se dico che il vettore numerico (x_1, \dots, x_n) è proporzionale a (y_1, \dots, y_n) , cosa intendo?

Risposta: che esiste un numero reale h tale che

$$(x_1, \dots, x_n) = h(y_1, \dots, y_n)$$

(a volte si dice anche che (x_1, \dots, x_n) è multiplo di (y_1, \dots, y_n)).

Osservazione 6 Una terna di numeri direttori non può mai essere $(0, 0, 0)$, perché i vettori direzionali sono non nulli. Poiché i vettori non nulli paralleli ad r sono tutti multipli l'uno dell'altro, ogni retta ha infinite terne di numeri direttori (rispetto ad un fissato riferimento), tutte proporzionali tra loro. Questo fatto può anche essere espresso dicendo che una terna di numeri direttori (rispetto ad un fissato riferimento) è definita a meno di un fattore non nullo di proporzionalità.

Proposizione 7 Sia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ un riferimento dello spazio, sia P_0 un punto di coordinate (x_0, y_0, z_0) , sia \mathbf{v} un vettore non nullo di componenti (l, m, n) e sia r la retta contenente P_0 e parallela a \mathbf{v} . Se P è un qualunque punto dello spazio e (x, y, z) sono le sue coordinate, si ha

$$P \in r \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

Dimostrazione. Si ha

$$P \in r \iff P - P_0 \text{ è parallelo a } \mathbf{v} \iff \exists t \in \mathbb{R} : P - P_0 = t\mathbf{v}.$$

Siccome

$$P - P_0 = t\mathbf{v} \iff P = P_0 + t\mathbf{v} \xleftrightarrow{\text{Eser. 1}} (x, y, z) = (x_0 + tl, y_0 + tm, z_0 + tn)$$

concludiamo

$$P \in r \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

come volevamo dimostrare.

Definizione 8 Nella situazione della proposizione ora dimostrata, l'affermazione

$$P \in r \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

viene sinteticamente espressa dicendo che

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

sono le equazioni parametriche (o una rappresentazione parametrica) della retta r rispetto al riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$, con parametro t .

Esempio 9 Fissato un riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ dello spazio, sia P_0 il punto di coordinate $(1, 2, 3)$ e \mathbf{v} il vettore di componenti $(4, 5, 6)$. Allora la retta passante per P_0 e parallela a \mathbf{v} ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 + 6t \end{cases} .$$

Osservazione 10 Fissato un riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ dello spazio, ogni retta r può essere rappresentata con delle equazioni parametriche: se (x_0, y_0, z_0) sono le coordinate di un punto di r ed (l, m, n) sono i numeri direttori di r , le equazioni parametriche di r si scrivono subito:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

Osservazione 11 Se x_0, y_0, z_0, l, m, n sono numeri reali, con l, m, n non tutti nulli, allora scrivendo

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

ottengo sempre una rappresentazione parametrica di qualche retta: di quella passante per il punto di coordinate (x_0, y_0, z_0) e parallela al vettore di componenti (l, m, n) .

2 Rappresentazione parametrica di un piano

Domanda 12 *Quand'è che un vettore libero \mathbf{v} si dice parallelo ad un piano π ?*

Suggerimento: vedere la Definizione 160 degli appunti di Geometria I (pag. 59).

Osservazione 13 *Sia \mathbf{v} un vettore non nullo e π un piano. Abbiamo detto che \mathbf{v} parallelo a π se “i segmenti che lo rappresentano sono paralleli a π ”. Questa affermazione sottintende il fatto che se un segmento rappresentativo di \mathbf{v} è parallelo a π , allora lo sono tutti (nel caso delle rette, una simile risultato discende dal fatto che il parallelismo tra rette è una relazione d'equivalenza; vedi Esercizio 34 a pag. 14 degli appunti di Geometria I). Lasciamo la dimostrazione di questo risultato come esercizio facoltativo per gli appassionati.*

Domanda 14 *Sia π un piano. Come si chiama l'insieme dei vettori liberi paralleli a π ?*

Suggerimento: vedere la Definizione 163 degli appunti di Geometria I (pag. 60).

Domanda 15 *Sia $S = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ un sistema di vettori di uno spazio vettoriale V . Che cos'è il sottospazio generato da S ?*

Suggerimento: vedere la Definizione 159 degli appunti di Geometria I (pag. 59).

Esercizio 16 *Sia V uno spazio vettoriale e sia $S = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ un sistema di vettori linearmente indipendenti. Dimostrare che se la dimensione di V è uguale al numero n di vettori di S , allora S è una base di V .*

Suggerimento: prendere un qualsiasi vettore di V e dimostrare che dipende da S , usando la Proposizione 64 a pagina 25 degli appunti di Geometria I, e quanto detto alla fine del Paragrafo 26 (sempre degli appunti di Geometria I, pag. 43).

Proposizione 17 Sia P_0 un punto dello spazio e siano \mathbf{u}, \mathbf{v} due vettori non nulli e non paralleli tra loro. Allora esiste un unico piano π passante per P_0 e parallelo ai due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} , e si ha

$$P \in \pi \iff \exists t, s \in \mathbb{R} : P = P_0 + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}.$$

Dimostrazione. Sia \mathcal{V} lo spazio dei vettori liberi e sia \mathcal{W} il sottospazio generato da (\mathbf{u}, \mathbf{v}) . Per la Proposizione 164 degli appunti di Geometria I (pag. 60) il sistema (\mathbf{u}, \mathbf{v}) è linearmente indipendente, e poiché genera \mathcal{W} , è una sua base. Quindi \mathcal{W} è un sottospazio di dimensione 2. Per la Proposizione 166 degli appunti di Geometria I (pag. 60), esiste un unico piano π che contiene P_0 e ha spazio direttore \mathcal{W} . Quindi π è un piano passante per P_0 e parallelo ai due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} , come si voleva.

Per dimostrare l'unicità, supponiamo che π' sia un piano passante per P_0 e parallelo ai due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} e consideriamo il suo spazio direttore \mathcal{W}' . Dunque i vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} appartengono a \mathcal{W}' . Poiché \mathcal{W}' ha dimensione 2 (cfr. Proposizione 162 a pag. 60 degli appunti di Geometria I), e poiché \mathbf{u} e \mathbf{v} sono indipendenti, applicando l'Esercizio 16, otteniamo che (\mathbf{u}, \mathbf{v}) è una base di \mathcal{W}' . Quindi $\mathcal{W}' = \mathcal{W}$. Dunque anche π' è un piano che contiene P_0 e ha spazio direttore \mathcal{W} . Ma avevamo detto prima (usando la Proposizione 166 degli appunti di Geometria I) che un tale piano era unico. Quindi $\pi' = \pi$.

Infine, sempre per la Proposizione 166 degli appunti di Geometria I, si ha

$$P \in \pi \iff \exists \mathbf{w} \in \mathcal{W} : P = P_0 + \mathbf{w}.$$

e siccome \mathcal{W} è il sottospazio generato da (\mathbf{u}, \mathbf{v}) , si ha

$$\mathbf{w} \in \mathcal{W} \iff \exists t, s \in \mathbb{R} : \mathbf{w} = t\mathbf{u} + s\mathbf{v}.$$

Quindi si ha

$$P \in \pi \iff \exists t, s \in \mathbb{R} : P = P_0 + t\mathbf{u} + s\mathbf{v},$$

come volevamo dimostrare.

Proposizione 18 Sia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ un riferimento dello spazio, sia P_0 un punto di coordinate (x_0, y_0, z_0) , siano \mathbf{u}, \mathbf{u}' due vettori non nulli e non paralleli e siano $(l, m, n), (l', m', n')$ rispettivamente le loro componenti. Detto π l'unico piano passante per P_0 e parallelo ai due vettori \mathbf{u} e \mathbf{u}' e se P è un punto di coordinate (x, y, z) , si ha

$$P \in \pi \iff \exists t, t' \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + lt + l't' \\ y = y_0 + mt + m't' \\ z = z_0 + nt + n't' \end{cases}$$

Dimostrazione. Si ha

$$P \in \pi \stackrel{Prop. 17}{\iff} \exists t, t' \in \mathbb{R} : P = P_0 + t\mathbf{u} + t'\mathbf{u}' \stackrel{Eser. 1}{\iff} \exists t, t' \in \mathbb{R} : (x, y, z) = (x_0 + lt + l't', y_0 + mt + m't', z_0 + nt + n't').$$

Concludiamo che

$$P \in \pi \iff \exists t, t' \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + lt + l't' \\ y = y_0 + mt + m't' \\ z = z_0 + nt + n't' \end{cases}$$

come volevamo dimostrare.

Definizione 19 Nella situazione della proposizione ora dimostrata, l'affermazione

$$P \in \pi \iff \exists t, t' \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + lt + l't' \\ y = y_0 + mt + m't' \\ z = z_0 + nt + n't' \end{cases}$$

viene sinteticamente espressa dicendo che

$$\begin{cases} x = x_0 + lt + l't' \\ y = y_0 + mt + m't' \\ z = z_0 + nt + n't' \end{cases}$$

sono le equazioni parametriche (o una rappresentazione parametrica) del piano π rispetto al riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$, con parametri t, t' .

Naturalmente, al posto di t, t' possono essere usate anche altre lettere.

Osservazione 20 Fissato un riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ dello spazio, ogni piano π può essere rappresentato con delle equazioni parametriche: basta scegliere un punto $P_0 \in \pi$ e una base dello spazio direttore di π , cioè due vettori paralleli a π , non nulli e non paralleli tra loro.

Esempio 21 Fissiamo nello spazio un riferimento, e consideriamo il punto P_0 di coordinate $(4, 6, 8)$ e i vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} , rispettivamente di componenti $(1, 2, 3)$ e $(-1, 0, 4)$. Poiché le terne $(1, 2, 3)$ e $(-1, 0, 4)$ non sono proporzionali, i vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} non sono paralleli, e poiché le due terne sono non nulle, i vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} sono non nulli. Quindi esiste un unico piano π contenente il punto P_0 e parallelo ai vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} . Le equazioni parametriche di π si scrivono subito:

$$\begin{cases} x = 4 + t - s \\ y = 6 + 2t \\ z = 8 + 3t + 4s \end{cases}$$

(con parametri t, s).

Osservazione 22 Abbiamo visto che ogni piano può essere rappresentato con equazioni parametriche. Viceversa, se $x_0, y_0, z_0, l, m, n, l', m', n'$ sono numeri reali tali che le terne (l, m, n) e (l', m', n') siano non nulle e non proporzionali, allora scrivendo

$$\begin{cases} x = x_0 + lt + l't' \\ y = y_0 + mt + m't' \\ z = z_0 + nt + n't' \end{cases},$$

ottengo sicuramente le equazioni parametriche di qualche piano: di quello passante per il punto di coordinate (x_0, y_0, z_0) e parallelo ai vettori di componenti rispettivamente (l, m, n) ed (l', m', n') .

3 Equazione cartesiana di un piano

Proposizione 23 Sia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ un riferimento dello spazio e sia π un piano. Allora esistono $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che, se P è un qualunque punto dello spazio e (x, y, z) sono le sue coordinate, si ha

$$P \in \pi \iff ax + by + cz + d = 0.$$

Inoltre a, b, c non possono essere tutti nulli.

Dimostrazione. Sia P_0 un punto di π e sia (\mathbf{u}, \mathbf{v}) una base dello spazio direttore di π . Siano (l, m, n) e (l', m', n') le componenti rispettivamente di \mathbf{u} e \mathbf{v} , e siano (x_0, y_0, z_0) le coordinate di P_0 .

Per la Proposizione 166 degli appunti di Geometria I (pag. 60), P appartiene a π se e solo se è del tipo $P_0 + \mathbf{w}$ con \mathbf{w} appartenente allo spazio direttore di π . Ma questo equivale a richiedere che $P - P_0$ appartenga allo spazio direttore di π . Poiché (\mathbf{u}, \mathbf{v}) è una base, tenendo presente la Proposizione 64 degli appunti di Geometria I (pag. 25), possiamo dire che

$$P \in \pi \iff (P - P_0, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ è un sistema linearmente dipendente.}$$

La dipendenza di un sistema di vettori equivale alla dipendenza del corrispondente sistema dei vettori delle componenti. Quindi, tenendo presente l'Esercizio 2, si ha

$$P \in \pi \iff ((x - x_0, y - y_0, z - z_0), (l, m, n), (l', m', n')) \text{ è lin. dip.}$$

A questo punto consideriamo la matrice che ha per righe i tre vettori numerici $(x - x_0, y - y_0, z - z_0), (l, m, n), (l', m', n')$: il suo determinante è nullo se e solo se i tre vettori sono dipendenti (cfr. la Proposizione 129 a pag 51, e quanto detto a pag. 53, negli appunti di Geometria I). Quindi abbiamo

$$P \in \pi \iff \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0.$$

A questo punto, sviluppando il determinante secondo la prima riga e ponendo

$$a = \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}, \quad b = - \begin{vmatrix} l & n \\ l' & n' \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}, \quad d = -ax_0 - by_0 - cz_0$$

otteniamo

$$P \in \pi \iff ax + by + cz + d = 0,$$

come volevamo.

Il fatto che a, b, c non possono essere tutti nulli si deduce facilmente dal fatto che (l, m, n) e (l', m', n') non sono proporzionali (come?), o anche osservando che un'equazione con a, b, c tutti nulli rappresenta l'insieme vuoto (se $d \neq 0$) oppure tutto lo spazio (se $d = 0$).

Definizione 24 Nella situazione della proposizione ora dimostrata, l'affermazione

$$P \in \pi \iff ax + by + cz + d = 0,$$

viene sinteticamente espressa dicendo che

$$ax + by + cz + d = 0$$

è un'equazione cartesiana (ordinaria) del piano π nel riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$.

In sintesi, l'insieme delle terne di coordinate dei punti di π coincide con l'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Esercizio 25 (facoltativo). Dimostrare che una qualsiasi equazione del tipo $ax + by + cz + d = 0$ con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ rappresenta un piano, e che se due equazioni di questo tipo rappresentano lo stesso piano allora sono l'una multiplo dell'altra.

4 Rappresentazione cartesiana di una retta nello spazio

Esercizio 26 Dimostrare che una retta si può sempre ottenere come intersezione di due piani.

Proposizione 27 Sia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ un riferimento dello spazio e sia r una retta. Allora esistono $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{R}$ tali che, se P è un qualunque punto dello spazio e (x, y, z) sono le sue coordinate, si ha

$$P \in r \iff (ax + by + cz + d = 0 \quad \text{e} \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0).$$

Dimostrazione. Per l'Esercizio 26, esistono due piani π e π' tali che

$$r = \pi \cap \pi'.$$

Se le equazioni cartesiane dei due piani sono

$$\pi : ax + by + cz + d = 0 \quad \text{e} \quad \pi' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

allora abbiamo che

$$P \in r \iff (P \in \pi \text{ e } P \in \pi') \iff (ax + by + cz + d = 0 \text{ e } a'x + b'y + c'z + d' = 0),$$

come volevamo.

Definizione 28 Nella situazione della proposizione ora dimostrata, l'affermazione

$$P \in r \iff (ax + by + cz + d = 0 \text{ e } a'x + b'y + c'z + d' = 0)$$

viene sinteticamente espressa dicendo che

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

è una rappresentazione cartesiana (ordinaria) della retta r .

In sintesi, l'insieme delle terne di coordinate dei punti di r coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} .$$

5 Condizioni di parallelismo

Proposizione 29 (Condizione di parallelismo tra rette). Siano r ed r' rette. Fissato un riferimento dello spazio, sia (l, m, n) una terna di numeri direttori di r e sia (l', m', n') una terna di numeri direttori di r' . Si ha:

$$r \text{ ed } r' \text{ sono parallele} \iff (l, m, n) \text{ ed } (l', m', n') \text{ sono proporzionali.}$$

Dimostrazione. Siccome (l, m, n) è una terna di numeri direttori di r , il vettore \mathbf{v} di componenti (l, m, n) è un vettore direzionale di r , cioè è un vettore non nullo parallelo ad r . Allo stesso modo, il vettore \mathbf{v}' di componenti (l', m', n') è un vettore non nullo parallelo ad r' . Quindi si ha che

$$\begin{aligned} r \text{ ed } r' \text{ sono parallele} &\iff \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{v}' \text{ sono paralleli} \iff \\ &\iff \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{v}' \text{ sono l'uno multiplo dell'altro} \iff \\ &\iff (l, m, n) \text{ ed } (l', m', n') \text{ sono proporzionali,} \end{aligned}$$

come volevamo.

Definizione 30 Sia π un piano, si fissi un riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ dello spazio e sia

$$ax + by + cz + d = 0$$

un'equazione cartesiana di π . La terna (a, b, c) viene detta una terna di parametri di giacitura di π rispetto a $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$.

Osservazione 31 Per la Proposizione 23 e l'Esercizio 25, le terne di parametri di giacitura di un piano sono non nulle e tutte proporzionali tra loro.

Proposizione 32 (Condizione di parallelismo tra piani). Siano π e π' piani. Fissato un riferimento dello spazio, siano (a, b, c) parametri di giacitura di π ed (a', b', c') parametri di giacitura di π' . Si ha:

π e π' sono paralleli $\iff (a, b, c)$ ed (a', b', c') sono proporzionali.

Dimostrazione. Dire che (a, b, c) sono parametri di giacitura di π vuol dire che sono i tre coefficienti di un'equazione cartesiana di π :

$$\pi : ax + by + cz + d = 0.$$

Allo stesso modo, un'equazione cartesiana di π' sarà:

$$\pi' : a'x + b'y + c'z + d' = 0.$$

Consideriamo il sistema lineare costituito dalle due equazioni:

$$\begin{cases} ax + by + cz = -d \\ a'x + b'y + c'z = -d' \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti e la matrice completa sono:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c & -d \\ a' & b' & c' & -d' \end{pmatrix}.$$

Siccome le matrici A e B sono non nulle, il loro rango è maggiore di 0; siccome sono matrici con due righe, il loro rango è al massimo 2; siccome A è una sottomatrice di B , il rango di A è minore o uguale al rango di B . Abbiamo quindi tre casi possibili:

1. $\text{rk } A = 1, \quad \text{rk } B = 1$,
2. $\text{rk } A = 1, \quad \text{rk } B = 2$,
3. $\text{rk } A = 2, \quad \text{rk } B = 2$.

(rk indica il rango). Nel caso 1, poiché $\text{rk } B = 1$, un sistema massimo di righe indipendenti è costituito da una sola riga. Quindi le due righe di B sono proporzionali tra loro. Dunque le due equazioni sono proporzionali fra loro, e quindi rappresentano lo stesso piano, cioè $\pi = \pi'$.

Nel caso 2, poiché i ranghi delle due matrici sono diversi, per il teorema di Rouché-Capelli (Proposizione 192 a pag. 69 degli appunti di Geometria I), il sistema è incompatibile. Quindi in questo caso $\pi \cap \pi' = \emptyset$.

Nel caso 3, per il teorema di Rouché-Capelli abbiamo che il sistema ammette qualche soluzione, e dall'Esercizio 25 deduciamo che, siccome le due equazioni non sono proporzionali, deve essere $\pi \neq \pi'$. Riassumendo:

caso 1 $\Rightarrow \pi$ e π' impropriamente paralleli

caso 2 $\Rightarrow \pi$ e π' propriamente paralleli

caso 3 $\Rightarrow \pi$ e π' non paralleli.

Quindi i piani sono paralleli se e solo se si presenta il caso 1 o il caso 2. Ma questi sono esattamente i casi in cui $\text{rk } A = 1$. Dunque abbiamo che

$$\pi \text{ e } \pi' \text{ paralleli} \iff \text{rk } A = 1.$$

Ma siccome $\text{rk } A = 1$ se e solo se (a, b, c) e (a', b', c') sono proporzionali, abbiamo l'asserto.

Proposizione 33 *Sia \mathbf{v} un vettore libero e π un piano. Fissato un riferimento dello spazio, siano (l, m, n) le componenti di \mathbf{v} ed (a, b, c) i parametri di giacitura di π . Si ha:*

$$\mathbf{v} \text{ è parallelo a } \pi \iff al + bm + cn = 0 .$$

Dimostrazione. Scegliamo un punto P_0 a piacere su π e siano (x_0, y_0, z_0) le sue coordinate. Siccome (a, b, c) sono parametri di giacitura di π allora c'è un'equazione cartesiana di π del tipo:

$$\pi : ax + by + cz + d = 0 .$$

Poniamo ora

$$Q_0 = P_0 + \mathbf{v} .$$

Per la Proposizione 166 a pag. 60 degli appunti di Geometria I, si ha

$$\mathbf{v} \text{ è parallelo a } \pi \iff Q_0 \in \pi \tag{1}$$

Per l'Esercizio 1, le coordinate di Q_0 sono $(x_0 + l, y_0 + m, z_0 + n)$, dunque

$$Q_0 \in \pi \iff a(x_0 + l) + b(y_0 + m) + c(z_0 + n) + d = 0 . \tag{2}$$

Siccome $P_0 \in \pi$ abbiamo

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 ,$$

e quindi

$$\begin{aligned} & a(x_0 + l) + b(y_0 + m) + c(z_0 + n) + d = \\ & = (al + bm + cn) + (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) = al + bm + cn . \end{aligned} \tag{3}$$

Da (1), (2), (3) si deduce subito

$$\mathbf{v} \text{ è parallelo a } \pi \iff al + bm + cn = 0 ,$$

come volevamo.

Proposizione 34 *(Condizione di parallelismo tra retta e piano). Sia r una retta e π un piano. Fissato un riferimento dello spazio, siano (l, m, n) i numeri direttori di r ed (a, b, c) i parametri di giacitura di π . Si ha:*

$$r \text{ e } \pi \text{ sono paralleli} \iff al + bm + cn = 0 .$$

Dimostrazione. Siccome (l, m, n) sono numeri direttori di r , il vettore \mathbf{v} di componenti (l, m, n) è parallelo ad r . Dunque, tenendo presente l'Osservazione 13, abbiamo che r e π sono paralleli se e solo se \mathbf{v} e π sono paralleli. Dunque, l'asserto segue subito dalla Proposizione 33.

6 Richiami sugli angoli

Domanda 35 *Che differenza c'è tra “ortogonale” e “perpendicolare”?*

Qui c'è da dire che la terminologia non è unanime. Per alcuni testi, le due parole sono sinonimi, per altri no. Ovviamente, bisogna dare la risposta conformemente al testo da noi adottato, cioè gli appunti di Geometria I. Quindi, è consigliabile consultare la Definizione 185 a pagina 67 degli appunti di Geometria I.

Dunque, per noi la parola “perpendicolari” è riservata per coppie di rette contenute in uno stesso piano, mentre “ortogonali” possono esserlo anche due rette sghembe.

Domanda 36 *È possibile che due rette contenute in uno stesso piano siano ortogonali senza essere perpendicolari?*

La risposta è intuitivamente abbastanza evidente: non è possibile. Tuttavia, questo fatto non discende immediatamente dalla definizione. Infatti, bisognerebbe dimostrare che se due rette complanari sono rispettivamente parallele a due rette che individuano angoli retti, allora individuano a loro volta angoli retti. Questo discende da un risultato generale che enunceremo tra poco.

Definizione 37 *Sia \vec{r} una retta orientata e sia $O \in r$. L'insieme costituito da O e da tutti i punti che seguono O si dice semiretta di origine O , e sarà indicata generalmente con r_O^+ .*

Osservazione 38 *Siano r ed s due rette complanari e non parallele. Sia π il piano che contiene r ed s e sia O il loro punto di intersezione. Fissiamo ora un verso su r , e siano P e P' due punti di r che seguono O secondo tale verso. Siccome O non è compreso tra tali punti (altrimenti dovrebbe seguire uno dei due), il segmento $\overline{PP'}$ non contiene O . Poiché O è l'unico punto di r che sta anche in s , il segmento $\overline{PP'}$ non interseca s . Per definizione di semipiano (vedi Paragrafo 47 a pag. 66 degli appunti di Geometria I), abbiamo che P e P' stanno su uno stesso semipiano di π individuato da s .*

Considerando il verso opposto, si ha subito che lo stesso vale per i punti che precedono O . Con lo stesso ragionamento si ottiene anche che i punti che precedono O stanno su un semipiano diverso da quello che contiene i punti che seguono O .

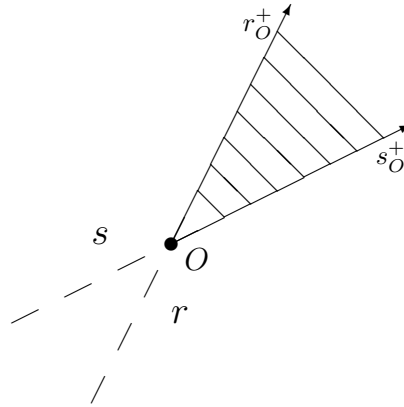
Se dunque \vec{r} è una retta orientata ed s è una retta incidente r in un unico punto O , allora i due semipiani individuati da s nel piano contenente le due rette, intersecano r nelle due semirette di origine O contenute in r , escluso O stesso.

Definizione 39 *Siano \vec{r} ed \vec{s} rette orientate non parallele contenute in un piano π . Detto O il punto di intersezione, sia σ il semipiano di π individuato da r che contiene i punti della semiretta s_O^+ ad eccezione di O , e sia τ il semipiano*

di π individuato da s che contiene i punti della semiretta r_O^+ ad eccezione di O . Allora l'angolo (convesso proprio)

$$\sigma \cap \tau$$

sarà chiamato angolo individuato da \vec{r} ed \vec{s} , o anche angolo convesso individuato da r_O^+ ed s_O^+ .



Definizione 40 Siano $\vec{r}, \vec{r}', \vec{s}, \vec{s}'$ rette orientate contenute in un piano π tali che:

- \vec{r} ed \vec{r}' sono parallele e concordi;
- \vec{s} ed \vec{s}' sono parallele e concordi;
- r ed s sono diverse ed incidenti.
- r' ed s' sono diverse ed incidenti.

Allora diremo che l'angolo individuato da \vec{r} ed \vec{s} e l'angolo individuato da \vec{r}' e \vec{s}' sono corrispondenti.

Enunciamo la seguente proposizione.

Proposizione 41 Angoli corrispondenti sono congruenti.

Dalla Proposizione 41 si deduce subito che la risposta alla Domanda 36 è no.

Dobbiamo purtroppo rinunciare alla dimostrazione della Proposizione 41, in quanto nei due moduli di Geometria non c'è abbastanza spazio per accennare gli assiomi riguardanti gli angoli e la congruenza tra angoli.

Almeno però, dal fatto che la congruenza tra angoli convessi propri è una relazione di equivalenza possiamo dedurre il concetto di *ampiezza* di un angolo, in maniera simile a quanto fatto per il concetto di lunghezza di un segmento (vedi Paragrafo 11 degli appunti di Geometria I).

Definizione 42 Un'ampiezza è una classe di equivalenza di angoli congruenti.

Dunque l'ampiezza di un angolo α è la sua classe di equivalenza $[\alpha]$ rispetto alla relazione di congruenza. Se a è un'ampiezza ed α è un angolo, dire che “ α ha ampiezza a ” formalmente equivale a dire che $\alpha \in a$.

Diamo per assodato che

- dati due angoli convessi propri α e ρ , è definito un numero reale non negativo, detto *misura* di α rispetto ad ρ .

Ampiezza e misura sono cose diverse, anche se spesso si tende a confonderle. D'altra parte, per gli angoli tale confusione è più giustificata rispetto a quanto accade per i segmenti. Infatti, mentre per i segmenti non c'è un'unità di misura privilegiata (se non per motivi convenzionali, come per il metro, o per motivi fisici, come per la lunghezza di Planck), per gli angoli c'è una unità di misura particolarmente “conveniente”: il radiante.

Definizione 43 *Fissiamo come unità di misura per gli angoli un angolo ρ , detto radiante, tale che un angolo retto misuri $\frac{\pi}{2}$ rispetto a ρ .*

Il motivo per cui la misura in radianti di un angolo α è particolare, è che essa esprime la misura di un arco di circonferenza sotteso da α rispetto al raggio. A rigore, questo fatto può essere formalizzato solo dopo aver definito cos'è la lunghezza di una curva (cosa che si fa nei corsi di Analisi del secondo anno). La definizione di sopra consente di evitare il ricorso alla lunghezza di una curva, purché si assuma una definizione del numero π anch'essa indipendente da tale concetto.

7 “Angolo” tra due rette orientate e tra due vettori liberi

Un'altra “lezione” che si ricava dalla Proposizione 41 è che l'ampiezza, essendo invariante per sostituzione dei lati con lati paralleli, misura in sostanza la “distanza” tra due direzioni. Dunque, anche se due rette sono sghembe, esse danno luogo ad una ampiezza. Formalizziamo questo discorso nella seguente definizione.

Definizione 44 *Siano \vec{r} ed \vec{s} rette orientate. Se r ed s non sono parallele, allora definiamo angolo tra \vec{r} ed \vec{s} la misura in radianti dell'angolo individuato da due rette orientate incidenti \vec{r}' e \vec{s}' , rispettivamente parallele e concordi ad \vec{r} ed \vec{s} . Se r ed s sono parallele, definiamo angolo tra \vec{r} ed \vec{s} il numero 0 se \vec{r} ed \vec{s} sono concordi, o il numero π se sono discordi.*

L'angolo tra \vec{r} ed \vec{s} sarà a volte denotato con $\widehat{\vec{r}\vec{s}}$.

La Proposizione 41 assicura che la definizione ora data non dipende dalla scelta di \vec{r}' e \vec{s}' .

Il termine “angolo” tra \vec{r} ed \vec{s} non è formalmente corretto, in quanto \vec{r} ed \vec{s} non danno luogo ad un angolo ma ad un'ampiezza, ed il numero da noi definito non è a stretto rigore un'ampiezza, ma la sua misura in radianti. Comunque questo abuso di linguaggio è comodo e non dà luogo a problemi particolari.

Definizione 45 Siano \mathbf{u} e \mathbf{v} due vettori liberi non nulli. Definiamo angolo tra \mathbf{u} e \mathbf{v} l'angolo tra due rette orientate rispettivamente parallele e concordi a \mathbf{u} e \mathbf{v} .

8 Ortogonalità tra vettori

Se l'angolo tra due vettori non nulli è $\frac{\pi}{2}$, allora i due vettori non nulli sono paralleli a rette ortogonali, e quindi possono essere rappresentati con segmenti giacenti su rette ortogonali.

Definizione 46 Due vettori liberi si dicono ortogonali, se possono essere rappresentati con segmenti orientati giacenti su rette ortogonali.

Notiamo espressamente che la definizione di sopra è valida anche se qualcuno dei vettori è nullo. Quindi, se due vettori sono non nulli, essi sono ortogonali se e solo se l'angolo tra essi è di $\frac{\pi}{2}$. Se invece almeno uno dei due è nullo, cosa succede? La risposta è abbastanza evidente, e si deduce ad esempio dalla seguente proposizione.

Proposizione 47 Sia r una retta contenuta in un piano π e sia P un punto di π . Allora esiste una ed una sola retta contenuta in π , passante per P ed ortogonale ad r .

La Proposizione 47 è abbastanza evidente, e dovrebbe essere comunque nota dalle scuole medie. Rinunciamo dunque a riportare una sua dimostrazione a partire dagli assiomi (¹).

Osservazione 48 Dalla Proposizione 47 e dalla Definizione 46 segue subito che il vettore nullo è ortogonale a tutti i vettori.

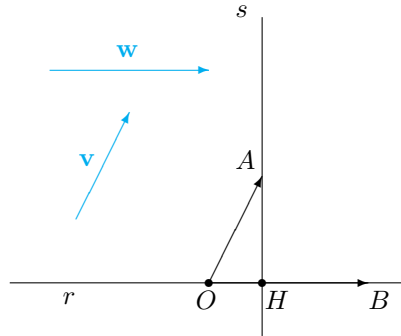
L'unicità della perpendicolare ad una retta per un punto vale all'interno di un piano, ma non sempre nello spazio, come afferma l'enunciato contenuto nel seguente esercizio.

Esercizio 49 (facoltativo). Data una retta r ed un punto P , dimostrare che di rette perpendicolari ad r e passanti per P ce n'è una sola se $P \notin r$, ma ce ne sono infinite se $P \in r$.

¹La scelta di quali proposizioni della geometria elementare siano assiomi e quali no, presenta un certo grado di arbitrarietà: dipende dall'impostazione scelta. Nei nostri appunti stiamo assumendo una versione insiemistica della classica impostazione di Hilbert. Naturalmente lo studente non è tenuto a conoscere i dettagli di tale impostazione (come abbiamo più volte detto, non c'è sufficiente spazio per esporli).

9 Prodotto scalare tra vettori liberi

Siano \mathbf{v} e \mathbf{w} vettori liberi. Scelto un punto O , siano OA e OB i rispettivi rappresentanti di \mathbf{v} e \mathbf{w} aventi origine in O . Sia r una retta contenente O e B e sia π un piano contenente O , A e B . Per la Proposizione 47, esiste un'unica retta s contenuta in π , ortogonale ad r e passante per A . Poiché r ed s sono ortogonali e contenute in π , esse si intersecano in un unico punto H .



Definizione 50 Siano \mathbf{v} , \mathbf{w} , O , B , H come sopra. Fissata una unità di misura u , ed indicando come al solito con $|OB|$ e $|OH|$ i moduli rispetto ad u dei segmenti orientati OB e OH , definiamo il prodotto scalare di \mathbf{v} e \mathbf{w} rispetto ad u , come lo scalare

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \begin{cases} |OB| \cdot |OH|, & \text{se } OB \text{ e } OH \text{ sono non nulli e concordi;} \\ -|OB| \cdot |OH|, & \text{se } OB \text{ e } OH \text{ sono non nulli e discordi;} \\ 0, & \text{se almeno uno tra } OB \text{ e } OH \text{ è nullo;} \end{cases}$$

A rigore, bisognerebbe dimostrare che la definizione ora data è ben posta, cioè, sostanzialmente, che lo scalare ottenuto non dipende dalla scelta del punto O . Questo è un fatto abbastanza evidente, e si può anche ricavare immediatamente da alcuni semplici risultati che si studiano alla scuola media (criteri di congruenza dei triangoli). Anche se non sarebbe difficile, dobbiamo ancora una volta rinunciare a esporre la dimostrazione.

Leggermente più elaborata sarebbe la dimostrazione del seguente risultato.

Proposizione 51 Conservando le notazioni della Definizione 50, supponiamo che \mathbf{v} e \mathbf{w} siano non nulli. Allora il numero reale

$$t = \begin{cases} \frac{|OH|}{|OA|}, & \text{se } OB \text{ e } OH \text{ sono non nulli e concordi;} \\ -\frac{|OH|}{|OA|}, & \text{se } OB \text{ e } OH \text{ sono non nulli e discordi;} \\ 0, & \text{se } OH \text{ è nullo;} \end{cases}$$

dipende solo dall'angolo tra \mathbf{v} e \mathbf{w} (cioè se applichiamo la stessa costruzione ad altri due vettori non nulli \mathbf{v}' e \mathbf{w}' tali che l'angolo tra essi sia uguale all'angolo tra \mathbf{v} e \mathbf{w} , otteniamo lo stesso valore per t).

Potendo usare i risultati di scuola media, ad esempio quelli sulla similitudine dei triangoli, il risultato sopra enunciato è quasi immediato. Se poi volessimo ricordare che il rapporto tra un cateto e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo è uguale al coseno dell'angolo da essi compreso, guardando al triangolo AOH riconosceremmo subito che (almeno nel caso in cui i due vettori non siano paralleli) il numero introdotto nella Proposizione 51 è il coseno dell'angolo tra \mathbf{v} e \mathbf{w} .

Non riportiamo la dimostrazione della Proposizione 51. Sulla base di tale proposizione la definizione di “coseno” può essere data come segue.

Definizione 52 *Nella situazione della Proposizione 51, lo scalare t viene detto coseno dell'angolo tra \mathbf{v} e \mathbf{w} . Esso verrà denotato con $\cos \widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}}$.*

Naturalmente questa definizione ci dà il coseno solo dei numeri reali compresi tra 0 e π , ma per noi basterà.

Dalle definizioni segue subito il seguente risultato.

Proposizione 53 *Siano \mathbf{v} e \mathbf{w} vettori non nulli. Si ha*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cdot \cos \widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}}.$$

Ricordando che un versore è un vettore di modulo 1, per i versori la formula di sopra diventa molto semplice.

Osservazione 54 *Si ha*

$$\mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ versori} \Rightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \cos \widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}}$$

Le proprietà principali del prodotto scalare tra vettori liberi sono le seguenti.

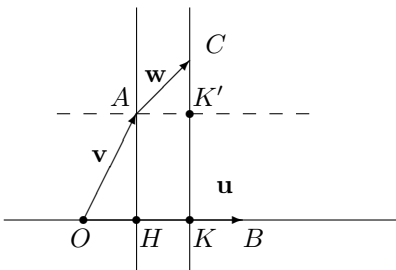
Proposizione 55 *Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori liberi e sia $h \in \mathbb{R}$. Si ha*

1. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$
2. $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$
3. $(h\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = h(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$
4. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$

La (1) discende subito dalla Proposizione 53, nel caso di vettori non nulli, ed è ovvia se uno dei vettori è nullo. Rinunciamo alla dimostrazione della (2):

ci limitiamo a dire che, almeno nel caso \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} siano paralleli ad uno stesso piano la dimostrazione è facile, come suggerisce la figura qui sotto.

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$$



La (3) è invece abbastanza facile, e diventa conseguenza quasi immediata della Definizione 50 se, usando la commutatività, si scrive nella forma

$$\mathbf{w} \cdot (h\mathbf{v}) = h(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) .$$

La (4) è conseguenza quasi immediata della Definizione 50.

Osservazione 56 *Dalla Proposizione 55, (4) si ricava subito:*

- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Esercizio 57 *Dimostrare che due vettori liberi \mathbf{v} e \mathbf{w} sono ortogonali se e solo $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.*

10 Esistenza di riferimenti ortogonali

La Proposizione 47 assicura che i riferimenti ortogonali in un piano esistono (fatto intuitivamente ovvio, ma che non è immediato dimostrare a partire dagli assiomi).

Nello spazio, anche usando la Proposizione 47, non è facile dimostrare direttamente l'esistenza di tre rette a due a due perpendicolari (sebbene anche questo sia abbastanza intuitivo). Dunque, a rigore, non siamo ancora sicuri che esista un riferimento ortogonale dello spazio. Usando le proprietà del prodotto scalare (Proposizione 55), la cosa diventa facile.

Lemma 58 *Siano \mathbf{u} , \mathbf{v} due versori ortogonali tra loro. Allora esiste un vettore non nullo ortogonale sia ad \mathbf{u} che a \mathbf{v} .*

Dimostrazione. Poiché lo spazio dei vettori liberi ha dimensione 3, possiamo trovare un vettore \mathbf{w} che non dipenda da \mathbf{u} e \mathbf{v} . Poniamo

$$\mathbf{w}' = \mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}.$$

Questo vettore è non nullo, altrimenti si avrebbe

$$\mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v},$$

mentre \mathbf{w} non dipende da \mathbf{u} e \mathbf{v} . Usando la Proposizione 55, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{w}' \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = \\ &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}) \cdot 1 - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{w}' \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \\ &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}) \cdot 0 - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Per l'Esercizio 57, abbiamo che il vettore \mathbf{w}' è ortogonale ad \mathbf{u} e \mathbf{v} , come volevamo.

Poiché, per la Proposizione 47, due versori ortogonali si possono sempre trovare, dal Lemma 58 segue subito che esistono tre vettori non nulli a due a due ortogonali, e quindi che esistono riferimenti ortogonali dello spazio.

Domanda 59 È possibile trovare nello spazio quattro rette a due a due perpendicolari?

Intuitivamente, no. Ma per essere proprio sicuri, meglio dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione 60 Siano $S = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ e $T = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ due sistemi di vettori linearmente indipendenti. Se ogni vettore di S è ortogonale ad ogni vettore di T , allora il sistema “unione” $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ è anch'esso linearmente indipendente.

Dimostrazione. Consideriamo una combinazione lineare nulla dei vettori del sistema “unione”:

$$h_1\mathbf{v}_1 + \dots + h_n\mathbf{v}_n + k_1\mathbf{w}_1 + \dots + k_m\mathbf{w}_m = \mathbf{0}.$$

Dunque abbiamo

$$h_1\mathbf{v}_1 + \dots + h_n\mathbf{v}_n = -k_1\mathbf{w}_1 - \dots - k_m\mathbf{w}_m.$$

Se poniamo

$$\mathbf{u} = h_1\mathbf{v}_1 + \dots + h_n\mathbf{v}_n,$$

abbiamo anche

$$\mathbf{u} = -k_1 \mathbf{w}_1 - \cdots - k_m \mathbf{w}_m .$$

Se sviluppiamo il prodotto

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = (h_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + h_n \mathbf{v}_n) \cdot (-k_1 \mathbf{w}_1 - \cdots - k_m \mathbf{w}_m)$$

otteniamo una somma di termini del tipo

$$-h_i k_j \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{w}_j ,$$

che sono tutti nulli. Dunque $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$, e quindi $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (cfr. Osservazione 56). Abbiamo allora

$$h_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + h_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

e

$$-k_1 \mathbf{w}_1 - \cdots - k_m \mathbf{w}_m = \mathbf{0} .$$

Siccome i sistemi S e T sono indipendenti, gli scalari h_i e gli scalari k_j sono tutti nulli. Questo dimostra che il sistema “unione” è indipendente, come volevamo.

A questo punto è facile dimostrare che la risposta alla Domanda 59 è proprio “no”. Infatti, se esistessero quattro rette a due a due ortogonali, prendendo un vettore direzionale per ciascuna otterremmo quattro vettori non nulli a due a due ortogonali, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$. Poiché due vettori non nulli ortogonali, non possono essere paralleli, abbiamo che i sistemi $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ e $T = (\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ sono indipendenti. Quindi per la Proposizione 60 il sistema $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ sarebbe indipendente. Ma questo è impossibile perché lo spazio dei vettori liberi ha dimensione 3 (cfr. quanto detto alla fine del Paragrafo 26 degli appunti di Geometria I, pag. 43).

11 Relazione tra prodotto scalare geometrico e numerico

Domanda 61 *Che cos'è il prodotto scalare standard di due vettori numerici?*

Suggerimento: vedere la Definizione 143 a pag. 54 degli appunti di Geometria I.

Vediamo ora che collegamento c'è tra il prodotto scalare di vettori liberi e il prodotto scalare standard di vettori numerici.

Osservazione 62 *Sia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ un riferimento monometrico ortogonale dello spazio. Poiché il riferimento è monometrico, i vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sono versori, cioè hanno modulo 1. Tenendo presente la Proposizione 55, (4), si ha*

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 .$$

Inoltre, poiché gli assi sono a due a due ortogonali, tenendo presente l'Esercizio 57 si ha

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0$$

Proposizione 63 Sia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ un riferimento monometrico ortogonale dello spazio e siano \mathbf{v} e \mathbf{w} vettori liberi, rispettivamente di componenti (l, m, n) e (l', m', n') . Allora si ha

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = ll' + mm' + nn'$$

(in altre parole: in un riferimento monometrico ortogonale, il prodotto scalare di vettori liberi è uguale al prodotto scalare standard dei vettori delle componenti).

Dimostrazione. Per definizione di componenti, si ha

$$\mathbf{v} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = l'\mathbf{i} + m'\mathbf{j} + n'\mathbf{k}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= (l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}) \cdot (l'\mathbf{i} + m'\mathbf{j} + n'\mathbf{k}) \stackrel{\text{Prop. 55}}{=} \\ &= ll'\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + lm'\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + ln'\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} + \\ &\quad + ml'\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + mm'\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + mn'\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} + \\ &\quad + nl'\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + nm'\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} + nn'\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \\ &\stackrel{\text{Oss. 62}}{=} ll' + mm' + nn', \end{aligned}$$

come volevamo.

12 Formula per il modulo di un vettore libero

Proposizione 64 Sia fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale. Per ogni vettore libero \mathbf{v} , dette (l, m, n) le sue componenti, si ha

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}.$$

Dimostrazione. Basta osservare che

$$|\mathbf{v}| \stackrel{\text{Prop. 55, (4)}}{=} \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \stackrel{\text{Prop. 63}}{=} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}.$$

13 Distanza tra due punti

Proposizione 65 Sia fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$. Se P e P' sono punti di coordinate rispettivamente (x, y, z) ed (x', y', z') allora la distanza tra P e P' (cfr. Definizione 189 a pag. 68 degli appunti di Geometria I) è data da

$$d(P, P') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

Dimostrazione. Si ha

$$d(P, P') = |\overline{PP'}| = |P' - P| \stackrel{\text{Eser. 2, Prop. 64}}{=} \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2},$$

come volevamo.

14 Dimostrazione del teorema di Pitagora

La Proposizione 64, dimostrata poco fa, è la versione “3D” del Corollario 188 a pag. 67 degli appunti di Geometria I. Notiamo che la dimostrazione data adesso può essere svolta in modo del tutto simile anche per il piano, ottenendo quindi una nuova dimostrazione del suddetto Corollario 188. Notiamo inoltre che questa dimostrazione, a differenza della precedente, non usa il Teorema di Pitagora (cfr. Proposizione 187 a pag. 67 degli appunti di Geometria I).

Nel corso di Geometria I, il Teorema di Pitagora è stato enunciato, ma non dimostrato. Con l’aiuto del prodotto scalare possiamo ottenere una dimostrazione molto veloce. Ricordiamo innanzitutto l’enunciato che avevamo dato:

Siano r ed s rette perpendicolari contenute in un piano, sia O il loro punto comune, sia A un punto su r e B un punto su s . Allora si ha

$$|\overline{AB}|^2 = |\overline{OA}|^2 + |\overline{OB}|^2.$$

Dimostrazione. Poniamo $\mathbf{v} = A - O$, $\mathbf{w} = O - B$. I vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} sono rappresentati dai segmenti orientati OA e BO , che giacciono su rette ortogonali. Dunque \mathbf{v} e \mathbf{w} sono ortogonali. Inoltre si ha

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = A - B.$$

Quindi

$$\begin{aligned} |\overline{AB}|^2 &\stackrel{\text{Prop. 55, (4)}}{=} (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \stackrel{\text{Prop. 55}}{=} \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \stackrel{\text{Es. 57}}{=} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \stackrel{\text{Prop. 55, (4)}}{=} \\ &= |\overline{OA}|^2 + |\overline{OB}|^2, \end{aligned}$$

come volevamo dimostrare.

Notiamo che per la dimostrazione ora fatta, abbiamo usato la proprietà distributiva del prodotto scalare su vettori che sono paralleli ad uno stesso piano. Abbiamo visto che in tal caso la proprietà distributiva è facilissima da dimostrare. Una volta noto il Teorema di Pitagora, la dimostrazione della proprietà distributiva nel caso generale può essere data senza grandi difficoltà.

15 Coseni direttori

Per descrivere numericamente la direzione di una retta r , abbiamo introdotto i numeri direttori, e abbiamo visto che le terne di numeri direttori sono infinite e proporzionali tra loro. Se il riferimento scelto è monometrico ortogonale, per alcuni tipi di problemi di carattere metrico (riguardanti cioè le distanze) risulta comoda una particolare scelta dei numeri direttori.

Definizione 66 Sia fissato nello spazio (o in un piano) un riferimento monometrico ortogonale. I coseni direttori di una retta r sono le componenti di un versore parallelo ad r . I coseni direttori di una retta orientata \vec{r} sono le componenti di un versore parallelo e concorde ad \vec{r} .

Poiché un versore parallelo ad r è in particolare un vettore direzionale di r , una terna (o, nel piano, una coppia) di coseni direttori (λ, μ, ν) è una particolare terna di numeri direttori. Dalla Proposizione 64 si ha subito che i coseni direttori di una retta non orientata sono numeri direttori caratterizzati dalla condizione

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1 .$$

Osservazione 67 Una retta orientata ha un'unica terna di coseni direttori. Una retta non orientata ha due terne di coseni direttori, opposte tra loro (corrispondenti ai due versori paralleli ad essa, a loro volta corrispondenti ai due versi su di essa).

Il nome “coseni” è dovuto al seguente fatto.

Proposizione 68 Sia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ un riferimento monometrico ortogonale, sia \vec{r} una retta orientata e siano (λ, μ, ν) i suoi coseni direttori. Detti \vec{x} , \vec{y} e \vec{z} i tre assi del riferimento (considerati come rette orientate), si ha:

$$\lambda = \cos \widehat{\vec{r}\vec{x}}, \quad \mu = \cos \widehat{\vec{r}\vec{y}}, \quad \nu = \cos \widehat{\vec{r}\vec{z}} .$$

Dimostrazione. Sia \mathbf{v} il versore parallelo e concorde ad \vec{r} , di modo che le sue componenti sono (λ, μ, ν) . Per definizione di angolo tra vettori non nulli, si ha:

$$\widehat{\vec{r}\vec{x}} = \widehat{\mathbf{v}\mathbf{i}}, \quad \widehat{\vec{r}\vec{y}} = \widehat{\mathbf{v}\mathbf{j}}, \quad \widehat{\vec{r}\vec{z}} = \widehat{\mathbf{v}\mathbf{k}} . \quad (4)$$

Il versore \mathbf{i} ha componenti $(1, 0, 0)$, perché $\mathbf{i} = 1 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}$. Similmente i versori \mathbf{j} e \mathbf{k} hanno componenti, rispettivamente, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Applicando la Proposizione 63 si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{i} &= (\lambda, \mu, \nu) \cdot (1, 0, 0) = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 + \nu \cdot 0 = \lambda \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} &= (\lambda, \mu, \nu) \cdot (0, 1, 0) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 + \nu \cdot 0 = \mu \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} &= (\lambda, \mu, \nu) \cdot (0, 0, 1) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 + \nu \cdot 1 = \nu . \end{aligned} \quad (5)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \cos \widehat{\vec{r}\vec{x}} &\stackrel{(4)}{=} \cos \widehat{\mathbf{v}\mathbf{i}} \stackrel{\text{Oss. 54}}{=} \mathbf{v} \cdot \mathbf{i} \stackrel{(5)}{=} \lambda \\ \cos \widehat{\vec{r}\vec{y}} &\stackrel{(4)}{=} \cos \widehat{\mathbf{v}\mathbf{j}} \stackrel{\text{Oss. 54}}{=} \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} \stackrel{(5)}{=} \mu \\ \cos \widehat{\vec{r}\vec{z}} &\stackrel{(4)}{=} \cos \widehat{\mathbf{v}\mathbf{k}} \stackrel{\text{Oss. 54}}{=} \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} \stackrel{(5)}{=} \nu , \end{aligned}$$

come volevamo.

Riassumendo, i coseni direttori di una retta r sono particolari numeri direttori, e in quanto tali determinano la direzione di r . Dunque la direzione di una retta può essere determinata tramite i coseni dei tre angoli formati con gli assi del riferimento (fatto del resto abbastanza intuitivo).

16 Ortogonalità per i piani

Definizione 69 *Un vettore libero si dice ortogonale ad un piano π se è ortogonale a tutti i vettori paralleli a π . Un vettore ortogonale a π che sia non nullo, sarà detto normale al piano. Una retta si dice ortogonale, o normale, o perpendicolare, ad un piano π se è ortogonale a tutte le rette contenute in π .*

Per noi dunque un vettore normale a π è un vettore non nullo ortogonale a π . Avvertiamo che in qualche testo è possibile trovare “la normale a π ”, col significato di versore (cioè vettore di modulo 1) ortogonale a π . Inoltre, attenzione a non far confusione col termine “normalizzare” che vuol dire dividere il vettore per il suo modulo (ottenendo così un versore).

Naturalmente, il vettore nullo, essendo ortogonale a qualsiasi vettore, è ortogonale a qualsiasi piano. Tuttavia è bene puntualizzare il fatto, peraltro abbastanza intuitivo, che per ogni piano ci sono vettori non nulli ad esso ortogonali.

Proposizione 70 *Sia π un piano. Allora esiste un vettore normale a π .*

Proponiamo due dimostrazioni.

Prima dimostrazione. Per la Proposizione 47, possiamo trovare due versori \mathbf{u} e \mathbf{v} paralleli a π e ortogonali tra loro. Per il Lemma 58, esiste un vettore \mathbf{n} non nullo e ortogonale ad \mathbf{u} e a \mathbf{v} . Siccome lo spazio direttore \mathcal{W} di π ha dimensione due, e i vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} sono non nulli e non paralleli (quindi indipendenti), (\mathbf{u}, \mathbf{v}) è una base di \mathcal{W} . Se quindi \mathbf{w} è un qualsiasi vettore parallelo a π (cioè appartenente a \mathcal{W}), esso è combinazione lineare di \mathbf{u} e \mathbf{v} :

$$\mathbf{w} = h\mathbf{u} + k\mathbf{v} .$$

Dunque si ha

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{n} \cdot (h\mathbf{u} + k\mathbf{v}) = h\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} + k\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \stackrel{\text{Es. 57}}{=} 0 ,$$

dunque, sempre per l'Esercizio 57, \mathbf{n} è ortogonale a \mathbf{w} , che era un arbitrario vettore parallelo a π . Quindi \mathbf{n} , essendo ortogonale a qualsiasi vettore parallelo a π , è normale a π , come richiesto.

Seconda dimostrazione. Fissiamo un riferimento monometrico ortogonale (che certamente esiste), siano (a, b, c) parametri di giacitura di π e sia \mathbf{n} il vettore di componenti (a, b, c) . Poiché (a, b, c) non sono tutti nulli (cfr. Osservazione 31), il vettore \mathbf{n} è non nullo. Se \mathbf{w} è un qualsiasi vettore parallelo a π , dette (l, m, n) le sue componenti, abbiamo

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} \stackrel{\text{Prop. 63}}{=} al + bm + cn \stackrel{\text{Prop. 33}}{=} 0 .$$

Dunque, \mathbf{n} è ortogonale ad un arbitrario vettore \mathbf{w} parallelo a π , cioè è normale a π come richiesto.

La seconda dimostrazione mostra anche che *in un riferimento monometrico ortogonale* i parametri di giacitura di un piano π sono le componenti di un vettore normale a π .

Proposizione 71 *I vettori normali ad uno stesso piano sono tutti paralleli tra loro.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano due vettori \mathbf{n} ed \mathbf{n}' normali ad un piano π , ma non paralleli tra loro. Siano \mathbf{u} e \mathbf{v} due vettori non nulli paralleli a π , non paralleli tra loro. Dunque i sistemi $S = (\mathbf{n}, \mathbf{n}')$ e $T = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ sono indipendenti. Inoltre, poiché \mathbf{n} ed \mathbf{n}' sono normali a π e \mathbf{u} e \mathbf{v} sono paralleli a π , ogni vettore di S è ortogonale a ogni vettore di T . Per la Proposizione 60, avremmo che il sistema $(\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{u}, \mathbf{v})$ sarebbe linearmente indipendente, il che è assurdo perché lo spazio dei vettori liberi ha dimensione 3. Questo prova che non possono esistere due vettori \mathbf{n} ed \mathbf{n}' normali a π ma non paralleli tra loro, come volevamo.

Poiché i vettori normali ad un piano sono tutti paralleli tra loro, le loro componenti sono tutte multiple l'una dell'altra. Inoltre poco fa abbiamo detto che in un riferimento monometrico ortogonale, i parametri di giacitura di un piano π sono le componenti di un vettore normale a π . Poiché anche i parametri di giacitura sono tutti multipli l'uno dell'altro (cfr. Osservazione 31), otteniamo subito la seguente proposizione.

Proposizione 72 *Sia π un piano e (a, b, c) le componenti di un vettore \mathbf{v} rispetto ad un riferimento monometrico ortogonale. Abbiamo che*

$$(a, b, c) \text{ parametri di giacitura di } \pi \iff \mathbf{v} \text{ vettore normale a } \pi .$$

Esercizio 73 *Sia P un punto e π un piano. Dimostrare che esiste una ed una sola retta passante per P e ortogonale a π .*

Suggerimento: osservare che una retta è normale ad un piano se e solo se lo è il suo vettore direzionale.

Abbiamo quindi che le rette normali ad un piano sono tutte parallele tra di loro.

Esercizio 74 *(facoltativo).* *Sia P un punto ed r una retta. Dimostrare che esiste uno ed un solo piano passante per P ed ortogonale ad r .*

Quand'è che due piani si dicono ortogonali? Sicuramente non è possibile che tutte le rette di un piano siano ortogonali a tutte le rette dell'altro, dobbiamo quindi "accontentarci" di una proprietà più debole. Per descriverla, stabiliamo la seguente proposizione.

Proposizione 75 *Siano π e π' piani. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

1. *c è una retta contenuta in π e normale a π' ;*
2. *c è una retta contenuta in π' e normale a π ;*
3. *una retta normale a π e una retta normale a π' sono ortogonali*

(dire che le affermazioni sono equivalenti, vuol dire che sono o tutte vere o tutte false, a seconda della scelta dei piani π e π').

Dimostrazione. Supponiamo che sia vera la (1), cioè che esista una retta r contenuta in π e normale a π' . Se s è una retta normale a π , essa è per definizione ortogonale a tutte le rette contenute in π , in particolare ad r . Quindi r ed s sono ortogonali, e rispettivamente normali a π' e a π . Dunque la (3) è vera.

Viceversa, supponiamo che la (3) sia vera: esiste quindi una normale t a π e una normale t' a π' , tali che t e t' siano ortogonali tra loro. Siano \mathbf{u} e \mathbf{u}' vettori direzionali rispettivamente di t e t' , e sia (\mathbf{v}, \mathbf{w}) una base dello spazio direttore di π . Il sistema $S = (\mathbf{u})$ è linearmente indipendente e il suo unico vettore è ortogonale a tutti i vettori del sistema $T = (\mathbf{u}', \mathbf{v}, \mathbf{w})$. Se dunque T fosse indipendente, la Proposizione 60 implicherebbe che i quattro vettori $\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sarebbero indipendenti, il che è assurdo perché lo spazio dei vettori liberi ha dimensione 3. Dunque T è dipendente. Tenendo presente che (\mathbf{v}, \mathbf{w}) è una base dello spazio direttore di π , e la Proposizione 64 a pag. 25 degli appunti di Geometria I, abbiamo che \mathbf{u}' è parallelo a π . Quindi t' è parallela a π . Possiamo allora trovare una retta t'' contenuta in π e parallela a t' . Siccome t e t' sono ortogonali, la retta $t'' \subset \pi$, essendo parallela a t' , è ortogonale a t , come richiesto da (1).

Abbiamo dimostrato che (1) e (3) sono equivalenti. Allo stesso modo si dimostra che (2) e (3) sono equivalenti. Dunque le tre affermazioni sono tutte equivalenti, come volevamo.

Definizione 76 Due piani si dicono ortogonali se sono verificate le affermazioni della Proposizione 75.

17 Condizioni di ortogonalità

Proposizione 77 (condizione di ortogonalità tra rette). Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, siano r ed r' rette, con numeri direttori rispettivamente (l, m, n) ed (l', m', n') . Allora si ha:

$$r \text{ ed } r' \text{ ortogonali} \iff ll' + mm' + nn' = 0.$$

Dimostrazione. Siano \mathbf{v} e \mathbf{v}' i vettori rispettivamente di componenti (l, m, n) ed (l', m', n') , così che \mathbf{v} è un vettore parallelo ad r e \mathbf{v}' è un vettore parallelo ad r' . Si ha:

$$\begin{aligned} r \text{ ed } r' \text{ ortogonali} &\iff \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{v}' \text{ ortogonali} \stackrel{\text{Es. 57}}{\iff} \\ &\iff \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = 0 \stackrel{\text{Prop. 63}}{\iff} ll' + mm' + nn' = 0, \end{aligned}$$

come volevamo.

Proposizione 78 (condizione di ortogonalità tra piani). Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, siano π e π' piani, con parametri di giacitura rispettivamente (a, b, c) ed (a', b', c') . Allora si ha:

$$\pi \text{ e } \pi' \text{ ortogonali} \iff aa' + bb' + cc' = 0.$$

Dimostrazione. Siano \mathbf{v} e \mathbf{v}' i vettori rispettivamente di componenti (a, b, c) ed (a', b', c') . Per la Proposizione 72, \mathbf{v} è un vettore normale a π e \mathbf{v}' è un vettore normale a π' . Per definizione, π e π' sono ortogonali se e solo se verificano una (e quindi tutte) le condizioni della Proposizione 75. Usando la condizione (3), otteniamo

$$\begin{aligned} \pi \text{ e } \pi' \text{ ortogonali} &\iff \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{v}' \text{ ortogonali} \stackrel{\text{Es. 57}}{\iff} \\ &\iff \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = 0 \stackrel{\text{Prop. 63}}{\iff} aa' + bb' + cc' = 0, \end{aligned}$$

come volevamo.

Proposizione 79 (condizione di ortogonalità tra una retta e un piano). Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, sia r una retta di numeri direttori (l, m, n) e π un piano di parametri di giacitura (a, b, c) . Si ha:

$$r \text{ e } \pi \text{ sono ortogonali} \iff (l, m, n) \text{ ed } (a, b, c) \text{ sono proporzionali.}$$

Dimostrazione. Sia \mathbf{v} il vettore direzionale di r di componenti (l, m, n) . Si ha

$$\begin{aligned} r \text{ e } \pi \text{ sono ortogonali} &\iff \mathbf{v} \text{ normale a } \pi \stackrel{\text{Prop. 72}}{\iff} \\ &\iff (l, m, n) \text{ parametri di giacitura di } \pi \stackrel{\text{Oss. 31}}{\iff} \\ &\iff (l, m, n) \text{ ed } (a, b, c) \text{ sono proporzionali,} \end{aligned}$$

come volevamo.

18 Esercizi riassuntivi di geometria analitica nello spazio.

Esercizio 80 Sia fissato un riferimento nello spazio. Scrivere un'equazione cartesiana del piano di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 + t - s \\ y = 3 + 4t \\ z = 1 + 3t + 2s \end{cases}$$

Proponiamo vari possibili procedimenti per la soluzione.

Primo procedimento. Il piano in questione è quello che passa per il punto di coordinate $(2, 3, 1)$ ed è parallelo ai vettori di componenti $(1, 4, 3)$ e $(-1, 0, 2)$

(cfr. Osservazione 22). Tenendo presente la dimostrazione della Proposizione 23, un'equazione cartesiana

$$ax + by + cz + d = 0$$

si ottiene subito ponendo

$$a = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad b = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad d = -a \cdot 2 - b \cdot 3 - c \cdot 1.$$

Facendo i conti, si ha l'equazione voluta:

$$8x - 5y + 4z - 5 = 0.$$

Variante del primo procedimento. Invece di applicare direttamente le formule, può essere più semplice ricordare la condizione da cui vengono fuori:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

sviluppando il determinante nella maniera che si preferisce, si ottiene ancora l'equazione

$$8x - 5y + 4z - 5 = 0.$$

Secondo procedimento. Supponiamo che (x, y, z) siano le coordinate di un punto appartenente al piano. Dunque, per definizione di rappresentazione parametrica, esistono dei numeri reali t ed s tali che

$$\begin{cases} x = 2 + t - s \\ y = 3 + 4t \\ z = 1 + 3t + 2s \end{cases} \quad (6)$$

Dalla prima uguaglianza si ha

$$t = x + s - 2. \quad (7)$$

sostituendo nella seconda si ha

$$y = 3 + 4 \cdot (x + s - 2) \Rightarrow 4x + 4s - 5 - y = 0 \Rightarrow s = -x + \frac{1}{4}y + \frac{5}{4}.$$

Sostituendo nella (7) l'espressione ora trovata per s abbiamo

$$t = x + (-x + \frac{1}{4}y + \frac{5}{4}) - 2 = \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}.$$

Sostituendo nell'ultima delle uguaglianze (6) le espressioni ora trovate per t ed s , otteniamo

$$z = 1 + 3(\frac{1}{4}y - \frac{3}{4}) + 2(-x + \frac{1}{4}y + \frac{5}{4}) \Rightarrow 2x - \frac{5}{4}y + z - \frac{5}{4} = 0.$$

Concludiamo quindi che tutti i punti del piano hanno coordinate (x, y, z) che soddisfano la condizione

$$2x - \frac{5}{4}y + z - \frac{5}{4} = 0 .$$

Poiché tale equazione rappresenta un piano, e poiché non esistono piani propriamente contenuti in altri piani, l'equazione deve per forza rappresentare il piano dato. Notiamo che l'equazione non coincide con quella trovata con l'altro procedimento (ma questo non è un problema: essendo proporzionali, rappresentano lo stesso piano).

Questo secondo procedimento può risultare più familiare per gli studenti, in quanto ricorda da vicino la risoluzione “per sostituzione” di un sistema lineare. Però, è evidentemente più faticoso rispetto al primo. Inoltre, sebbene in linea di principio funzioni sempre, in alcuni casi richiede di cambiare l'ordine con cui si fanno le sostituzioni.

Per semplificare questo secondo procedimento, possiamo cominciare a notare che effettivamente può essere descritto in termini di sistemi lineari: abbiamo studiato per quali valori di x, y, z le equazioni parametriche, considerate come un sistema lineare in s, t , sono compatibili. Tenendo presente questo, e ricordando che il metodo di Gauss è molto più rapido rispetto al metodo “per sostituzione”, avremmo potuto procedere come segue.

Miglioramento del secondo Procedimento. Sulla base delle equazioni parametriche si può subito scrivere la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & x-2 \\ 4 & 0 & y-3 \\ 3 & 2 & z-1 \end{pmatrix} .$$

Effettuiamo il procedimento di riduzione a scalini (vedi appunti di Geometria I, Paragrafo 22), considerando x, y, z come numeri:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & x-2 \\ 4 & 0 & y-3 \\ 3 & 2 & z-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{a}_2 \rightarrow \mathbf{a}_2 - 4\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \rightarrow \mathbf{a}_3 - 3\mathbf{a}_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & x-2 \\ 0 & 4 & -4x+y+5 \\ 0 & 5 & -3x+z+5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{a}_3 \rightarrow 4\mathbf{a}_3 - 5\mathbf{a}_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & x-2 \\ 0 & 4 & -4x+y+5 \\ 0 & 0 & 8x-5y+4z-5 \end{pmatrix}$$

Imponendo che l'ultima riga sia nulla, si ha la condizione

$$8x - 5y + 4z - 5 = 0 ,$$

che fornisce l'equazione voluta. Lasciamo come esercizio facoltativo di spiegare in dettaglio come mai questo procedimento funziona.

Esercizio 81 *Sia fissato un riferimento nello spazio. Scrivere un'equazione cartesiana del piano che passa per il punto di coordinate $(2, 3, 1)$ ed è parallelo ai vettori di componenti $(1, 4, 3)$ e $(-1, 0, 2)$.*

Le risposte e i procedimenti possibili sono esattamente gli stessi di quelli dell'esercizio precedente.

Esercizio 82 *Sia fissato un riferimento nello spazio. Scrivere un'equazione cartesiana del piano passante per i punti A , B e C , di coordinate rispettive $(2, 3, 1)$, $(3, 7, 4)$ e $(1, 3, 3)$.*

Soluzione. Il piano in questione deve essere parallelo ai vettori $B - A$ e $C - A$ (perché i segmenti orientati AB e AC devono essere contenuti nel piano, e quindi devono essere impropriamente paralleli ad esso). Per l'Esercizio 2, le componenti di tali vettori sono rispettivamente $(1, 4, 3)$ e $(-1, 0, 2)$. Dunque, di nuovo, il piano è quello che passa per il punto di coordinate $(2, 3, 1)$ ed è parallelo ai vettori di componenti $(1, 4, 3)$ e $(-1, 0, 2)$. Dunque la risposta è di nuovo quella degli esercizi precedenti.

Esercizio 83 *Sia fissato un riferimento dello spazio. Scrivere una rappresentazione cartesiana della retta r di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Ricordiamo che una rappresentazione cartesiana di una retta si ottiene mettendo a sistema le equazioni di due piani la cui intersezione sia la retta stessa. Naturalmente, una possibile via sarebbe quella di scegliere a piacere due tali piani, e poi applicare per ciascuno uno dei metodi visti per l'Esercizio 80. La cosa risulterebbe inutilmente lunga: per questo tipo di esercizi, il metodo "per sostituzione" va benone (in quanto c'è un solo parametro da sostituire). Procediamo quindi così.

Ricaviamo la t dalla prima:

$$t = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}.$$

Sostituiamo nelle altre due:

$$y = 1 - 2\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \frac{2}{3}x + y - \frac{7}{3} = 0$$

$$z = 2 + \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \frac{1}{3}x - z + \frac{4}{3} = 0.$$

La rappresentazione voluta è

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + y - \frac{7}{3} = 0 \\ \frac{1}{3}x - z + \frac{4}{3} = 0 \end{cases}.$$

Naturalmente, per ricavare la t si può scegliere una qualunque delle tre equazioni parametriche (ad esempio, nel presente caso per semplificare i conti conveniva scegliere la terza), purché la t effettivamente compaia in essa (cioè abbia coefficiente non nullo).

Esercizio 84 Sia fissato un riferimento dello spazio. Scrivere una rappresentazione parametrica del piano di equazione

$$3x - 2y + 4z - 2 = 0 .$$

Soluzione. Se assegniamo valori a scelta alla y e alla z , diciamo rispettivamente t ed s , otteniamo la x :

$$x = \frac{2}{3}t - \frac{4}{3}s + \frac{2}{3} .$$

Quindi una rappresentazione parametrica è data da:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}t - \frac{4}{3}s + \frac{2}{3} \\ y = t \\ z = s \end{cases} .$$

Dunque passare da un'equazione cartesiana ad una rappresentazione parametrica, consiste sostanzialmente nel risolvere l'equazione.

Esercizio 85 Sia fissato un riferimento dello spazio. Scrivere una rappresentazione parametrica della retta di equazioni

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -2x - y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Risolviamo il sistema. Usando il metodo di Gauss, abbiamo

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{a}_2 \rightarrow \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_1} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \end{array} \right) .$$

Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -5y + 5z = 5 \end{cases}$$

Possiamo assegnare a z un valore arbitrario, diciamo t , e sostituire a ritroso:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 & \rightarrow & x - 2(t - 1) + t = 0 & \rightarrow & x = t - 2 \\ -5y + 5t = 5 & \rightarrow & y = t - 1 \end{cases}$$

Questo ci assicura che le soluzioni del sistema, e quindi le coordinate dei punti di r , sono tutte quelle del tipo $(t - 2, t - 1, t)$, con t numero reale. In altre parole, una rappresentazione parametrica di r è

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases} .$$

Esercizio 86 Fissato un riferimento nello spazio, trovare i numeri direttori della retta di equazioni

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - 5y + z = -9 \end{cases}$$

Soluzione. Una possibilità è quella di trovare una rappresentazione parametrica, per poi prendere i tre coefficienti del parametro.

Alternativamente, si può osservare che un vettore di componenti (l, m, n) è parallelo alla retta se e solo se è parallelo ad entrambi i piani di cui la retta è intersezione. Quindi i numeri direttori devono soddisfare le due condizioni di parallelismo:

$$\begin{cases} 2l - m + n = 0 \\ l - 5m + n = 0 \end{cases}$$

A questo punto, una qualunque soluzione non nulla del sistema ora ottenuto costituisce una terna di numeri direttori (basta dunque risolvere il sistema).

C'è anche una formula "bell'e pronta". Si può infatti considerare la matrice dei coefficienti (che è uguale alla matrice dei coefficienti del sistema che rappresenta la retta)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

e osservare che i due determinanti

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

sono nulli perché hanno righe uguali.

Sviluppando secondo la prima riga abbiamo:

$$2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - 1 \left(- \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) + 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

e

$$1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - 5 \left(- \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) + 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Questo significa proprio che una soluzione è data da

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$$

cioè dai tre minori della matrice dei coefficienti, con il secondo cambiato di segno:

$$(4, -1, -9).$$

Esercizio 87 Fissato un riferimento nello spazio, trovare i numeri direttori della retta di equazioni

$$\begin{cases} x - 3y + 2z - 2 = 0 \\ 2x - y + 3z + 9 = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Se vogliamo usare la formula illustrata sopra, basta scrivere la matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

e prendere i tre minori (il secondo cambiato di segno)

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -7 \quad - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5.$$

Dunque i numeri direttori voluti sono

$$(-7, 1, 5).$$

Esercizio 88 *Fissato un riferimento monometrico ortogonale dello spazio, trovare i coseni direttori della retta di equazioni*

$$\begin{cases} x - 3y + 2z - 2 = 0 \\ 2x - y + 3z + 9 = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Come abbiamo visto prima, una terna di numeri direttori è $(-7, 1, 5)$. Il modulo del vettore che ha queste componenti è

$$\sqrt{(-7)^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}.$$

Dunque i coseni direttori si ottengono dividendo $(-7, 1, 5)$ per $5\sqrt{3}$:

$$\left(-\frac{7\sqrt{3}}{15}, \frac{\sqrt{3}}{15}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right).$$

Esercizio 89 *Fissato un riferimento monometrico ortogonale nello spazio, sia r la retta rappresentata da*

$$\begin{cases} 2x + y + z - 2 = 0 \\ 2x + 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

e sia π il piano di equazione

$$y - 2z - 1 = 0.$$

Dire se r e π sono ortogonali e se sono paralleli.

Soluzione. Calcolando i numeri direttori di r come visto in precedenza, otteniamo $(3, -4, -2)$. I parametri di giacitura di π sono $(0, 1, -2)$. Poiché le due terne non sono proporzionali, r e π non sono ortogonali. Poiché

$$3 \cdot 0 + (-4) \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) = 0 - 4 + 4 = 0,$$

r e π sono paralleli.

Esercizio 90 *Fissato un riferimento monometrico ortogonale nello spazio, sia r la retta rappresentata da*

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 3t \\ z = t \end{cases}$$

e sia π il piano di equazione

$$y - z - 8 = 0.$$

Dire se r e π sono ortogonali e se sono paralleli.

Soluzione. I numeri direttori di r sono dati dai tre coefficienti del parametro t : $(-1, -3, 1)$. I parametri di giacitura di π sono $(0, 1, -1)$. Poiché le due terne non sono proporzionali, r e π non sono ortogonali. Poiché

$$(-1) \cdot 0 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0 - 3 - 1 = -4,$$

r e π non sono neppure paralleli.

Esercizio 91 Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, sia r la retta rappresentata da

$$\begin{cases} x - y + z - 3 = 0 \\ 2x - y + 3z - 6 = 0 \end{cases}$$

ed r' la retta rappresentata da

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = 2 \end{cases}.$$

Le rette r ed r' sono ortogonali? Sono parallele? Sono sghembe?

Soluzione. I numeri direttori di r sono $(-2, -1, 1)$ (calcolati come al solito coi tre minori). I numeri direttori di r' si hanno subito: $(-2, 1, 0)$. Poiché

$$(-2) \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 3,$$

le rette non sono ortogonali. Poiché le due terne non sono proporzionali, le rette non sono nemmeno parallele. Per controllare se sono sghembe, visto che sappiamo che non sono parallele, basta controllare che non siano incidenti. Per far questo, si può cercare un valore di t che dia luogo ad un punto che appartenga anche ad r :

$$\begin{cases} (1 - 2t) - (2 + t) + 2 - 3 = 0 \\ 2(1 - 2t) - (2 + t) + 3 \cdot 2 - 6 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} -3t - 2 = 0 \\ -5t = 0 \end{cases}.$$

poiché tale sistema è chiaramente incompatibile, le rette non sono incidenti. Quindi r ed s sono sghembe.

19 Proiezioni ortogonali

Definizione 92 Sia π un piano, siano P ed r un punto ed una retta contenuti in π e sia s l'unica retta contenuta in π , passante per P ed ortogonale ad r (cfr. Proposizione 47). Il punto d'intersezione tra r ed s si chiama proiezione ortogonale di P su r .

L'applicazione

$$\pi \rightarrow r$$

che manda ogni punto di π nella sua proiezione ortogonale su r , viene detta proiezione ortogonale di π su r .

La definizione ora data si applica a punti e rette contenuti in un fissato piano. Se abbiamo un punto P ed una retta r nello spazio, risulta definita la proiezione ortogonale di P su r ?

Osservazione 93 *Sia P un punto ed r una retta nello spazio. Se P non appartiene ad r , esiste un unico piano che li contiene entrambi. Dunque risulta univocamente definita la proiezione ortogonale di P su r . Se invece $P \in r$, allora esistono infiniti piani che contengono insieme P ed r ; ma in uno qualunque di questi piani, la proiezione ortogonale di P su r coincide sempre con P . Dunque si può dire, senza ambiguità, che se $P \in r$ la proiezione ortogonale di P su r è uguale a P .*

Dunque, sia che $P \notin r$, sia che $P \in r$, è sempre determinata una proiezione ortogonale di P su r , a prescindere dal piano in cui sono contenuti.

Proposizione 94 *Sia P un punto ed r una retta nello spazio, e sia σ l'unico piano passante per P ed ortogonale ad r (cfr. Esercizio 74). Allora la proiezione ortogonale di P su r è l'unico punto di intersezione di σ con r .*

Dimostrazione. Sia π un qualunque piano contenente P ed r (è unico se $P \notin r$). I piani π e σ non possono essere paralleli, perché r è ortogonale a tutte le rette di σ . Dunque l'intersezione di π e σ è una retta s . Inoltre, poiché sia π che σ contengono P , la retta s contiene P . Ancora poiché r è ortogonale a tutte le rette di σ , si ha che r ed s sono ortogonali. Inoltre r ed s sono tutte e due contenute in π . Quindi s è l'unica perpendicolare ad r passante per P e contenuta in π . Inoltre si ha

$$r \cap s = r \cap \pi \cap \sigma \stackrel{r \subseteq \pi}{=} r \cap \sigma;$$

quindi l'intersezione di σ con r coincide con l'unico punto di intersezione di r ed s , che è poi, per definizione, la proiezione ortogonale di P su r , come volevamo.

Definizione 95 *Se r è una retta e se indichiamo con \mathcal{S} lo spazio ordinario, l'applicazione*

$$\mathcal{S} \rightarrow r$$

che manda ogni punto nella sua proiezione ortogonale su r , viene detta proiezione ortogonale su r .

Definizione 96 *Siano P e π un punto e un piano, e sia s l'unica retta passante per P ed ortogonale a π (cfr. Esercizio 73). Il punto d'intersezione tra π ed s si chiama proiezione ortogonale di P su π .*

Se indichiamo con \mathcal{S} lo spazio ordinario, l'applicazione

$$\mathcal{S} \rightarrow \pi$$

che manda ogni punto nella sua proiezione ortogonale su π , viene detta proiezione ortogonale su π .

Osservazione 97 Sia A un punto, r una retta ed H la proiezione ortogonale di A su r . Se O è un punto di r e \mathbf{w} un versore parallelo ad r (cioè un vettore direzionale di r di modulo 1), si ha:

$$H - O = ((A - O) \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}$$

(cfr. la figura prima della Definizione 50). Sia ora \mathbf{v} un qualunque vettore libero, sia PQ un suo rappresentante, siano P' e Q' le proiezioni ortogonali rispettivamente di P e Q su r e sia \mathbf{v}' il vettore rappresentato da $P'Q'$. Si ha:

$$\begin{aligned} P' - O &= ((P - O) \cdot \mathbf{w})\mathbf{w} \\ Q' - O &= ((Q - O) \cdot \mathbf{w})\mathbf{w} \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= Q' - P' = (Q' - O) - (P' - O) = ((Q - O) \cdot \mathbf{w})\mathbf{w} - ((P - O) \cdot \mathbf{w})\mathbf{w} = \\ &= (((Q - O) - (P - O)) \cdot \mathbf{w})\mathbf{w} = ((Q - P) \cdot \mathbf{w})\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w} \end{aligned}$$

La formula

$$\mathbf{v}' = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}$$

ora ottenuta, dimostra che \mathbf{v}' non dipende dalla scelta del rappresentante PQ . Anzi, si ha di più: non dipende nemmeno da r , quanto piuttosto dalla direzione di r . Infatti sostituendo r con qualsiasi altra retta parallela a \mathbf{w} , la formula per \mathbf{v}' resta la stessa.

Definizione 98 Sia \mathcal{V} lo spazio dei vettori liberi e sia \mathcal{W} un sottospazio di dimensione uno. Detto \mathbf{w} un versore appartenente a \mathcal{W} , l'applicazione

$$\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$$

data da

$$\mathbf{v} \mapsto (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}$$

si dice proiezione ortogonale vettoriale su \mathcal{W} .

L'Osservazione 97 mostra che la proiezione ortogonale p su una retta r induce una proiezione ortogonale vettoriale π sullo spazio direttore di r , tale che

$$\pi(Q - P) = p(Q) - p(P) .$$

Osservazione 99 La proiezione ortogonale di un vettore \mathbf{v} su un sottospazio \mathcal{W} di dimensione 1, può essere caratterizzata come l'unico vettore \mathbf{v}' appartenente a \mathcal{W} tale che $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$ è ortogonale a tutti i vettori di \mathcal{W} . Infatti, detto \mathbf{w} un versore appartenente a \mathcal{W} , un vettore appartenente a \mathcal{W} è del tipo $h\mathbf{w}$, con h scalare. Il vettore $\mathbf{v} - h\mathbf{w}$ è ortogonale a tutti i vettori di \mathcal{W} se e solo se è ortogonale a \mathbf{w} , e quindi se e solo se.

$$(\mathbf{v} - h\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} = 0 .$$

Ma

$$(\mathbf{v} - h\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} - h(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} - h$$

(\mathbf{w} ha modulo 1). Quindi concludiamo che $\mathbf{v} - h\mathbf{w}$ è ortogonale a tutti i vettori di \mathcal{W} se e solo se

$$h = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} ,$$

cioè se e solo se $h\mathbf{w}$ è proprio la proiezione ortogonale di \mathbf{v} .

Esercizio 100 (facoltativo). Sia \mathcal{V} lo spazio dei vettori liberi e sia \mathcal{W} un sottospazio di dimensione due. Dimostrare che per ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ c'è un unico vettore \mathbf{v}' appartenente a \mathcal{W} tale che $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$ è ortogonale a tutti i vettori di \mathcal{W} .

Suggerimento. Prendere spunto dalla dimostrazione del Lemma 58.

Definizione 101 Sia \mathcal{V} lo spazio dei vettori liberi e sia \mathcal{W} un sottospazio di dimensione due. L'applicazione

$$\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$$

che manda ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ nell'unico vettore \mathbf{v}' appartenente a \mathcal{W} tale che $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$ è ortogonale a tutti i vettori di \mathcal{W} , viene detta proiezione ortogonale vettoriale su \mathcal{W} .

Non sarebbe difficile dimostrare che la proiezione ortogonale p su un piano α induce una proiezione ortogonale vettoriale π sullo spazio direttore di α , tale che

$$\pi(Q - P) = p(Q) - p(P) .$$

20 Simmetrie ortogonali

Definizione 102 Sia π un piano, sia P un punto e sia H la proiezione ortogonale di P su π . Il punto

$$P' = H + (H - P)$$

(cioè l'unico punto tale che H sia punto medio di $\overline{PP'}$) si dice simmetrico di P rispetto a π .

Detto \mathcal{S} lo spazio ordinario, l'applicazione

$$\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$$

che manda ogni punto nel suo simmetrico rispetto a π si dice simmetria ortogonale rispetto a π .

Definizione 103 Sia r una retta, sia P un punto e sia H la proiezione ortogonale di P su r . Il punto

$$P' = H + (H - P)$$

(cioè l'unico punto tale che H sia punto medio di $\overline{PP'}$) si dice *simmetrico di P rispetto ad r*

Detto \mathcal{S} lo spazio ordinario, l'applicazione

$$\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$$

che manda ogni punto nel suo simmetrico rispetto ad r si dice *simmetria ortogonale rispetto ad r* .

Definizione 104 Siano O e P punti. Il punto

$$P' = O + (O - P)$$

(cioè l'unico punto tale che O sia punto medio di $\overline{PP'}$) si dice *simmetrico di P rispetto ad O* .

Detto \mathcal{S} lo spazio ordinario, l'applicazione

$$\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$$

che manda ogni punto nel suo simmetrico rispetto ad O si dice *simmetria centrale di centro O* .

Proposizione 105 Sia \mathcal{S} lo spazio ordinario e sia $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ una simmetria (ortogonale, rispetto ad un piano o ad una retta, o centrale). Detto \mathcal{V} lo spazio dei vettori liberi, esiste una ed una sola applicazione $\pi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ tale che per ogni $P, Q \in \mathcal{S}$ si abbia

$$\pi(Q - P) = f(Q) - f(P).$$

Tralasciamo la dimostrazione. Notiamo solo che nel caso della simmetria centrale, π non è altro che l'applicazione che manda ogni vettore nel suo opposto.

21 Applicazioni lineari

Definizione 106 Siano V e W spazi vettoriali. Un'applicazione

$$f : V \longrightarrow W$$

si dice *lineare* se comunque si prendano vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ e uno scalare h , si ha

- $f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2)$
- $f(h\mathbf{v}_1) = hf(\mathbf{v}_1)$.

Le applicazioni lineari vengono anche dette omomorfismi.

Esempio 107 Consideriamo lo spazio vettoriale \mathbb{R} e l'applicazione

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita da

$$f(x) = x^2$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Poiché $f(1+1) = 4$ e $f(1) + f(1) = 2$, abbiamo $f(1+1) \neq f(1) + f(1)$. Dunque f non è un'applicazione lineare.

Naturalmente, siccome le applicazioni sono anche dette funzioni, un'applicazione lineare tra spazi vettoriali può anche essere chiamata *funzione lineare*. Ricordiamo però che negli appunti di Geometria I avevamo già definito una *funzione lineare*

$$\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

come una qualunque funzione del tipo

$$\ell(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n,$$

dove a_1, \dots, a_n sono scalari fissati.

Facciamo vedere subito che non c'è contrasto tra le due definizioni.

Esempio 108 Consideriamo la funzione

$$\ell : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

data da

$$\ell(x, y, z) = 2x - y + 3z$$

per tutti i vettori $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Prendiamo due vettori qualunque $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ in \mathbb{R}^3 , e un qualunque scalare h . Si ha

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= \ell(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = 2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) = \\ &= 2x_1 + 2x_2 - y_1 - y_2 + 3z_1 + 3z_2 \end{aligned}$$

e

$$\ell(\mathbf{v}_1) + \ell(\mathbf{v}_2) = 2x_1 - y_1 + 3z_1 + 2x_2 - y_2 + 3z_2$$

Per le proprietà commutativa e associativa dell'addizione in \mathbb{R} , abbiamo subito che i valori ottenuti per $\ell(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$ ed $\ell(\mathbf{v}_1) + \ell(\mathbf{v}_2)$ sono uguali. Dunque

$$\bullet \ell(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \ell(\mathbf{v}_1) + \ell(\mathbf{v}_2).$$

Inoltre si ha

$$\ell(h\mathbf{v}_1) = \ell(hx_1, hy_1, hz_1) = 2hx_1 - hy_1 + 3hz_1 = h(2x_1 - y_1 + 3z_1) = h\ell(\mathbf{v}_1),$$

dunque

- $\ell(h\mathbf{v}_1) = h\ell(\mathbf{v}_1)$.

Valgono dunque le due proprietà necessarie ad affermare che ℓ è un'applicazione lineare.

Esercizio 109 Sia $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ e sia

$$\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

la funzione data da

$$\ell(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n,$$

per tutti i vettori $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Dimostrare che ℓ è un'applicazione lineare.

L'esercizio ora proposto mostra che le funzioni che nel corso di Geometria I abbiamo chiamato lineari, sono lineari anche nel senso della nuova definizione. La Definizione 106 è però molto più generale (coinvolge molte più funzioni).

Esempio 110 Consideriamo la funzione

$$l : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

data da

$$l(x, y, z) = 2x - y + 3z + 5$$

per tutti i vettori $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Presi $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 0)$ abbiamo

$$l(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = l(1, 0, 0) = 7$$

e

$$l(\mathbf{v}_1) + l(\mathbf{v}_2) = 7 + 5 = 12,$$

dunque

$$l(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \neq l(\mathbf{v}_1) + l(\mathbf{v}_2).$$

Quindi l'applicazione l non è lineare.

In qualche testo è possibile trovare il termine “polinomio lineare” per indicare un polinomio di primo grado. In questo caso bisogna stare attenti, perché se tale polinomio non ha il termine noto nullo (non è omogeneo), allora non definisce un'applicazione lineare.

Esempio 111 Sia \mathcal{V} lo spazio dei vettori liberi, sia \mathcal{W} un sottospazio di \mathcal{V} di dimensione uno o due e sia

$$\pi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$$

la proiezione ortogonale su \mathcal{W} (cfr. Definizioni 98 e 101, cfr. anche Osservazione 99). Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{W}$ ed $h \in \mathbb{R}$. Per ogni vettore $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, poiché

$$(\mathbf{v}_1 - \pi(\mathbf{v}_1)) \cdot \mathbf{w} = 0, \quad (\mathbf{v}_2 - \pi(\mathbf{v}_2)) \cdot \mathbf{w} = 0,$$

abbiamo

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - (\pi(\mathbf{v}_1) + \pi(\mathbf{v}_2))) \cdot \mathbf{w} = 0.$$

Quindi $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - (\pi(\mathbf{v}_1) + \pi(\mathbf{v}_2))$ è ortogonale a tutti i vettori di \mathcal{W} (e $\pi(\mathbf{v}_1) + \pi(\mathbf{v}_2)$ appartiene a \mathcal{W}). Dunque

- $\pi(\mathbf{v}_1) + \pi(\mathbf{v}_2) = \pi(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$.

In maniera simile si prova che

- $\pi(h\mathbf{v}_1) = h\pi(\mathbf{v}_1)$.

Questo prova che π è un'applicazione lineare.

Abbiamo quindi visto che le proiezioni ortogonali vettoriali sono applicazioni lineari.

Esempio 112 *Sia consideri l'applicazione*

$$\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

data da

$$(x, y, z) \mapsto (x, y) .$$

Comunque si prendano vettori $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e uno scalare h , si ha

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= \pi(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \\ &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = \pi(\mathbf{v}_1) + \pi(\mathbf{v}_2) \end{aligned}$$

e

$$\pi(h\mathbf{v}_1) = \pi(hx_1, hy_1, hz_1) = (hx_1, hy_1) = h(x_1, y_1) = h\pi(\mathbf{v}_1).$$

Dunque π è un'applicazione lineare.

C'è una stretta relazione tra l'esempio ora esposto e il precedente Esempio 111. Infatti, interpretando i vettori di \mathbb{R}^3 come vettori delle componenti di vettori liberi, rispetto ad un riferimento monometrico ortogonale $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$, e i vettori di \mathbb{R}^2 come vettori delle componenti di vettori paralleli al piano xy , rispetto al riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$, l'applicazione

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

descrive la proiezione ortogonale vettoriale sullo spazio direttore del piano xy . Non sarebbe difficile precisare e dimostrare questo fatto (peraltro intuitivo), ma ce ne asteniamo.

Proposizione 113 *Sia \mathcal{V} lo spazio dei vettori liberi e sia π l'applicazione indotta da una simmetria come nella Proposizione 105. Allora π è lineare.*

Tralasciamo la dimostrazione.

Esempio 114 *Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una sua base. Se un vettore \mathbf{v} ha componenti (x_1, \dots, x_n) , si ha per definizione*

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n .$$

Se \mathbf{w} è un'altro vettore e (y_1, \dots, y_n) sono le sue componenti, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{w} &= x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n + y_1\mathbf{v}_1 + \dots + y_n\mathbf{v}_n = \\ &= (x_1 + y_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (x_n + y_n)\mathbf{v}_n. \end{aligned}$$

Dunque il vettore delle componenti di $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ è $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$, che è proprio uguale a

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n).$$

In maniera simile si vede subito che se h è un qualunque scalare, il vettore delle componenti di $h\mathbf{v}$ è $h(x_1, \dots, x_n)$.

Concludiamo che l'applicazione

$$c_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

che ad ogni vettore di \mathbf{v} associa il vettore numerico delle sue componenti rispetto a \mathcal{B} , è un'applicazione lineare.

Definizione 115 L'applicazione $c_{\mathcal{B}}$, introdotta nell'esempio precedente, verrà detta *coordinazione* rispetto a \mathcal{B} .

Esempio 116 Sia V uno spazio vettoriale e sia r uno scalare. Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono vettori qualsiasi e h è un qualsiasi scalare, per le proprietà della moltiplicazione di scalari per vettori si ha

$$r(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = r\mathbf{v}_1 + r\mathbf{v}_2$$

e

$$r(h\mathbf{v}_1) = (rh)\mathbf{v}_1 = h(r\mathbf{v}_1).$$

Questo dimostra che l'applicazione

$$\omega_r : V \longrightarrow V$$

che ad ogni vettore \mathbf{v} associa $r\mathbf{v}$ è un'applicazione lineare.

Se, nella situazione dell'esempio ora visto, V è lo spazio dei vettori liberi, l'applicazione ω_r si può facilmente visualizzare: se $r \geq 0$, ω_r consiste nel contrarre ($r < 1$) o dilatare ($r > 1$) i vettori; se $r < 0$ l'applicazione, oltre a questi effetti, ha quello di cambiare il verso.

Nel caso dei vettori numerici, l'applicazione ora vista consiste nel moltiplicare per r tutte le componenti. Cosa succede se invece di moltiplicarle tutte, ne moltiplichiamo solo alcune (ad esempio, solo la prima)?

Esercizio 117 Sia r uno scalare. Dimostrare che l'applicazione

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

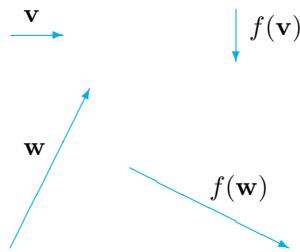
data da

$$(x, y) \mapsto (rx, y)$$

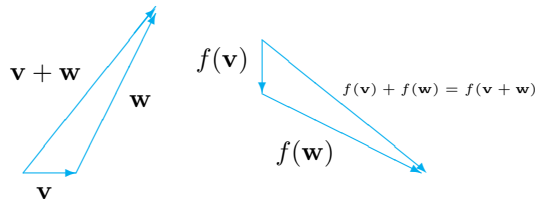
è lineare.

Se interpretiamo i vettori numerici come vettori delle componenti di vettori geometrici paralleli ad un piano, l'esempio ora visto dà luogo ad un'applicazione lineare che si può visualizzare immaginando di dilatare (o contrarre) il piano "tirandolo" lungo l'asse x .

Continuando a parlare in maniera informale, se "ruotiamo" un piano (ad esempio, di 90 gradi) diamo luogo ad un'applicazione tra vettori paralleli al piano, come illustrato nella figura qui sotto:



È abbastanza evidente che tale applicazione è lineare (vedi figura qui sotto).



Per il momento tralasciamo di precisare quanto appena detto e di dare una definizione formale dell'applicazione ora descritta. Lo faremo più tardi, ma intanto invitiamo il lettore a fare qualche tentativo "in proprio".

Esempio 118 Sia A una matrice di tipo $m \times n$. Ricordando che $\mathbb{R}^{m \times p}$ e $\mathbb{R}^{n \times p}$ sono gli spazi delle matrici di tipo $m \times p$ ed $n \times p$, (cfr. Paragrafo 6 degli appunti di Geometria I), possiamo considerare l'applicazione

$$\mathbb{R}^{n \times p} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times p}$$

data da

$$M \mapsto AM,$$

cioè l'applicazione che ad ogni matrice M di tipo $n \times p$ associa il prodotto righe per colonne AM , che è una matrice di tipo $m \times p$.

Per le proprietà del prodotto righe per colonne (cfr. Paragrafo 37 degli appunti di Geometria I), comunque si prendano matrici $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^{m \times p}$ e uno scalare h , abbiamo

- $A(M_1 + M_2) = AM_1 + AM_2$
- $A(hM_1) = h(AM_1)$

Dunque l'applicazione considerata è lineare.

22 Proprietà elementari delle applicazioni lineari

Proposizione 119 Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali. Allora si ha

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

(qui abbiamo indicato con lo stesso simbolo $\mathbf{0}$ i vettori nulli di V e W).

Dimostrazione. Basta osservare che

$$f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0}) - f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} + \mathbf{0}) - f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) - f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Proposizione 120 Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali. Allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ si ha

$$f(-\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v}).$$

Dimostrazione. Basta osservare che

$$f(-\mathbf{v}) + f(\mathbf{v}) = f(-\mathbf{v} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

e dunque $f(-\mathbf{v})$ è l'opposto di $f(\mathbf{v})$, come volevamo.

Proposizione 121 Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali. Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è un sistema di vettori linearmente dipendente, allora $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$ è ancora un sistema di vettori linearmente dipendente.

Dimostrazione. Siccome $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è linearmente dipendente, esistono scalari h_1, \dots, h_n non tutti nulli tali che

$$h_1\mathbf{v}_1 + \dots + h_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Dunque si ha

$$f(h_1\mathbf{v}_1 + \dots + h_n\mathbf{v}_n) = f(\mathbf{0}).$$

Applicando varie volte le proprietà

- $f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2)$

- $f(h\mathbf{v}_1) = hf(\mathbf{v}_1)$,

si ha

$$f(h_1\mathbf{v}_1 + \cdots + h_n\mathbf{v}_n) = h_1f(\mathbf{v}_1) + \cdots + h_nf(\mathbf{v}_n).$$

Siccome per la Proposizione 119 si ha anche $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, otteniamo

$$h_1f(\mathbf{v}_1) + \cdots + h_nf(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}.$$

Poiché gli scalari non sono tutti nulli, questo prova che $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$ è linearmente dipendente, come volevamo.

Esercizio 122 Siano V e W spazi vettoriali e sia f l'applicazione che ad ogni vettore di V associa il vettore nullo di W . Dimostrare che f è lineare.

Esempio 123 Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione che ad ogni vettore di \mathbb{R}^2 associa il vettore nullo $(0, 0, 0)$. Per l'esercizio precedente, f è lineare. Notiamo che il sistema

$$((1, 0), (0, 1))$$

è linearmente indipendente, mentre il sistema

$$(f((1, 0)), f((0, 1)))$$

essendo costituito da vettori nulli non è indipendente.

Possiamo dire che le applicazioni lineari conservano sempre la dipendenza (cfr. Proposizione 121), ma non sempre conservano l'indipendenza (cfr. Esempio 123).

Proposizione 124 Siano $f : V \rightarrow W$ e $g : W \rightarrow X$ applicazioni lineari tra spazi vettoriali. Allora l'applicazione composta $g \circ f$ è lineare.

Dimostrazione. Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ vettori di V e h uno scalare. Si ha

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= g(f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)) \stackrel{f \text{ lineare}}{=} g(f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2)) \stackrel{g \text{ lineare}}{=} \\ &= g(f(\mathbf{v}_1)) + g(f(\mathbf{v}_2)) = (g \circ f)(\mathbf{v}_1) + (g \circ f)(\mathbf{v}_2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (g \circ f)(h\mathbf{v}_1) &= g(f(h\mathbf{v}_1)) \stackrel{f \text{ lineare}}{=} g(hf(\mathbf{v}_1)) \stackrel{g \text{ lineare}}{=} hg(f(\mathbf{v}_1)) = \\ &= h(g \circ f)(\mathbf{v}_1). \end{aligned}$$

Quindi $g \circ f$ è lineare, come volevamo.

Proposizione 125 Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare biettiva. Allora l'applicazione inversa $f^{-1} : W \rightarrow V$ è lineare.

Dimostrazione. Siano $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$ e $h \in \mathbb{R}$. Per definizione di applicazione inversa, per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ si ha

$$f^{-1}(f(\mathbf{v})) = \mathbf{v} \quad (8)$$

e per ogni vettore $\mathbf{w} \in W$ si ha

$$f(f^{-1}(\mathbf{w})) = \mathbf{w} . \quad (9)$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) &\stackrel{(9)}{=} f^{-1}(f(f^{-1}(\mathbf{w}_1)) + f(f^{-1}(\mathbf{w}_2))) \stackrel{f \text{ lineare}}{=} \\ &= f^{-1}(f(f^{-1}(\mathbf{w}_1) + f^{-1}(\mathbf{w}_2))) \stackrel{(8)}{=} f^{-1}(\mathbf{w}_1) + f^{-1}(\mathbf{w}_2) \end{aligned}$$

In maniera simile si dimostra che

$$f^{-1}(h\mathbf{w}_1) = hf^{-1}(\mathbf{w}_1) .$$

Dunque f^{-1} è lineare, come volevamo.

23 Isomorfismi

Definizione 126 *Un'applicazione lineare e biettiva $f : V \rightarrow W$ viene detta isomorfismo tra V e W . Se esiste un tale isomorfismo, V e W vengono detti isomorfi*

Esempio 127 *Sia V uno spazio vettoriale. L'applicazione identica*

$$\text{id}_V : V \rightarrow V$$

(cioè l'applicazione che ad ogni vettore di V associa sé stesso) è un isomorfismo.

Osservazione 128 *Per la Proposizione 125 si ha che l'inversa di un'isomorfismo è ancora un isomorfismo.*

Osservazione 129 *Se $f : V \rightarrow W$ e $g : W \rightarrow X$ sono isomorfismi, per la Proposizione 124, $g \circ f$ è un'isomorfismo tra V e X .*

Osservazione 130 *La relazione "essere isomorfi" ha la proprietà riflessiva (per l'Esempio 127), simmetrica (per l'Osservazione 128) e transitiva (per l'Osservazione 129). Dunque la relazione d'isomorfismo è una relazione d'equivalenza.*

Esempio 131 *Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una sua base. Nell'Esempio 114 abbiamo visto che l'applicazione*

$$c_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

che ad ogni vettore di V associa il vettore numerico delle sue componenti rispetto a \mathcal{B} , è un'applicazione lineare. Poiché tale applicazione è anche biettiva, essa è un'isomorfismo.

Osservazione 132 *Dall'esempio ora esposto deduciamo che un qualunque spazio vettoriale (sui reali) di dimensione n è isomorfo ad \mathbb{R}^n .*

Proposizione 133 *Sia $f : V \rightarrow W$ un'isomorfismo tra spazi vettoriali. Se*

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$$

è un sistema di vettori linearmente indipendente, allora

$$(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$$

è ancora un sistema di vettori linearmente indipendente.

Dimostrazione. Se per assurdo $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$ fosse linearmente dipendente, per le Proposizioni 121 e 125 il sistema

$$(f^{-1}(f(\mathbf{v}_1)), \dots, f^{-1}(f(\mathbf{v}_n)))$$

sarebbe linearmente dipendente, il che va contro l'ipotesi perché tale sistema è proprio $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. Dunque $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$ deve essere per forza indipendente, come volevamo.

Abbiamo quindi visto che, mentre un'applicazione lineare non sempre conserva l'indipendenza (cfr. Esempio 123), un'isomorfismo lo fa. In effetti gli isomorfismi conservano molte più cose! Parlando informalmente, se in uno spazio vettoriale V vale una proprietà \mathcal{P} , e questa proprietà \mathcal{P} ha a che fare solo con le operazioni, ma non con le caratteristiche "interne" dei singoli vettori, allora \mathcal{P} vale anche in ogni spazio vettoriale isomorfo a V .

Osservazione 134 *Poiché gli isomorfismi conservano sia l'indipendenza che la dipendenza, due spazi isomorfi devono avere la stessa dimensione.*

Dalle Osservazioni 132 e 134 deduciamo che due spazi vettoriali (finitamente generati) sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

24 Nucleo e Immagine

Definizione 135 *Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. L'insieme*

$$f^{-1}(\mathbf{0}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{v} \in V : f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

viene detto nucleo di f , e viene indicato con

$$\text{Ker } f$$

L'insieme immagine di f , cioè l'insieme

$$\{f(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V\}$$

viene spesso detto semplicemente immagine di f e viene denotato con

$\text{Im } f$

Proposizione 136 *Il nucleo di un'applicazione lineare f è un sottospazio del dominio, l'immagine di f è un sottospazio dello spazio d'arrivo.*

Esercizio 137 *Dimostrare la proposizione di sopra.*

Osservazione 138 *Se $f : V \rightarrow W$ è un'applicazione lineare iniettiva, essa dà luogo ad un isomorfismo*

$$\varphi : V \rightarrow \text{Im } f$$

(che agisce come f). Siccome φ conserva l'indipendenza, e siccome un sistema linearmente indipendente di vettori in $\text{Im } f$ è ovviamente ancora linearmente indipendente in W , otteniamo che f conserva l'indipendenza.

Dunque le applicazioni lineari iniettive conservano l'indipendenza.

Proposizione 139 *Un'applicazione lineare f è iniettiva se e solo se il suo nucleo è $\{0\}$.*

Dimostrazione. Dato che il vettore nullo appartiene sempre al nucleo (per la Proposizione 119), se l'applicazione è iniettiva nessun altro vettore oltre al vettore nullo può appartenere al nucleo (altrimenti avremmo due vettori diversi con la stessa immagine).

Viceversa, supponiamo che $\text{Ker } f = \{0\}$, e consideriamo due vettori distinti \mathbf{v} e \mathbf{w} . Siccome $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$, allora $\mathbf{v} - \mathbf{w} \neq 0$, quindi deve essere per forza

$$f(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \neq 0$$

(altrimenti il nucleo conterrebbe il vettore $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ che è diverso da 0). Tenendo presente la Proposizione 120, concludiamo che

$$f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{w}) \neq 0$$

e dunque $f(\mathbf{v}) \neq f(\mathbf{w})$. Questo dimostra che vettori distinti hanno sempre immagini distinte, e quindi che f è iniettiva, come volevamo.

Particolarmente importante è il seguente teorema (alla cui non difficile dimostrazione dobbiamo però rinunciare).

Proposizione 140 *Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare, e supponiamo che V sia finitamente generato. Allora anche il nucleo e l'immagine di f sono finitamente generati e si ha*

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim V .$$

25 Applicazioni lineari tra vettori numerici

Domanda 141 Che cos'è la base standard di \mathbb{R}^n ?

Suggerimento: vedere la Definizione 150 a pag. 57 degli appunti di Geometria I.

L'Esercizio 109 ha stabilito che le applicazioni $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ che nel corso di Geometria I avevamo chiamato lineari, sono realmente applicazioni lineari. Ora ci chiediamo se esiste qualche altra applicazione lineare $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ oltre a queste.

La risposta è no, come afferma la seguente proposizione.

Proposizione 142 Sia ℓ un'applicazione lineare definita su \mathbb{R}^n e a valori in \mathbb{R} . Allora esistono scalari a_1, \dots, a_n tali che

$$\ell(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n,$$

per tutti i vettori $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Sia $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ la base standard di \mathbb{R}^n , cioè:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0, 0, \dots, 0, 0) \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0, 0, \dots, 0, 0) \\ \mathbf{e}_3 &= (0, 0, 1, 0, \dots, 0, 0) \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_{n-1} &= (0, 0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0) \\ \mathbf{e}_n &= (0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, 1).\end{aligned}$$

Per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ poniamo

$$a_i \stackrel{\text{def}}{=} \ell(\mathbf{e}_i).$$

Facciamo vedere che a_1, \dots, a_n sono proprio gli scalari che volevamo. Sia dunque (x_1, \dots, x_n) un qualunque vettore di \mathbb{R}^n . Si ha

$$\begin{aligned}\ell(x_1, \dots, x_n) &= \ell(x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) \stackrel{\ell \text{ lineare}}{=} x_1\ell(\mathbf{e}_1) + \dots + x_n\ell(\mathbf{e}_n) = \\ &= a_1x_1 + \dots + a_nx_n,\end{aligned}$$

come volevamo.

Abbiamo quindi caratterizzato tutte le possibili applicazioni lineari con dominio \mathbb{R}^n e insieme d'arrivo \mathbb{R} . In questo paragrafo vogliamo caratterizzare tutte le possibili applicazioni lineari che hanno come dominio e insieme d'arrivo degli spazi vettoriali numerici:

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Incominciamo a vedere un'esempio su tali applicazioni.

Esempio 143 Sia A una matrice di tipo $m \times n$. Se consideriamo i vettori numerici di \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m rispettivamente come matrici di tipo $1 \times n$ e $1 \times m$ (cfr. Definizione 8 a pag. 5 degli appunti di Geometria I), l'Esempio 118 ci dà un'applicazione lineare

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

(che consiste semplicemente nel moltiplicare per la matrice A).

Esempio 144 Vediamo un caso "concreto" dell'esempio precedente: sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Siccome A è una matrice di tipo 2×3 , abbiamo allora un'applicazione

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Per avere l'immagine di un vettore, ad esempio $(5, 0, -1)$, dobbiamo scriverlo come matrice colonna e moltiplicarlo a sinistra per A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo la matrice colonna

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Dunque l'immagine di $(5, 0, 1)$ è il vettore numerico $(2, 12)$.

In generale, l'immagine del vettore (x, y, z) è $(x + 2y + 3z, 2x + y - 2z)$.

Osservazione 145 Sia $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ la base standard di \mathbb{R}^n e sia A una matrice di tipo $m \times n$. Se consideriamo i vettori $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ come matrici colonna, i prodotti

$$A\mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{e}_n$$

sono proprio le colonne $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n$ di A .

Proposizione 146 Se A e B sono matrici di tipo $m \times n$ tali che l'applicazione

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

che consiste nel moltiplicare per A (come nell'Esempio 143) è uguale all'applicazione che consiste nel moltiplicare per B , allora A e B devono essere per forza uguali.

Dimostrazione. Basta considerare la base standard di \mathbb{R}^n : se le applicazioni sono uguali, per l'Osservazione 145 le colonne di A devono essere rispettivamente uguali alle colonne di B , dunque $A = B$.

Ora vedremo che tutte le possibili applicazioni lineari

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

sono comprese nell'Esempio 143. Cominciamo con una semplice osservazione che riguarda tutte le possibili funzioni con insieme d'arrivo \mathbb{R}^n .

Sia S un qualunque insieme. Una maniera ovvia per definire un'applicazione

$$\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^n$$

è quella di considerare n funzioni $S \rightarrow \mathbb{R}$, diciamo f_1, \dots, f_n . Infatti ponendo per ogni $s \in S$,

$$\varphi(s) = (f_1(s), \dots, f_n(s))$$

otteniamo una funzione

$$S \rightarrow \mathbb{R}^n .$$

Non è difficile rendersi conto che tutte le funzioni $S \rightarrow \mathbb{R}^n$ si possono ottenere in questo modo. Vediamo perché.

Proposizione 147 *Sia*

$$\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^n$$

una funzione. Allora esistono n funzioni

$$f_1 : S \rightarrow \mathbb{R}, \dots, f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$$

tali che per ogni $s \in S$ si ha

$$\varphi(s) = (f_1(s), \dots, f_n(s)) .$$

Dimostrazione. Per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ possiamo considerare l'applicazione

$$x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

che ad ogni $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ associa la sua i -esima componente, cioè a_i . In questo modo per ogni $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ abbiamo

$$\mathbf{a} = (x_1(\mathbf{a}), \dots, x_n(\mathbf{a})) . \tag{10}$$

Poniamo

$$f_1 = x_1 \circ \varphi, \dots, f_n = x_n \circ \varphi .$$

Per ogni $s \in S$ si ha

$$\begin{aligned} \varphi(s) &\stackrel{(10)}{=} (x_1(\varphi(s)), \dots, x_n(\varphi(s))) = ((x_1 \circ \varphi)(s), \dots, (x_n \circ \varphi)(s)) = \\ &= (f_1(s), \dots, f_n(s)) \end{aligned}$$

come volevamo.

Definizione 148 *La funzione*

$$x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

che ad ogni $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ associa la sua i -esima componente (cioè a_i) sarà chiamata i -esima funzione coordinata su \mathbb{R}^n

Esercizio 149 *Dimostrare che le funzioni coordinate su \mathbb{R}^n sono applicazioni lineari.*

Suggerimento. La dimostrazione diretta è facilissima, ma la soluzione si può anche ricavare subito dall'Esercizio 109.

Proposizione 150 *Sia*

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

un'applicazione lineare. Allora esiste una ed una sola matrice A di tipo $m \times n$ tale che, considerando i vettori numerici di \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m rispettivamente come matrici di tipo $1 \times n$ e $1 \times m$, si abbia

$$\varphi(X) = AX$$

per ogni $X \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ sia $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ l' i -esima funzione coordinata su \mathbb{R}^n , e poniamo

$$\ell_i = x_i \circ \varphi.$$

Come abbiamo visto nella dimostrazione della Proposizione 147, per ogni $X \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\varphi(X) = (\ell_1(X), \dots, \ell_m(X)). \quad (11)$$

Per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ l'Esercizio 149 assicura che l'applicazione $\ell_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare, e dunque per la Proposizione 142 esistono scalari $a_{i1} \dots a_{in}$ tali che per ogni $X = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\ell_i(X) = a_{i1}\bar{x}_1 + \dots + a_{in}\bar{x}_n. \quad (12)$$

Gli elementi a_{ij} trovati danno luogo ad una matrice

$$A = (a_{ij}).$$

Se consideriamo i vettori X e $\varphi(X)$ come matrici colonna, possiamo scrivere

$$\varphi(X) \stackrel{(11)}{=} \begin{pmatrix} \ell_1(X) \\ \vdots \\ \ell_m(X) \end{pmatrix} \stackrel{(12)}{=} \begin{pmatrix} a_{11}\bar{x}_1 + \dots + a_{1n}\bar{x}_n \\ \vdots \\ a_{m1}\bar{x}_1 + \dots + a_{mn}\bar{x}_n \end{pmatrix} = AX.$$

Dunque la matrice A ora ottenuta è tale che $\varphi(X) = AX$; il fatto che sia anche l'unica con questa proprietà (come volevamo) discende subito dalla Proposizione 146.

Abbiamo così descritto tutte le possibili applicazioni lineari tra vettori numerici: consistono tutte nella moltiplicazione per qualche matrice.

Concludiamo osservando che i sistemi lineari corrispondono a semplici problemi riguardanti applicazioni lineari. A questo scopo ricordiamo che se $f : X \rightarrow Y$ è una funzione e y è un elemento di Y , allora la *controimmagine* di y è l'insieme

$$f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\} .$$

Osservazione 151 *Se A è la matrice dei coefficienti di un sistema lineare e B è la colonna dei termini noti, nel Paragrafo 38 degli appunti di Geometria I abbiamo visto che risolvere il sistema equivale a trovare gli X tali che*

$$AX = B .$$

Se $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è l'applicazione lineare che consiste nella moltiplicazione per A , abbiamo dunque che risolvere il sistema equivale a trovare la controimmagine

$$\varphi^{-1}(B) .$$

Viceversa, data un'applicazione lineare $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e un vettore $B \in \mathbb{R}^m$, il problema di trovare la controimmagine di B equivale a risolvere il sistema lineare che ha B come colonna dei termini noti, e come matrice dei coefficienti la matrice corrispondente all'applicazione lineare data.

26 Matrice associata

Definizione 152 *Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali finitamente generati, sia \mathcal{B} una base di V , sia \mathcal{B}' una base di W e siano $c_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $c_{\mathcal{B}'} : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ le coordinazioni (vedi Definizione 115).*

Consideriamo l'applicazione lineare

$$c_{\mathcal{B}'} \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

e ricordiamo che esiste un'unica matrice A tale che questa applicazione consista nella moltiplicazione per A (vedi Proposizione 150).

Allora la matrice A sarà detta matrice associata ad f rispetto alle basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' .

Osservazione 153 *Conservando le notazioni della definizione appena data, sia \mathbf{v} un qualunque vettore di V , sia X il vettore delle componenti di \mathbf{v} ed Y il vettore delle componenti di $f(\mathbf{v})$. In altri termini $X = c_{\mathcal{B}}(\mathbf{v})$ e $Y = c_{\mathcal{B}'}(f(\mathbf{v}))$, quindi*

$$Y = c_{\mathcal{B}'}(f(c_{\mathcal{B}}^{-1}(X))) .$$

Considerando X ed Y come colonne (cioè matrici di tipo $n \times 1$ ed $m \times 1$), poiché

$c_{\mathcal{B}'} \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1}$ è la moltiplicazione per A , si ha

$$Y = AX$$

Parlando informalmente, la matrice associata ad f descrive l'azione di f in termini di componenti dei vettori.

Osservazione 154 Se V e W sono spazi vettoriali di rispettive dimensioni n ed m , e con rispettive basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' , data una matrice A di tipo $m \times n$ sui reali, esiste una ed una sola applicazione lineare $V \rightarrow W$ che ha A come matrice associata: l'applicazione

$$c_{\mathcal{B}'}^{-1} \circ \phi \circ c_{\mathcal{B}},$$

dove $c_{\mathcal{B}}$ e $c_{\mathcal{B}'}$ sono le coordinazioni e $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è data dalla moltiplicazione per A .

La seguente proposizione stabilisce un modo per costruire la matrice associata.

Proposizione 155 Sia $f: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali finitamente generati e sia A la matrice associata rispetto alle basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' . Allora le colonne di A sono i vettori delle componenti delle immagini dei vettori di \mathcal{B} , rispetto alla base \mathcal{B}' .

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, e siano X_1, \dots, X_n i rispettivi vettori delle componenti rispetto a \mathcal{B} stessa. Dunque i vettori delle componenti delle immagini di $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ (cioè di $f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)$) sono

$$AX_1, \dots, AX_n.$$

A questo punto basta notare che X_1, \dots, X_n sono i vettori della base standard di \mathbb{R}^n e tenere presente l'Osservazione 145.

La seguente proposizione afferma che un'applicazione lineare resta completamente individuata se si assegnano le immagini dei vettori di una base.

Proposizione 156 Siano V e W spazi vettoriali finitamente generati, sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base di V e sia $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ un sistema di vettori di W . Allora esiste un'unica applicazione lineare $f: V \rightarrow W$ tale che

$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, \dots, f(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n.$$

Dimostrazione. Fissiamo una qualunque base \mathcal{B}' di W . Per la Proposizione 155, un'applicazione lineare $f: V \rightarrow W$ soddisfa la condizione richiesta se e solo se la sua matrice associata rispetto a \mathcal{B} e \mathcal{B}' ha come colonne le componenti dei vettori $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ rispetto a \mathcal{B}' . Dunque il risultato segue subito dall'Osservazione 154.

Proposizione 157 Siano $f : V \rightarrow V'$ ed $f' : V' \rightarrow V''$ applicazioni lineari tra spazi finitamente generati e siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ basi rispettivamente di V, V', V'' . Se A è la matrice associata ad f rispetto a \mathcal{B} e \mathcal{B}' , e A' è la matrice associata ad f' rispetto a \mathcal{B}' e \mathcal{B}'' , allora la matrice associata ad $f' \circ f$ rispetto a \mathcal{B} e \mathcal{B}'' è il prodotto

$$A'A.$$

Dimostrazione. Dette $c_{\mathcal{B}}, c'_{\mathcal{B}}$ e $c''_{\mathcal{B}}$ le coordinazioni, poniamo

$$\varphi = c'_{\mathcal{B}} \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1}, \quad \varphi' = c''_{\mathcal{B}} \circ f' \circ c'_{\mathcal{B}}^{-1}.$$

Per definizione di matrice associata, φ è la moltiplicazione per A e φ' è la moltiplicazione per A' . Dunque per ogni $X \in \mathbb{R}^n$ abbiamo

$$(\varphi'(\varphi(X))) = A'(AX) = (A'A)X,$$

quindi $\varphi' \circ \varphi$ è la moltiplicazione per $A'A$.

Siccome

$$\varphi' \circ \varphi = c''_{\mathcal{B}} \circ f' \circ c'_{\mathcal{B}}^{-1} \circ c'_{\mathcal{B}} \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1} = c''_{\mathcal{B}} \circ f' \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1},$$

concludiamo che $c''_{\mathcal{B}} \circ f' \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1}$ è la moltiplicazione per $A'A$, il che per definizione vuol dire che la matrice associata ad $f' \circ f$ rispetto a \mathcal{B} e \mathcal{B}'' è $A'A$, come volevamo.

Proposizione 158 Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare tra spazi finitamente generati e sia A la matrice associata rispetto alle basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' . Allora si ha

$$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rk} A,$$

dove $\operatorname{rk} A$ indica il rango di A .

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ e sia $(\mathbf{a}^{i_1}, \dots, \mathbf{a}^{i_r})$ un sistema massimo di colonne indipendenti di A , così che $r = \operatorname{rk} A$ (vedi appunti di Geometria I, Definizione 131 a pag. 51 e Definizione 141 a pag. 53). Ricordiamo inoltre (vedi Paragrafo 34 degli appunti di Geometria I) che ogni colonna di A dipende da $(\mathbf{a}^{i_1}, \dots, \mathbf{a}^{i_r})$. Per la Proposizione 155, e dato che la coordinazione rispetto a \mathcal{B} , essendo un'isomorfismo, conserva sia la dipendenza che l'indipendenza, otteniamo che tutti i vettori $f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)$ dipendono dal sistema indipendente $(f(\mathbf{v}_{i_1}), \dots, f(\mathbf{v}_{i_r}))$.

Se ora \mathbf{w} è un qualunque vettore di $\operatorname{Im} f$, allora (per definizione di $\operatorname{Im} f$) esiste un $\mathbf{v} \in V$ tale che $\mathbf{w} = f(\mathbf{v})$. Poiché \mathcal{B} è una base di V , abbiamo

$$\mathbf{v} = h_1 \mathbf{v}_1 + \dots + h_n \mathbf{v}_n$$

per opportuni scalari h_1, \dots, h_n . Quindi

$$\mathbf{w} = f(\mathbf{v}) = h_1 f(\mathbf{v}_1) + \dots + h_n f(\mathbf{v}_n).$$

Ma poiché i vettori $f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)$ dipendono da (cioè sono combinazioni lineari di) $(f(\mathbf{v}_{i_1}), \dots, f(\mathbf{v}_{i_r}))$, otteniamo che \mathbf{w} dipende dal sistema indipendente $(f(\mathbf{v}_{i_1}), \dots, f(\mathbf{v}_{i_r}))$. Dunque $(f(\mathbf{v}_{i_1}), \dots, f(\mathbf{v}_{i_r}))$ è una base di $\text{Im } f$, da cui si ha subito

$$\dim \text{Im } f = r = \text{rk } A,$$

come volevamo.

27 Cambio di base

Definizione 159 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, e siano \mathcal{B} e \mathcal{B}' due basi di V . Sia B la matrice associata all'applicazione identica*

$$\text{id}_V : V \rightarrow V$$

rispetto a \mathcal{B} e \mathcal{B}' . Allora B si dice matrice del cambio di base da \mathcal{B} a \mathcal{B}' .

Osservazione 160 *Conservando le notazioni della definizione appena data, sia \mathbf{v} un qualunque vettore di V , sia X il vettore delle componenti rispetto a \mathcal{B} e sia X' il vettore delle componenti rispetto a \mathcal{B}' . Per l'Osservazione 153 si ha*

$$X' = BX$$

Dunque, parlando informalmente, la matrice del cambio di base descrive come si passa dalle componenti rispetto ad una base alle componenti rispetto ad un'altra.

Per costruire la matrice del cambio di base, basta tenere presente la seguente osservazione.

Osservazione 161 *Per la Proposizione 155, le colonne della matrice del cambio di base da \mathcal{B} a \mathcal{B}' sono le componenti dei vettori di \mathcal{B} rispetto a \mathcal{B}' .*

Osservazione 162 *Per la Proposizione 157, se B è la matrice del cambio di base da \mathcal{B} a \mathcal{B}' e B' è la matrice del cambio di base da \mathcal{B}' a \mathcal{B}'' , allora la matrice del cambio di base da \mathcal{B} a \mathcal{B}'' è il prodotto $B'B$.*

Osservazione 163 *Tenendo presente l'osservazione precedente, e siccome la matrice del cambio di base da una base a sé stessa è la matrice identica, si ha subito che la matrice del cambio di base da \mathcal{B} a \mathcal{B}' e quella del cambio di base da \mathcal{B}' a \mathcal{B} sono inverse tra loro.*

In particolare una matrice di cambio di base ha sempre determinante non nullo.

28 Cambio di riferimento

Proposizione 164 Siano $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ e $(O', (\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'))$ riferimenti dello spazio, sia P un qualunque punto, sia X la terna delle coordinate di P rispetto al primo riferimento e X' quella rispetto al secondo. Allora si ha

$$X' = BX + C$$

dove B è la matrice del cambio di base da $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ a $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$, e C è la terna di coordinate di O rispetto ad $(O', (\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'))$.

Dimostrazione. Per definizione di coordinate, X è la terna delle componenti di $P - O$ rispetto a $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ e X' è la terna delle componenti di $P - O'$ rispetto a $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$. Per l'Osservazione 160, BX è la terna delle componenti di $P - O$ rispetto a $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$. Siccome

$$P = O + (P - O),$$

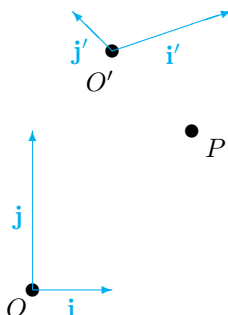
l'Esercizio 1 (applicato al riferimento $(O', (\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'))$) prova che

$$X' = C + BX,$$

come volevamo.

Naturalmente, un risultato del tutto simile vale per i riferimenti nel piano. Vediamo un esempio concreto.

Esempio 165 Consideriamo i seguenti riferimenti e il seguente punto P del piano del foglio.



Le componenti di \mathbf{i} rispetto ad $(\mathbf{i}', \mathbf{j}')$ sono $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Le componenti di \mathbf{j} rispetto ad $(\mathbf{i}', \mathbf{j}')$ sono $(1, 3)$. Quindi la matrice del cambio da (\mathbf{i}, \mathbf{j}) a $(\mathbf{i}', \mathbf{j}')$ è la matrice che ha per colonne tali coppie:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Le coordinate di O rispetto ad $(O', (\mathbf{i}', \mathbf{j}'))$ sono $(-2, -4)$. Dunque la formula che ci dà le coordinate $X' = (x', y')$ di un qualunque punto nel riferimento $(O', (\mathbf{i}', \mathbf{j}'))$ a partire dalle coordinate $X = (x, y)$ nel riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ è:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Scritte per esteso:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + y - 2 \\ y' = -\frac{1}{2}x + 3y - 4 \end{cases}.$$

A titolo di verifica, se misuriamo le coordinate del punto P , abbiamo $(x, y) = (2, 1)$ e $(x', y') = (0, -2)$. Sono dunque in accordo con la formula data.

29 Orientazione

Definizione 166 Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e siano \mathcal{B} e \mathcal{B}' sue basi. Se il determinante della matrice del cambio di base da \mathcal{B} a \mathcal{B}' è positivo, allora diremo che \mathcal{B} è concorde a \mathcal{B}' . Altrimenti diremo che \mathcal{B} è discorde con \mathcal{B}' .

Proposizione 167 La relazione di “concordanza” tra basi di uno spazio vettoriale, è una relazione d’equivalenza, e se lo spazio non è uguale a $\{\mathbf{0}\}$ esistono esattamente due classi di equivalenza.

Dimostrazione. Poiché la matrice del cambio di base da \mathcal{B} a \mathcal{B} è la matrice identica, che ha determinante 1, ogni base è concorde a sé stessa. Dunque la “concordanza” è riflessiva.

Poiché la matrice del cambio di base da \mathcal{B} a \mathcal{B}' e quella del cambio di base da \mathcal{B}' a \mathcal{B} sono inverse tra loro, i loro determinanti sono inversi tra loro. Se dunque \mathcal{B} è concorde a \mathcal{B}' , anche \mathcal{B}' è concorde a \mathcal{B} (dato che l’inverso di un numero positivo è ancora positivo). Dunque la “concordanza” è una relazione simmetrica.

Infine, dall’Osservazione 162 si deduce che la “concordanza” è una relazione transitiva (perché il prodotto di numeri positivi è positivo).

Se ora $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base, allora $(-\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ad essa discorde. Dunque le classi di equivalenza sono almeno due.

Se poi \mathcal{B} è una base qualunque, se essa è discorde con $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ allora è concorde a $(-\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ (sempre per l'Osservazione 162). Dunque le classi d'equivalenza sono esattamente due, come volevamo.

Definizione 168 Una classe d'equivalenza di basi concordi di uno spazio V si chiama orientazione di V .

Dunque l'orientazione di una base è la sua classe di equivalenza. Dire che una base \mathcal{B} ha orientazione \mathcal{O} , formalmente equivale a dire che $\mathcal{B} \in \mathcal{O}$.

Il concetto (un po' sottile) di orientazione è spesso utile. Ad esempio, ci consente di dare una definizione precisa di "rotazione" di vettori liberi (vedi quanto detto appena prima dell'Esempio 118).

Osservazione 169 Sia \mathcal{W} lo spazio direttore di un piano, sia \mathcal{O} un'orientazione di \mathcal{W} e sia θ un numero reale tale che $0 < \theta < \pi$. Se $\mathbf{v} \in \mathcal{W}$ è un vettore non nullo, non è difficile dimostrare che esiste uno ed un solo vettore $\mathbf{v}' \in \mathcal{W}$ tale che

- $|\mathbf{v}'| = |\mathbf{v}|$;
- $\widehat{\mathbf{v}\mathbf{v}'} = \theta$;
- la base $(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ ha orientazione \mathcal{O} .

Definizione 170 Sia \mathcal{W} lo spazio direttore di un piano, sia \mathcal{O} un'orientazione di \mathcal{W} e sia θ un numero reale tale che $0 < \theta < \pi$. Per l'osservazione precedente, possiamo definire un'applicazione

$$\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$$

che associa al vettore nullo il vettore nullo stesso, e che ad ogni vettore non nullo \mathbf{v} associa l'unico vettore $\mathbf{v}' \in \mathcal{W}$ tale che

- $|\mathbf{v}'| = |\mathbf{v}|$;
- $\widehat{\mathbf{v}\mathbf{v}'} = \theta$;
- la base $(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ ha orientazione \mathcal{O} .

Tale applicazione si dice rotazione di \mathcal{W} di ampiezza θ e concorde ad \mathcal{O} .

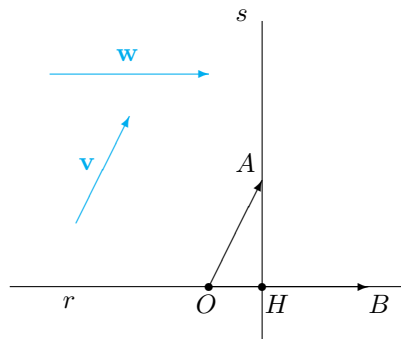
Esercizio 171 (facoltativo). Dimostrare che una rotazione è un'applicazione lineare.

30 Prodotto vettoriale

Ritorniamo per un attimo alla geometria ordinaria, e stabiliamo la definizione di un'altra utile operazione tra vettori: il prodotto vettoriale.

Siano dunque \mathbf{v} e \mathbf{w} vettori liberi, e vediamo come si definisce il prodotto vettoriale. È utile ricordare la costruzione fatta per il prodotto scalare. Per comodità, la riportiamo qui sotto.

Scelto un punto O , siano OA e OB i rispettivi rappresentanti di \mathbf{v} e \mathbf{w} aventi origine in O . Sia r una retta contenente O e B e sia H la proiezione ortogonale di A su r .



Vale la seguente proposizione, analoga alla Proposizione 51 (e la cui dimostrazione diretta sarebbe pure analoga a quella della Proposizione 51).

Proposizione 172 *Conservando le notazioni ora richiamate, supponiamo che \mathbf{v} e \mathbf{w} siano non nulli. Allora il numero reale*

$$\frac{|AH|}{|OA|}$$

dipende solo dall'angolo tra \mathbf{v} e \mathbf{w} (cioè se applichiamo la stessa costruzione ad altri due vettori non nulli \mathbf{v}' e \mathbf{w}' tali che l'angolo tra essi sia uguale all'angolo tra \mathbf{v} e \mathbf{w} , otteniamo lo stesso valore per $\frac{|AH|}{|OA|}$).

La proposizione ora enunciata è comunque conseguenza immediata della Proposizione 51 e del teorema di Pitagora.

Definizione 173 *Nella situazione della Proposizione 172, lo scalare $\frac{|AH|}{|OA|}$ viene detto seno dell'angolo tra \mathbf{v} e \mathbf{w} . Esso verrà denotato con $\sin \widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}}$.*

Naturalmente questa definizione ci dà il seno solo dei numeri reali compresi tra 0 e π , ma per noi basterà.

Osservazione 174 Dal teorema di Pitagora segue subito la nota formula

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 ,$$

(almeno nel caso $0 \leq t \leq \pi$).

Osservazione 175 Conservando le notazioni introdotte all'inizio del paragrafo, se \mathbf{w} è non nullo, \mathbf{v} è parallelo a \mathbf{w} se e solo se $H = A$. Se $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, allora \mathbf{v} è automaticamente parallelo a \mathbf{w} . Dunque abbiamo che

$$\mathbf{v} \quad e \quad \mathbf{w} \quad \text{paralleli} \quad \iff \quad |AH||OB| = 0 .$$

Proposizione 176 Assumiamo le notazioni introdotte all'inizio del paragrafo, e sia \mathcal{O} un'orientazione dello spazio dei vettori liberi. Allora esiste un'unico vettore \mathbf{n} tale che

- $|\mathbf{n}| = |AH||OB|$;
- \mathbf{n} è ortogonale a \mathbf{v} e \mathbf{w} ;
- se \mathbf{v} e \mathbf{w} non sono paralleli, allora $(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{n})$ è una base che ha orientazione \mathcal{O} .

Dimostrazione. Se \mathbf{v} e \mathbf{w} sono paralleli, per l'Osservazione 175 si deve avere $|AH||OB| = 0$, quindi l'unico vettore che soddisfa le condizioni è il vettore nullo (per la terza condizione non c'è niente da verificare).

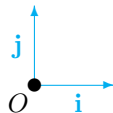
Se \mathbf{v} e \mathbf{w} non sono paralleli, sempre per l'Osservazione 175 si ha $|AH||OB| \neq 0$. D'altra parte, siccome (\mathbf{v}, \mathbf{w}) è linearmente indipendente, il vettore \mathbf{n} deve essere normale a un qualunque piano con spazio direttore $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$. Poiché tali vettori normali esistono e sono tutti proporzionali tra loro (cfr. Proposizioni 70 e 71), ce ne sono esattamente due con modulo uguale a $|AH||OB|$, opposti tra loro: chiamiamoli \mathbf{n}' e \mathbf{n}'' . Per la Proposizione 60, i sistemi $(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{n}')$, $(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{n}'')$ sono linearmente indipendenti, e dunque sono due basi (per l'Esercizio 16). Poiché tali basi sono discordi, ce n'è una sola di orientazione \mathcal{O} . Dunque l'unico vettore che soddisfa le condizioni volute è \mathbf{n}' oppure \mathbf{n}'' , a seconda di chi tra $(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{n}')$ e $(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{n}'')$ ha orientazione \mathcal{O} . Questo conclude la dimostrazione.

Definizione 177 Siano \mathbf{v} e \mathbf{w} vettori liberi, e si fissi un'unità di misura u e una orientazione \mathcal{O} nello spazio dei vettori liberi. Allora l'unico vettore \mathbf{n} che soddisfa le condizioni stabilite nella Proposizione 176 si dice prodotto vettoriale di \mathbf{v} e \mathbf{w} (rispetto a u ed \mathcal{O}). Il prodotto vettoriale di \mathbf{v} e \mathbf{w} sarà indicato con

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$$

Nell'uso corrente, specialmente in Fisica, si assume fissata l'orientazione cosiddetta "levogira". Per definire tale orientazione, basta assegnare una qualunque base che abbia (per definizione) tale orientazione. Il lettore avrà già incontrato vari modi per stabilire tale base ("regola della mano destra", "regola del cavatappi", ecc.); noi proponiamo il seguente.

Definizione 178 Definiamo levogira l'orientazione della base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, N-O)$, dove \mathbf{i}, \mathbf{j} ed O sono rappresentati qui sotto, ed N è la punta del naso del lettore (niente scherzi: toglì il naso dal foglio!).



D'ora in poi, parlando di prodotto vettoriale, assumeremo tacitamente fissata (oltre che l'unità di misura) un'orientazione (se si vuole, quella levogira).

Dalla costruzione del prodotto vettoriale e dalla definizione del seno di un angolo segue subito il seguente fatto.

Proposizione 179 Siano \mathbf{v} e \mathbf{w} vettori liberi non nulli. Si ha

$$|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}| = |\mathbf{v}||\mathbf{w}| \sin \widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}}.$$

Proposizione 180 Siano \mathbf{u}, \mathbf{v} e \mathbf{w} vettori liberi qualunque ed h uno scalare. Si ha

- $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$;
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$;
- $(h\mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = h(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$.

Tralasciamo la (facile) dimostrazione.

Proposizione 181 Sia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ un riferimento monometrico ortogonale tale che $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ sia concorde all'orientazione fissata, sia \mathbf{v} un vettore di componenti (l, m, n) e \mathbf{w} un vettore di componenti (l', m', n') . Allora le componenti di $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ sono

$$\left(\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} m & n \\ m' & n' \end{array} \right|, & - \left| \begin{array}{cc} l & n \\ l' & n' \end{array} \right|, & \left| \begin{array}{cc} l & m \\ l' & m' \end{array} \right| \end{array} \right),$$

cioè i tre minori di ordine due, con il secondo cambiato di segno, della matrice che ha per righe le componenti di \mathbf{v} e \mathbf{w} .

Dimostrazione. Dalla definizione del prodotto vettoriale, tenendo presente che \mathbf{i}, \mathbf{j} e \mathbf{k} sono versori a due a due ortogonali, e che l'orientazione di $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ è concorde all'orientazione fissata (rispetto a cui facciamo il prodotto vettoriale), si ha

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{0}, & \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{0}, & \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{0} \\ \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}, & \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i}, & \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \end{array}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} &= (l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}) \wedge (l'\mathbf{i} + m'\mathbf{j} + n'\mathbf{k}) = \\
&= ll'\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} + lm'\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} + ln'\mathbf{i} \wedge \mathbf{k} + \\
&\quad + ml'\mathbf{j} \wedge \mathbf{i} + mm'\mathbf{j} \wedge \mathbf{j} + mn'\mathbf{j} \wedge \mathbf{k} + \\
&\quad + nl'\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} + nm'\mathbf{k} \wedge \mathbf{j} + nn'\mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = \\
&= (mn' - m'n)\mathbf{i} - (ln' - l'n)\mathbf{j} + (lm' - l'm)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Quindi le componenti di $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ sono

$$(mn' - m'n, -(ln' - l'n), lm' - l'm)$$

come volevamo.

31 Determinanti e volumi

Osservazione 182 Siano \mathbf{v} e \mathbf{w} vettori liberi non nulli e non paralleli, sia O un punto, sia $A = O + \mathbf{v}$, $B = O + \mathbf{w}$, $C = O + \mathbf{v} + \mathbf{w}$. Detta H la proiezione ortogonale di A sulla retta che contiene O e B , per quanto visto nel paragrafo precedente, il modulo di $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ è uguale a $|OB| \cdot |AH|$. Ma \overline{OB} e \overline{AH} sono proprio la base e l'altezza del parallelogramma $OACB$.

Concludiamo che il modulo del prodotto vettoriale $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ è uguale all'area di un parallelogramma che ha per lati dei segmenti rappresentativi di \mathbf{v} e \mathbf{w} .

Proposizione 183 Sia fissato in un piano π un riferimento monometrico ortogonale $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$, siano \mathbf{v} e \mathbf{w} vettori paralleli a π , non nulli e non paralleli tra loro, rispettivamente di componenti (l, m) ed (l', m') . Allora il valore assoluto del determinante

$$\begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}$$

è uguale all'area di un parallelogramma che ha per lati dei segmenti rappresentativi di \mathbf{v} e \mathbf{w} .

Dimostrazione. Per la Proposizione 70 esiste un versore \mathbf{k} , ortogonale a π , e quindi a \mathbf{i} e \mathbf{j} . Dunque $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ è un riferimento monometrico ortogonale dello spazio. Poiché le componenti di \mathbf{v} rispetto a (\mathbf{i}, \mathbf{j}) sono (l, m) , si ha

$$\mathbf{v} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + 0\mathbf{k}.$$

Quindi le componenti di \mathbf{v} rispetto a $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ sono $(l, m, 0)$. Allo stesso modo, le componenti di \mathbf{w} rispetto a $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ sono $(l', m', 0)$.

Per la Proposizione 181, le componenti di $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ sono

$$\left(0, 0, \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix} \right).$$

Dunque, per la Proposizione 64, il modulo di $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ è uguale al valore assoluto del determinante

$$\begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}.$$

Dunque il risultato segue subito dall'Osservazione 182.

Notiamo inoltre che i vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} sono non nulli e non paralleli se e solo se il determinante considerato è non nullo. Parlando informalmente, il caso di vettori paralleli corrisponde al fatto che il parallelogramma degenera (e diventa quindi di area nulla).

Proposizione 184 *Sia fissato un riferimento monometrico ortogonale dello spazio e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ tre vettori linearmente indipendenti, rispettivamente di componenti (l, m, n) , (l', m', n') , (l'', m'', n'') .*

Allora il valore assoluto del determinante

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \end{vmatrix}$$

è uguale al volume di un parallelepipedo che ha per lati dei segmenti rappresentativi di \mathbf{u}, \mathbf{v} e \mathbf{w} .

Dimostrazione. Scelto un punto O , siano $A = O + \mathbf{u}$, $B = O + \mathbf{v}$, $C = O + \mathbf{w}$. Sia π il piano che contiene B, O, C , sia H la proiezione ortogonale di A su π e sia $\mathbf{n} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$. Posto $D = O + \mathbf{n}$, sia r la retta passante per O e D e sia K la proiezione ortogonale di A su r . Poiché \mathbf{n} è ortogonale a \mathbf{v} e a \mathbf{w} , r è ortogonale a π .

Per l'Osservazione 97 e la Definizione 98, $K - O$ è la proiezione ortogonale vettoriale di \mathbf{u} sullo spazio direttore di r . Per l'Osservazione 99, anche $A - H$ è la proiezione ortogonale vettoriale di \mathbf{u} sullo spazio direttore di r (infatti $A - H$, essendo ortogonale a π , è parallelo ad r , e la differenza $\mathbf{u} - (A - H) = (A - O) - (A - H) = (H - O)$, siccome OH è contenuto in π , è ortogonale a tutti i vettori paralleli ad r). Dunque

$$A - H = K - O.$$

Per definizione del prodotto scalare, si ha che il valore assoluto di $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ è uguale a $|OD| \cdot |OK|$. Ma $|OD|$ è il modulo di \mathbf{n} , e quindi è uguale all'area del parallelogramma che ha OB e OC per lati, che è poi l'area di base del parallelepipedo che ha per lati OB , OC ed OA . Inoltre, siccome $A - H = K - O$, $|OK| = |AH|$, e $|AH|$ è proprio l'altezza di detto parallelepipedo. Dunque il volume del parallelepipedo è uguale a

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}| = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}|.$$

Per le Proposizioni 63 e 181 si ha

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = l \begin{vmatrix} m' & n' \\ m'' & n'' \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} l' & n' \\ l'' & n'' \end{vmatrix} + n \begin{vmatrix} l' & m' \\ l'' & m'' \end{vmatrix},$$

che è proprio lo sviluppo di Laplace secondo la prima riga del determinante

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \end{vmatrix},$$

come volevamo.

Lo scalare

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$$

si chiama *prodotto misto* di \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} (anche nel caso siano linearmente dipendenti, nel qual caso non sarebbe difficile dimostrare che allora esso è nullo). Abbiamo appena visto che il valore assoluto del prodotto misto è il volume di un parallelepipedo che ha per lati dei segmenti rappresentativi di \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} . Non sarebbe difficile dimostrare che il prodotto misto è positivo o negativo, a seconda se $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ è una base concorde o discorde all'orientazione fissata (rispetto a cui facciamo il prodotto vettoriale).

Infine, notiamo che le Proposizioni 183 e 184 mostrano che il significato geometrico dei determinanti (almeno quelli di ordine 2 e 3) è dato da misure di opportune aree o volumi.

32 Distanza tra punti, rette e piani

Definizione 185 *Siano X ed Y insiemi di punti. Si definisce distanza tra X ed Y l'estremo inferiore dell'insieme*

$$\{d(P, Q) : P \in X, Q \in Y\}.$$

Tale distanza sarà denotata con $d(X, Y)$; se X è costituito da un unico punto P , allora si userà anche la notazione $d(P, Y)$.

Proposizione 186 *Sia P un punto e π un piano. Detta H la proiezione ortogonale di P su π , si ha*

$$d(P, \pi) = d(P, H).$$

Dimostrazione. Sia r la retta per P ortogonale a π , così che H è il punto d'intersezione di r e π . Se Q è un punto di π , poiché r è ortogonale a tutte le rette di π , possiamo applicare il teorema di Pitagora (vedi Paragrafo 14) e ottenere

$$d(P, Q)^2 = d(Q, H)^2 + d(P, H)^2 \geq d(P, H)^2.$$

Dunque (essendo le distanze numeri non negativi)

$$d(P, Q) \geq d(P, H).$$

Quindi $d(P, H)$ è il minimo (e quindi l'estremo inferiore) dell'insieme

$$\{d(P, Q) : Q \in \pi\},$$

cioè

$$d(P, H) = d(P, \pi),$$

come volevamo.

In maniera del tutto analoga (tenendo presente la Proposizione 94) si prova la seguente proposizione.

Proposizione 187 *Sia P un punto ed r una retta. Detta H la proiezione ortogonale di P su r , si ha*

$$d(P, r) = d(P, H).$$

Proposizione 188 *Siano r ed s rette sghembe. Allora esiste un'unica retta perpendicolare (quindi incidente) sia ad r che ad s . Inoltre, detti P e Q i rispettivi punti di intersezione di tale retta con r ed s , si ha*

$$d(r, s) = d(P, Q).$$

Dimostrazione. Siano \mathbf{u} e \mathbf{v} rispettivi vettori direzionali di r ed s , e sia \mathbf{n} un vettore non nullo ortogonale sia ad \mathbf{u} che a \mathbf{v} (basta prendere un vettore normale ad un qualunque piano parallelo ad \mathbf{u} e a \mathbf{v}). Sia π il piano contenente r e parallelo ad \mathbf{n} (che è l'unico piano contenente un punto $P_0 \in r$ e parallelo ad \mathbf{u} e ad \mathbf{n}) e sia σ il piano contenente s e parallelo ad \mathbf{n} . Siccome r ed s non sono parallele, il sistema (\mathbf{u}, \mathbf{v}) è linearmente indipendente, e siccome \mathbf{n} è non nullo ed ortogonale sia ad \mathbf{u} che a \mathbf{v} , per la Proposizione 60, il sistema $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n})$ è linearmente indipendente. Dunque π e σ non sono paralleli (altrimenti avrebbero lo stesso spazio direttore, e tale spazio di dimensione 2 conterrebbe il sistema indipendente $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n})$). L'intersezione $t = \pi \cap \sigma$ è dunque una retta, ed è parallela ad \mathbf{n} perché sia π che σ sono paralleli ad \mathbf{n} . Siccome \mathbf{n} è ortogonale sia ad \mathbf{u} che a \mathbf{v} , t è ortogonale sia ad r che ad s . Siccome r e t sono contenute in π , r e t sono perpendicolari. Siccome s e t sono contenute in σ , s e t sono perpendicolari. Dunque t è la retta voluta. Essa è unica, poiché ogni retta perpendicolare ad r ed ortogonale ad s deve essere contenuta in π e ogni retta perpendicolare ad s ed ortogonale ad r deve essere contenuta in σ .

Siano ora $P' \in r$ e $Q' \in s$. Poiché $P, P' \in r$ e \mathbf{u} è un vettore direzionale di r si ha

$$P' - P = h\mathbf{u}$$

per un opportuno scalare h . Allo stesso modo abbiamo

$$Q - Q' = k\mathbf{v} \quad \text{e} \quad P - Q = l\mathbf{n}$$

per opportuni scalari k ed l . Dunque

$$P' - Q' = (P' - P) + (P - Q) + (Q - Q') = h\mathbf{u} + l\mathbf{n} + k\mathbf{v}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 d(P', Q')^2 &= |P' - Q'|^2 = (h\mathbf{u} + l\mathbf{n} + k\mathbf{v}) \cdot (h\mathbf{u} + l\mathbf{n} + k\mathbf{v}) = \\
 &= h^2\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2hlu \cdot \mathbf{n} + 2hku \cdot \mathbf{v} + l^2\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + 2lkn \cdot \mathbf{v} + k^2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \\
 &= h^2\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2hku \cdot \mathbf{v} + l^2\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + k^2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \\
 &= (h\mathbf{u} + k\mathbf{v}) \cdot (h\mathbf{u} + k\mathbf{v}) + l^2\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} .
 \end{aligned}$$

Poiché $(h\mathbf{u} + k\mathbf{v}) \cdot (h\mathbf{u} + k\mathbf{v}) \geq 0$ e $l^2\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = |P - Q|^2 = d(P, Q)^2$, otteniamo

$$d(P', Q')^2 \geq d(P, Q)^2 .$$

Dunque $d(P, Q)$ è il minimo (quindi l'estremo inferiore) di tutte le distanze tra un punto di r e un punto di s . Questo prova che

$$d(r, s) = d(P, Q) ,$$

come volevamo.

Proposizione 189 *Siano r ed r' rette parallele, siano π e π' piani paralleli, e supponiamo che r e π pure siano paralleli. Preso un qualunque punto P su r , si ha*

- $d(r, r') = d(P, r')$;
- $d(r, \pi) = d(P, \pi)$.

Preso un qualunque punto Q su π si ha

- $d(\pi, \pi') = d(Q, \pi')$

Esercizio 190 (facoltativo). *Dimostrare la proposizione precedente.*

Proposizione 191 *Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, sia π il piano di equazione*

$$ax + by + cz + d = 0$$

e sia P il punto di coordinate

$$(x_0, y_0, z_0) .$$

Allora si ha

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Dimostrazione. Sia \mathbf{n} il vettore di componenti (a, b, c) , sia H la proiezione ortogonale di P su π e siano (x_1, y_1, z_1) le sue coordinate. Per la Proposizione 72, \mathbf{n} è un vettore normale a π . Dunque il vettore

$$\mathbf{n}' = \frac{1}{|\mathbf{n}|} \mathbf{n}$$

è un vettore normale a π . Siccome anche $P-H$ è ortogonale a π , esso è parallelo ad \mathbf{n}' , e quindi si ha

$$P - H = h\mathbf{n}'$$

con $|h| = |P - H|$.

Le componenti di \mathbf{n}' sono

$$\left(\frac{a}{|\mathbf{n}|}, \frac{b}{|\mathbf{n}|}, \frac{c}{|\mathbf{n}|} \right)$$

e le componenti di $P - H$ sono

$$(x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1).$$

Dunque

$$h = (P - H) \cdot \mathbf{n}' = \frac{a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)}{|\mathbf{n}|}.$$

Poiché $H \in \pi$, si ha $-ax_1 - by_1 - cz_1 = d$, e quindi

$$h = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{|\mathbf{n}|}.$$

Tenendo presente che

$$|\mathbf{n}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

(per la Proposizione 64), in definitiva abbiamo

$$d(P, \pi) = d(P, H) = |P - H| = |h| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

come volevamo.

In maniera del tutto analoga si potrebbe dimostrare che, fissato un riferimento monometrico ortogonale in un piano π , la distanza di un punto $P \in \pi$ di coordinate (x, y) da una retta $r \subset \pi$ di equazione $ax + by + c = 0$ è uguale a

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

La formula per la distanza di un punto da una retta nello spazio è un po' più complicata. La stabiliamo qui di seguito.

Proposizione 192 *Fissato un riferimento monometrico ortogonale dello spazio, sia P il punto di coordinate (x_0, y_0, z_0) e sia r la retta passante per il punto P_1 di coordinate (x_1, y_1, z_1) e con numeri direttori (l, m, n) . Allora la distanza $d(P, r)$ è uguale a*

$$\sqrt{\frac{\begin{vmatrix} y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0 - x_1 & z_0 - z_1 \\ l & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 \\ l & m \end{vmatrix}^2}{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Dimostrazione. Sia \mathbf{u} il vettore di componenti (l, m, n) , che è quindi un vettore direzionale di r , sia $A = P_1 + \mathbf{u}$ e sia H la proiezione ortogonale di P su r . La distanza di P da r è dunque il modulo di PH , che è l'altezza del parallelogramma (eventualmente degenero, se $P \in r$) che ha per lati P_1P e P_1A (considerando quest'ultimo come base). Poiché P_1P è un rappresentante di $P - P_1$ e P_1A è un rappresentante di \mathbf{u} , l'area di tale parallelogramma è uguale a

$$|(P - P_1) \wedge \mathbf{u}|.$$

Dunque la distanza $d(P, r)$ può essere ottenuta dividendo tale area per la lunghezza della base P_1A , cioè $|\mathbf{u}|$. Quindi

$$d(P, r) = \frac{|(P - P_1) \wedge \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}.$$

A questo punto, per avere la formula voluta, basta applicare le Proposizioni 181 e 64.

Proposizione 193 *Fissato un riferimento monometrico ortogonale dello spazio, sia r la retta passante per il punto P di coordinate (x_0, y_0, z_0) e con numeri direttori (l, m, n) , e sia r' la retta passante per il punto P' di coordinate (x'_0, y'_0, z'_0) e con numeri direttori (l', m', n') . Se r ed r' sono sghembe si ha*

$$d(r, r') = \frac{\left| \begin{vmatrix} x_0 - x'_0 & y_0 - y'_0 & z_0 - z'_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l & n \\ l' & n' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}^2}}$$

Cenno di dimostrazione. Sia \mathbf{v} il vettore di componenti (l, m, n) e sia \mathbf{v}' il vettore di componenti (l', m', n') , che saranno quindi vettori direzionali rispettivamente di r ed r' . Con ragionamenti analoghi a quelli fatti in questo paragrafo, non è difficile dimostrare che la distanza voluta è l'altezza di un parallelepipedo che ha per lati dei rappresentanti di $P - P'$, \mathbf{v} e \mathbf{v}' , considerando come base un parallelogramma dato da \mathbf{v} e \mathbf{v}' . Dunque tale distanza può essere ottenuta dividendo il volume per l'area di base. Basta allora tenere presente l'Osservazione 182 ed applicare le Proposizioni 184, 181 e 64.

In termini vettoriali, la formula ora vista può essere scritta

$$d(r, r') = \frac{|(P - P') \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}'|}{|\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}'|}.$$

La formula è valida anche se le rette non sono sghembe, purché non siano parallele (altrimenti il denominatore è nullo). In tal caso la distanza è nulla.

33 Dimostrazione del teorema di Rouché-Capelli

Vediamo in questa sezione come alcuni risultati sui sistemi lineari possano essere trattati alla luce delle applicazioni lineari (cfr. Osservazione 151).

Nel corso di Geometria I avevamo enunciato (senza dimostrarlo) il seguente teorema

(teorema di Rouché-Capelli). Siano A e A' la matrice dei coefficienti e la matrice completa di un sistema lineare. Allora il sistema è compatibile se e solo se A e A' hanno lo stesso rango.

(vedi Proposizione 192 a pag. 69 degli appunti di Geometria I).

Dimostrazione. Sia

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

l'applicazione data dalla moltiplicazione per A e sia B la colonna dei termini noti. La dimostrazione della Proposizione 158 mostra anche che un sistema massimo di colonne indipendenti di A forma una base di $\text{Im } \varphi$. Ora, il sistema è compatibile se e solo se $B \in \text{Im } \varphi$, e questo accade se e solo se B dipende dal sistema massimo di colonne indipendenti di A .

Ma se B dipende dal sistema massimo di A , allora questo è anche un sistema massimo di A' , e allora A e A' hanno lo stesso rango. Se invece B non dipende dal sistema massimo allora (tenendo presente la Proposizione 64 a pag. 25 degli appunti di Geometria I) un sistema massimo di colonne indipendenti di A' si ottiene "aggiungendo" B , dunque $\text{rk } A' = \text{rk } A + 1$, e allora i ranghi sono diversi.

In conclusione il sistema è compatibile se e solo se A e A' hanno lo stesso rango.

34 Sistema omogeneo associato

Durante il corso di Geometria I avevamo anche stabilito la seguente proposizione.

Se la matrice dei coefficienti e la matrice completa di un sistema lineare in n incognite hanno entrambe rango r , allora le variabili libere sono $n - r$, e quindi le soluzioni si ottengono in corrispondenza della scelta di $n - r$ valori arbitrari (in particolare, se $n = r$ c'è un'unica soluzione).

(Proposizione 195 a pag. 69 degli appunti di Geometria I).

Vediamo come questo fatto possa essere meglio precisato ed approfondito.

Definizione 194 Se

$$AX = B$$

è un sistema lineare (scritto in forma matriciale), allora il sistema

$$AX = \mathbf{0}$$

si dice sistema omogeneo associato al sistema $AX = B$.

Osservazione 195 Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e sia $\mathbf{w} \in W$. Diamo ora una descrizione della controimmagine $f^{-1}(\mathbf{w})$.

Se $\mathbf{w} \notin \text{Im } f$, allora $f^{-1}(\mathbf{w})$ è vuoto.

Se $\mathbf{w} \in \text{Im } f$ allora esiste almeno un vettore $\bar{\mathbf{v}} \in V$ tale che $f(\bar{\mathbf{v}}) = \mathbf{w}$. Notiamo che per ogni vettore $\mathbf{k} \in \text{Ker } f$, si ha

$$f(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{k}) = f(\bar{\mathbf{v}}) + f(\mathbf{k}) = \mathbf{w} + \mathbf{0} = \mathbf{w} ,$$

dunque

$$\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{k} \in f^{-1}(\mathbf{w}) .$$

Inoltre, se \mathbf{v} è un qualunque vettore di $f^{-1}(\mathbf{w})$, ponendo $\mathbf{k} = \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}$, otteniamo

$$f(\mathbf{k}) = f(\mathbf{v}) - f(\bar{\mathbf{v}}) = \mathbf{w} - \mathbf{w} = \mathbf{0} ,$$

e dunque $\mathbf{k} \in \text{Ker } f$ e $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{k}$. Concludiamo che

$$f^{-1}(\mathbf{w}) = \bar{\mathbf{v}} + \text{Ker } f ,$$

dove con $\bar{\mathbf{v}} + \text{Ker } f$ indichiamo l'insieme di tutti i vettori del tipo $\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{k}$ con $\mathbf{k} \in \text{Ker } f$. Inoltre c'è un'applicazione biettiva tra $\text{Ker } f$ e $f^{-1}(\mathbf{w})$, che consiste semplicemente nel sommare $\bar{\mathbf{v}}$.

Osservazione 196 Supponiamo che la matrice dei coefficienti A e la matrice completa A' di un sistema lineare in n incognite abbiano entrambe rango r , di modo che per il teorema di Rouché-Capelli il sistema abbia almeno una soluzione $\bar{\mathbf{s}}$. Sia

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

l'applicazione data dalla moltiplicazione per A . Per l'osservazione precedente, l'insieme delle soluzioni del sistema è

$$\bar{\mathbf{s}} + \text{Ker } \varphi ,$$

per la Proposizione 158 si ha

$$\dim \text{Im } \varphi = r$$

e per la Proposizione 140 si ha

$$\dim \text{Ker } \varphi = n - r .$$

Dunque l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare in n incognite con entrambe le matrici di rango r , è in corrispondenza biettiva naturale con uno spazio di dimensione $n - r$. In particolare, se $n = r$ c'è un'unica soluzione.

Notiamo infine che lo spazio $\text{Ker } \varphi$ è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

Parlando informalmente, più il rango (delle due matrici) è basso rispetto al numero delle incognite, più soluzioni ci sono. Il rovescio della medaglia è che quando i ranghi delle due matrici sono bassi rispetto al numero delle incognite, allora è più facile che essi siano diversi, e quindi che il sistema non abbia affatto soluzioni.

Osservazione 197 Come conseguenza immediata dei risultati ora visti (ed essenzialmente della Proposizione 140), si ha che per un sistema lineare di n equazioni in n incognite (quindi con matrice dei coefficienti quadrata) vale una ed una sola di queste due alternative:

- comunque si cambino i termini noti, il sistema è sempre compatibile
- il sistema omogeneo associato ha qualche soluzione non nulla.

Questo fatto, pur nella sua semplicità, ha utilissime applicazioni.

35 Spazi di applicazioni lineari

Definizione 198 Sia W uno spazio vettoriale, sia X un qualunque insieme, siano $f : X \rightarrow W$ e $g : X \rightarrow W$ funzioni e sia $h \in \mathbb{R}$. La funzione $X \rightarrow W$ definita da

$$x \mapsto f(x) + g(x)$$

è detta somma di f e g ed è denotata con $f + g$. La funzione $X \rightarrow W$ definita da

$$x \mapsto hf(x)$$

è detta prodotto di h per f ed è denotata con hf .

Proposizione 199 Siano $f : V \rightarrow W$ e $g : V \rightarrow W$ applicazioni lineari e sia h uno scalare. Allora le applicazioni $f + g$ e hf sono lineari.

Dimostrazione. Per ogni $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ e $k \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} (f + g)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &\stackrel{\text{Def. 198}}{=} f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + g(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \stackrel{f, g \text{ lineari}}{=} \\ &= f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2) + g(\mathbf{v}_1) + g(\mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + g(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2) + g(\mathbf{v}_2) \stackrel{\text{Def. 198}}{=} \\ &= (f + g)(\mathbf{v}_1) + (f + g)(\mathbf{v}_2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (f + g)(k\mathbf{v}_1) &\stackrel{\text{Def. 198}}{=} f(k\mathbf{v}_1) + g(k\mathbf{v}_1) \stackrel{f, g \text{ lineari}}{=} kf(\mathbf{v}_1) + kg(\mathbf{v}_1) = \\ &= k(f(\mathbf{v}_1) + g(\mathbf{v}_1)) \stackrel{\text{Def. 198}}{=} k((f + g)(\mathbf{v}_1)). \end{aligned}$$

Questo prova che $f + g$ è lineare.

Inoltre si ha

$$\begin{aligned} (hf)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &\stackrel{\text{Def. 198}}{=} hf(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \stackrel{f \text{ lineare}}{=} h(f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2)) = \\ &= hf(\mathbf{v}_1) + hf(\mathbf{v}_2) \stackrel{\text{Def. 198}}{=} (hf)(\mathbf{v}_1) + (hf)(\mathbf{v}_2) \end{aligned}$$

e

$$(hf)(k\mathbf{v}_1) \stackrel{\text{Def. 198}}{=} hf(k\mathbf{v}_1) \stackrel{f \text{ lineare}}{=} hkf(\mathbf{v}_1) = k(hf(\mathbf{v}_1)) \stackrel{\text{Def. 198}}{=} k((hf)(\mathbf{v}_1))$$

Questo prova che hf è lineare.

Esercizio 200 (facoltativo). Siano V e W spazi vettoriali. Dimostrare che l'insieme H di tutte le applicazioni lineari $V \rightarrow W$, dotato delle operazioni di addizione

$$\begin{array}{ccc} H \times H & \longrightarrow & H \\ f, g & \mapsto & f + g \end{array}$$

e di moltiplicazione per scalari

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times H & \longrightarrow & H \\ h, f & \mapsto & hf \end{array}$$

è uno spazio vettoriale.

Definizione 201 Siano V e W spazi vettoriali. Lo spazio vettoriale di tutte le applicazioni lineari $V \rightarrow W$ viene denotato in genere con

$$\text{Hom}(V, W)$$

Lo spazio vettoriale

$$\text{Hom}(V, \mathbb{R}),$$

viene detto il duale di V , e sarà denotato con V^\vee ; i suoi elementi (cioè le applicazioni lineari $V \rightarrow \mathbb{R}$) sono anche dette forme lineari.

A volte per il duale di V viene anche usata la notazione V^* .

Osservazione 202 Sia V uno spazio finitamente generato e sia

$$\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$$

una sua base. Per la Proposizione 156, esiste un'unica forma lineare

$$\ell_1 : V \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$\ell_1(\mathbf{v}_1) = 1, \ell_1(\mathbf{v}_2) = 0, \dots, \ell_1(\mathbf{v}_n) = 0.$$

Allo stesso modo, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ possiamo trovare un'unica forma lineare ℓ_i tale che $\ell_i(\mathbf{v}_i) = 1$ ed $\ell_i(\mathbf{v}_j) = 0$ per $j \neq i$.

Se ora ℓ è una qualunque forma lineare, ponendo $a_1 = \ell(\mathbf{v}_1), \dots, a_n = \ell(\mathbf{v}_n)$, la Proposizione 156 implica che

$$\ell = a_1 \ell_1 + \dots + a_n \ell_n .$$

Infine, se

$$a_1 \ell_1 + \dots + a_n \ell_n = 0$$

(dove con 0 denotiamo la forma nulla), applicando primo e secondo membro al vettore \mathbf{v}_i , otteniamo $a_i = 0$.

Concludiamo che

$$(\ell_1, \dots, \ell_n)$$

è una base di V^\vee .

Definizione 203 Conservando le notazioni dell'osservazione precedente la base

$$(\ell_1, \dots, \ell_n)$$

viene detta base duale della base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, e sarà indicata con \mathcal{B}^\vee .

Osservazione 204 Poiché la base duale di una base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ ha ordine n , concludiamo che il duale V^\vee di uno spazio finitamente generato V ha la stessa dimensione di V . Dunque uno spazio finitamente generato è isomorfo al suo duale. Un isomorfismo

$$V \rightarrow V^\vee$$

è dato da

$$c_{\mathcal{B}^\vee}^{-1} \circ c_{\mathcal{B}} .$$

Questo isomorfismo dipende dalla scelta della base \mathcal{B} (cioè cambiando base, in generale cambia l'isomorfismo).

Nel caso $V = \mathbb{R}^n$, se scegliamo la base standard, otteniamo un isomorfismo particolarmente semplice. Infatti, la base duale della base standard è il sistema (x_1, \dots, x_n) costituito dalle funzioni coordinate (vedi Definizione 148), e l'isomorfismo è quello che ad ogni vettore numerico (a_1, \dots, a_n) associa la forma lineare

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n .$$

Notiamo inoltre che tale isomorfismo è "collegato" col prodotto scalare standard: ad ogni vettore numerico \mathbf{a} è associata l'applicazione di moltiplicazione scalare per \mathbf{a} .

Definizione 205 L'isomorfismo

$$\mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^\vee$$

che ad ogni vettore numerico (a_1, \dots, a_n) associa la forma lineare

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

sarà chiamato isomorfismo standard.

36 Usi delle applicazioni lineari

Il concetto di applicazione lineare è estremamente generale. Trova applicazione a moltissimi problemi di tipo diverso. In questo paragrafo diciamo qualche parola riguardo allo studio delle “deformazioni”.

Supponiamo di voler descrivere analiticamente il processo di deformazione di un oggetto. Per alcuni tipi di problemi, non è importante conoscere tutto il processo: si è interessati solo a descrivere il passaggio dallo stato iniziale allo stato finale. Basta allora considerare la funzione

$$f : C \rightarrow C'$$

che ha come dominio C l'insieme dei punti occupati inizialmente dal corpo, come insieme d'arrivo C' l'insieme dei punti occupati alla fine del processo, e che associa ad ogni posizione iniziale di un punto del corpo la posizione finale dello stesso punto materiale.

Introducendo un riferimento nello spazio, f dà luogo ad una funzione

$$X \rightarrow X'$$

tra sottoinsiemi di \mathbb{R}^3 .

Viceversa, ogni funzione tra sottoinsiemi di \mathbb{R}^3 o \mathbb{R}^2 può essere visualizzata come una deformazione (o un movimento), intesa come passaggio da uno stato iniziale ad uno stato finale.

Questo spiega l'importanza dello studio delle funzioni tra domini di \mathbb{R}^n . Tra queste funzioni, le funzioni lineari giocano un ruolo fondamentale. Infatti se, come quasi sempre accade nella realtà fisica, le funzioni coinvolte sono abbastanza regolari (differenziabili), allora considerando regioni sufficientemente piccole, ogni funzione “diventa lineare”.

Per rendersene conto, pensiamo al caso di una funzione derivabile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se “zoomiamo” sul grafico di f intorno ad un punto, questo diventa sempre più simile ad una retta, che è il grafico di una funzione lineare (se si sceglie l'origine nel punto su cui si fa lo zoom).

Se prendiamo una funzione differenziabile $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, “zoomando” il suo grafico intorno ad un punto, questo si approssima sempre di più ad un piano, che è il grafico di una funzione lineare.

La cosa va bene anche per funzioni $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (o tra loro sottoinsiemi). Solo che in questo caso, non potendo disegnare il grafico, conviene visualizzare direttamente la deformazione (cioè il passaggio dalla figura iniziale alla figura deformata). Dunque è molto utile avere una descrizione delle deformazioni lineari.

La deformazione lineare “infinitesima” che descrive una deformazione f intorno ad un punto P si chiama *differenziale* di f in P . La matrice associata al differenziale si chiama *matrice Jacobiana* di f in P . Rimandiamo ai corsi di Analisi per i dettagli formali.

Per studiare i processi continui di deformazione, basta “aggiungere la variabile tempo” al dominio. Rimane valido il fatto che per una regione infinitesima la deformazione istantanea è descritta da un'applicazione lineare.

Nei paragrafi successivi stabiliremo alcuni risultati utili per una classificazione sistematica delle applicazioni lineari.

37 Endomorfismi

Definizione 206 Un'applicazione lineare $V \rightarrow V$ (cioè con dominio uguale all'insieme d'arrivo) si dice *endomorfismo di V* .

Definizione 207 Sia f un endomorfismo di uno spazio finitamente generato V , e sia A la matrice associata ad f rispetto alle basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' di V . Se $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ allora A sarà detta *matrice associata ad f rispetto a \mathcal{B}* .

Sebbene a volte sia comodo rappresentare un endomorfismo usando due basi diverse di V (una per il dominio ed una per l'insieme d'arrivo), come è successo quando abbiamo definito il cambio di base, nella maggior parte dei casi è preferibile fissare un'unica base.

Osservazione 208 Sia f un endomorfismo di V , siano \mathcal{B} e \mathcal{B}' basi di V , sia A la matrice associata ad f rispetto a \mathcal{B} , sia A' la matrice associata ad f rispetto a \mathcal{B}' e sia infine B la matrice del cambio di base da \mathcal{B} a \mathcal{B}' . La composizione

$$V \xrightarrow{\text{id}_V} V \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\text{id}_V} V$$

è ovviamente uguale ad f . Se fissiamo nell'ordine le basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}, \mathcal{B}$, la Proposizione 157 (tenendo anche presente l'Osservazione 163) implica che

$$A = B^{-1}A'B.$$

Definizione 209 Due matrici A ed A' si dicono *simili* se esiste una matrice invertibile B tale che

$$A = B^{-1}A'B.$$

Osservazione 210 Siccome una matrice invertibile B è per forza quadrata, affinché un prodotto $B^{-1}AB$ abbia senso, A deve anche essere quadrata dello stesso ordine di B , e il prodotto è allora ancora una matrice quadrata dello stesso ordine. Dunque due matrici simili devono per forza essere quadrate dello stesso ordine.

Osservazione 211 Sia \mathcal{B} una base di uno spazio vettoriale V di dimensione n e sia B una matrice invertibile di ordine n . Poiché la coordinazione rispetto a \mathcal{B} è un isomorfismo, e poiché le colonne di B sono linearmente indipendenti (perché $|B| \neq 0$), il sistema \mathcal{B}' dei vettori che hanno per rispettive componenti le colonne di B , è un sistema di n vettori indipendenti di V . Allora per l'Esercizio 16, \mathcal{B}' è una base di V , e per l'Osservazione 161 la matrice del cambio di base da \mathcal{B}' a \mathcal{B} è proprio B .

Osservazione 212 Sia f un endomorfismo di uno spazio finitamente generato V , e sia A la matrice associata ad f rispetto ad una base \mathcal{B} . Se A' è una matrice simile ad A , allora esiste una matrice invertibile B tale che $A = B^{-1}A'B$. Per l'osservazione precedente (prendendo B^{-1} al posto di B), esiste una base \mathcal{B}' tale che la matrice del cambio di base da \mathcal{B}' a \mathcal{B} sia B^{-1} . Per l'Osservazione 208 la matrice associata ad f rispetto a \mathcal{B}' è uguale a BAB^{-1} . Ma siccome

$$BAB^{-1} = BB^{-1}A'BB^{-1} = A',$$

concludiamo che la matrice associata ad f rispetto a \mathcal{B}' è proprio A' .

In definitiva, se A è associata ad un endomorfismo f rispetto ad una base \mathcal{B} , e se A' è simile ad A , allora anche A' è associata ad f rispetto ad un'opportuna base \mathcal{B}' .

Osservazione 213 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n . Per l'Osservazione 154, ogni matrice quadrata A di ordine n si può ottenere come matrice associata a qualche endomorfismo f di V , rispetto ad una fissata base \mathcal{B} .

Dunque, le Osservazioni 208 e 212 ci assicurano che due matrici sono simili se e solo se possono essere ottenute come matrici associate ad uno stesso endomorfismo, rispetto a (singole) basi.

38 Autovalori ed autovettori

Definizione 214 Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V . Se un vettore non nullo \mathbf{v} ed uno scalare h sono tali che

$$f(\mathbf{v}) = h\mathbf{v}$$

allora diremo che \mathbf{v} è un autovettore di f con autovalore h . Uno scalare qualunque è detto autovalore di f , se è autovalore per qualche autovettore.

Data una matrice quadrata A di ordine n , quando parleremo di autovalori (reali) ed autovettori (reali) di A intenderemo riferirci a quelli dell'endomorfismo di \mathbb{R}^n dato dalla moltiplicazione per A .

Se nella definizione ora data non avessimo supposto che \mathbf{v} fosse non nullo, ogni scalare sarebbe stato un autovalore. Dunque è importante tenere a mente che gli autovettori di f sono *non nulli*.

Osservazione 215 Sia f un endomorfismo di V e sia t uno scalare. Consideriamo l'endomorfismo

$$f_t \stackrel{\text{def}}{=} f - t \text{id}_V$$

(dove $\text{id}_V : V \rightarrow V$ è l'applicazione identica). Si ha allora

$$\text{Ker } f_t = \{\mathbf{v} : f(\mathbf{v}) = t\mathbf{v}\}$$

Dunque gli (eventuali) autovettori con autovalore t sono i vettori non nulli appartenenti al nucleo di f_t . Concludiamo che t è un autovalore di f se e solo se $\text{Ker } f_t \neq \{0\}$.

Definizione 216 Conservando le notazioni introdotte nell'osservazione precedente, se t è un autovalore allora il sottospazio non nullo $\text{Ker } f_t$ di V verrà detto autospazio relativo a t .

In altre parole, l'autospazio relativo ad un autovalore t è l'insieme costituito da tutti gli autovettori con autovalore t e dal vettore nullo:

$$\text{Autospazio relativo a } t = \{\text{Autovettori con autovalore } t\} \cup \{0\} .$$

Osservazione 217 Conservando le notazioni introdotte nell'Osservazione 215, supponiamo che V sia finitamente generato, fissiamo una base di V e sia A la matrice associata ad f . Allora la matrice A_t associata ad f_t è uguale $A - tI_n$ (dove $n = \dim V$). Poiché $\dim \text{Ker } f_t = n - \text{rk } A_t$ (cfr. Osservazione 196), l'Osservazione 215 prova che t è un autovalore se e solo se il rango di A_t è strettamente minore di n , il che accade se e solo se il determinante di A_t è 0 (è l'unico minore di ordine n).

Concludiamo che

$$t \text{ è autovalore di } f \iff |A - tI_n| = 0 .$$

Proposizione 218 Siano A ed A' matrici simili. Allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$|A' - tI_n| = |A - tI_n| .$$

Dimostrazione. Poiché le matrici sono simili, esiste una matrice invertibile B tale che

$$A = B^{-1}A'B .$$

Si ha

$$\begin{aligned} |A - tI_n| &= |B^{-1}A'B - tI_n| = |B^{-1}A'B - B^{-1}(tI_n)B| = \\ &= |B^{-1}(A' - tI_n)B| = |B^{-1}||A' - tI_n||B| = |A' - tI_n| , \end{aligned}$$

come volevamo.

Osservazione 219 Per la proposizione precedente e per l'Osservazione 208, se f è un endomorfismo di uno spazio finitamente generato V , comunque si scelga una base \mathcal{B} di V , detta A la matrice associata ad f , la funzione che a $t \in \mathbb{R}$ associa

$$|A - tI_n|$$

è sempre la stessa (non dipende da \mathcal{B}).

Notiamo inoltre che, siccome il determinante si ottiene con operazioni di moltiplicazione e di addizione, la funzione in questione è data da un polinomio.

Definizione 220 Sia f un'endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato e sia A la matrice associata ad f rispetto ad una base qualunque. Allora la funzione

$$p_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

che a $t \in \mathbb{R}$ associa

$$|A - tI_n|$$

(cfr. l'osservazione precedente) si chiama polinomio caratteristico di f .

Proposizione 221 Sia f un'endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato e sia p_f il suo polinomio caratteristico. Allora

$$t \text{ è autovalore di } f \iff p_f(t) = 0.$$

Dimostrazione. Segue subito dalle definizioni e dall'Osservazione 217.

In parole povere, in questo paragrafo abbiamo provato che gli autovalori di un endomorfismo f di uno spazio finitamente generato, sono uguali alle radici (reali) del polinomio caratteristico di f . Inoltre, dato un autovalore t , gli autovettori con autovalore t sono i vettori non nulli appartenenti al nucleo di $f - t \text{id}_V$.

Questi due fatti ci mettono in grado (almeno in linea di principio) di trovare tutti gli autovalori e gli autovettori di uno spazio finitamente generato. Dal punto di vista dei calcoli pratici, l'unica cosa che può comportare un po' di difficoltà è il calcolo delle radici del polinomio caratteristico, che può essere di grado elevato. A questo proposito è utile ricordare come si scompongono i polinomi (fatto noto dalle scuole superiori). Piuttosto che richiamare in generale il procedimento, vediamo come si opera su qualche esempio concreto.

Esempio 222 Sia

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

dato da

$$p(t) = t^3 - 2t^2 - 6t + 4.$$

Se non si vogliono andare a scomodare le formule per le equazioni di terzo grado, o i metodi di approssimazione numerica, si può cercare di trovare per tentativi una radice, scegliendola tra i divisori del termine noto (nel nostro caso 4):

$$p(1) = -3 \quad p(-1) = 7 \quad p(2) = -8 \quad p(-2) = 0$$

(avendo trovato la radice -2 , è inutile provare altri divisori).

Dunque p è divisibile per $t + 2$. Se non si ricordano la regola per la divisione di polinomi o la regola di Ruffini (note dalle scuole superiori), si può scrivere

$$(t + 2)(at^2 + bt + c) = t^3 - 2t^2 - 6t + 4$$

e ricavare poi (facilmente) a, b, c . Otteniamo

$$p(t) = (t + 2)(t^2 - 4t + 2).$$

Le radici di p sono dunque -2 e le eventuali radici di $t^2 - 4t + 2$. La formula

$$\frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2}$$

ci dice che le altre due radici di p sono

$$2 + \sqrt{2} \quad \text{e} \quad 2 - \sqrt{2} .$$

39 Diagonalizzazione

Definizione 223 Un endomorfismo f di uno spazio finitamente generato V si dice diagonalizzabile se esiste una base \mathcal{B} tale che la matrice associata ad f rispetto a \mathcal{B} sia una matrice diagonale.

Osservazione 224 Sia A una matrice quadrata di ordine n , sia ϕ l'endomorfismo di \mathbb{R}^n dato dalla moltiplicazione per A e consideriamo le seguenti condizioni:

1. ϕ è diagonalizzabile;
2. A è simile ad una matrice diagonale.

Visto che la matrice associata a ϕ rispetto alla base standard è proprio A , per l'Osservazione 208 si ha

$$(1) \implies (2)$$

e per l'Osservazione 212 si ha

$$(2) \implies (1) .$$

Dunque le due condizioni sono equivalenti, cioè l'endomorfismo di moltiplicazione per A è diagonalizzabile se e solo se A è simile ad una matrice diagonale.

Definizione 225 Sia A una matrice quadrata di ordine n . Se sono verificate le condizioni equivalenti esposte nell'osservazione precedente, allora A si dice diagonalizzabile (sui reali).

Osservazione 226 Sia f un endomorfismo di uno spazio finitamente generato V , sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una sua base e sia A la matrice associata ad f rispetto a \mathcal{B} . Dalla Proposizione 155 segue subito che A è diagonale se e solo se

$$f(\mathbf{v}_1) = a_{11}\mathbf{v}_1, \quad \dots, \quad f(\mathbf{v}_n) = a_{nn}\mathbf{v}_n,$$

cioè se e solo se per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ il vettore (sicuramente non nullo) \mathbf{v}_i è autovettore di f con autovalore a_{ii} .

Concludiamo che f è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di V costituita da autovettori di f , e in tal caso la matrice diagonale associata ha gli autovalori sulla diagonale principale.

In particolare, una matrice quadrata è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di \mathbb{R}^n costituita da autovettori della matrice stessa.

Proposizione 227 Sia p un polinomio (cioè possiamo assumere che $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sia una funzione del tipo

$$t \longmapsto a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n,$$

con a_0, a_1, \dots, a_n numeri reali fissati). Allora p ha un numero finito di radici reali (cioè numeri reali t tali che $p(t) = 0$). Se t_1, \dots, t_s sono tali radici, allora esiste un'unica n -pla (n_1, \dots, n_s) di numeri naturali tali che

$$p(t) = (t - t_1)^{n_1} \cdots (t - t_s)^{n_s} q(t)$$

(per ogni $t \in \mathbb{R}$), dove q è un polinomio privo di radici reali.

Tralasciamo la dimostrazione.

Definizione 228 Nella situazione della proposizione precedente, si dirà che il numero naturale n_i è la molteplicità della radice t_i di $p(t)$ (per ogni $i \in \{1, \dots, s\}$).

Definizione 229 Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato, sia \bar{t} un autovalore di f e sia p_f il polinomio caratteristico. La molteplicità della radice \bar{t} di p_f si dice molteplicità algebrica dell'autovalore \bar{t} .

La dimensione dell'autospazio relativo a \bar{t} si dice molteplicità geometrica dell'autovalore \bar{t} .

Proposizione 230 Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato e sia \bar{t} un autovalore di f . Allora la molteplicità geometrica di \bar{t} è minore o uguale alla molteplicità algebrica.

Tralasciamo la dimostrazione.

Assumiamo nota la nozione di numero complesso. Ovviamente, ogni numero reale è anche un numero complesso.

Osservazione 231 Abbiamo già visto che un numero reale è un autovalore di un endomorfismo f (di uno spazio finitamente generato) se e solo se è una radice del polinomio caratteristico di f . Però è possibile che esistano anche dei numeri complessi che siano radici del polinomio caratteristico e che non siano numeri reali. Tali numeri non sono ovviamente autovalori di f .

Proposizione 232 Sia f un endomorfismo di uno spazio V e siano

$$S = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \quad e \quad T = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$$

due sistemi di vettori linearmente indipendenti. Se ogni vettore di S è un autovettore con autovalore h , se ogni vettore di T è un autovettore con autovalore k , e se h e k sono diversi, allora il sistema "unione" $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ è anch'esso linearmente indipendente.

Dimostrazione. Consideriamo una combinazione lineare nulla dei vettori del sistema “unione”:

$$h_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + h_n \mathbf{v}_n + k_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + k_m \mathbf{w}_m = \mathbf{0} .$$

Dunque abbiamo

$$h_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + h_n \mathbf{v}_n = -k_1 \mathbf{w}_1 - \cdots - k_m \mathbf{w}_m .$$

Se poniamo

$$\mathbf{u} = h_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + h_n \mathbf{v}_n ,$$

abbiamo anche

$$\mathbf{u} = -k_1 \mathbf{w}_1 - \cdots - k_m \mathbf{w}_m .$$

Dunque \mathbf{u} appartiene sia all'autospazio relativo ad h che all'autospazio relativo a k . Quindi si avrebbe

$$h\mathbf{u} = k\mathbf{u}$$

(perché sono entrambi uguali ad $f(\mathbf{u})$), da cui

$$(h - k)\mathbf{u} = \mathbf{0} .$$

Siccome $h \neq k$, questo implica che $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Quindi

$$h_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + h_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

e

$$-k_1 \mathbf{w}_1 - \cdots - k_m \mathbf{w}_m = \mathbf{0} .$$

Siccome i sistemi S e T sono indipendenti, gli scalari h_i e gli scalari k_j sono tutti nulli. Questo dimostra che il sistema “unione” è indipendente, come volevamo.

La proposizione ora dimostrata si può estendere a più gruppi di autovettori relativi ad autovalori diversi. Per dare l'idea del (non difficile) ragionamento da fare, dimostriamo il seguente fatto.

Proposizione 233 *Sia f un endomorfismo di uno spazio V e siano \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} autovettori con rispettivi autovalori h , k , l . Se tali autovalori sono a due a due distinti, allora il sistema $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ è linearmente indipendente.*

Dimostrazione. Per la proposizione precedente, il sistema (\mathbf{u}, \mathbf{v}) è linearmente indipendente. Per la Proposizione 64 a pag. 25 degli appunti di Geometria I, basta dimostrare che \mathbf{w} non dipende da tale sistema.

Supponiamo per assurdo che

$$\mathbf{w} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} .$$

Applicando f otterremo

$$l\mathbf{w} = \alpha h\mathbf{u} + \beta k\mathbf{v} ,$$

mentre si deve avere anche

$$l\mathbf{w} = l\alpha\mathbf{u} + l\beta\mathbf{v} .$$

Allora avremmo

$$(l-h)\alpha\mathbf{u} + (l-k)\beta\mathbf{v} = \mathbf{0} .$$

Siccome (\mathbf{u}, \mathbf{v}) è linearmente indipendente, i coefficienti dovrebbero essere nulli, e siccome $l-h \neq 0$ e $l-k \neq 0$, allora α e β sarebbero nulli. Questo è assurdo perché $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$, essendo un autovettore, è non nullo. Dunque \mathbf{w} non dipende da (\mathbf{u}, \mathbf{v}) , come volevamo.

Come abbiamo detto, con i ragionamenti ora visti, si può dimostrare che se abbiamo un gruppo di sistemi indipendenti di autovettori e ciascun sistema è relativo ad un autovalore diverso, allora il sistema “unione” è ancora linearmente indipendente. Come facile conseguenza di ciò (e della Proposizione 230) otteniamo il seguente teorema.

Proposizione 234 *Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato. Allora f è diagonalizzabile se e solo se valgono tutti e due i seguenti fatti.*

- *non esiste nessun numero complesso oltre agli autovalori di f che sia radice del polinomio caratteristico;*
- *per ogni autovalore di f la molteplicità algebrica è uguale alla molteplicità geometrica.*

Un tipico esercizio d’esame è quello di stabilire se un’endomorfismo è o no diagonalizzabile, e in caso affermativo di trovare una base di autovettori e la rispettiva matrice associata. La proposizione precedente ci mette in grado di rispondere.

Se l’endomorfismo è diagonalizzabile, per trovare una base di autovettori basta “mettere insieme” le basi dei singoli autospazi. Queste basi si determinano facilmente: piuttosto che spiegare in generale come, vediamo qualche esempio concreto.

Esempio 235 *Consideriamo l’endomorfismo f di \mathbb{R}^3 dato da*

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z) .$$

La matrice associata rispetto alla base standard è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

La matrice $A_t = A - tI_n$ è

$$A_t = \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 1 & 1 & 1-t \end{pmatrix} .$$

Sviluppando il determinante otteniamo il polinomio caratteristico di f :

$$p_f(t) = -t^3 + 3t^2.$$

Le radici sono 0 e 3 e la scomposizione è

$$p_f(t) = (t - 0)^2(t - 3)(-1).$$

Dunque gli autovalori sono 0 con molteplicità algebrica 2 e 3 con molteplicità algebrica 1, e il polinomio non ha altre radici complesse oltre agli autovalori. Siccome l'autospazio relativo a 0 è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo dato da $f_0(x, y, z) = (0, 0, 0)$, che ha matrice associata A_0 , la molteplicità geometrica è uguale a

$$3 - \text{rk } A_0$$

(cfr. Osservazione 196). Riduciamo a scalini A_0

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché c'è una sola riga non nulla, il rango è 1, quindi la molteplicità algebrica dell'autovalore 0 è 2, come quella algebrica. La molteplicità geometrica di 3, dovendo essere minore o uguale a quella algebrica, è al massimo uno; ma poiché l'autospazio non può essere nullo, abbiamo automaticamente (senza fare calcoli) che la molteplicità geometrica di 3 è 1, come quella algebrica.

Le condizioni della Proposizione 234 sono verificate: dunque f è diagonalizzabile.

Se ora vogliamo trovare una base di autovettori, dobbiamo "mettere insieme" le basi degli autospazi. L'autospazio relativo a 0 è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo considerato prima (che abbiamo già ridotto a scalini): ci basta risolvere l'equazione

$$x + y + z = 0.$$

Ponendo $z = s_1, y = s_2$ otteniamo che l'autospazio è

$$\{(-s_1 - s_2, s_2, s_1) : s_1, s_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Per trovare una base di questo autospazio possiamo osservare che

$$(-s_1 - s_2, s_2, s_1) = s_1(-1, 0, 1) + s_2(-1, 1, 0);$$

dunque il sistema

$$\left((-1, 0, 1), (-1, 1, 0) \right)$$

è un sistema di generatori. Siccome è evidentemente linearmente indipendente, costituisce una base.

Passiamo agli autovettori relativi all'autovalore 3. Basta risolvere il sistema omogeneo con matrice dei coefficienti A_3 . Riduciamo quindi a scalini

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ponendo $z = s$ otteniamo $y = s$ e $x = s$. Dunque l'autospazio relativo a 3 è

$$\{(s, s, s) : s \in \mathbb{R}\}.$$

Osservando che

$$(s, s, s) = s(1, 1, 1)$$

otteniamo subito che una base è

$$((1, 1, 1)).$$

Mettendo insieme le due basi trovate otteniamo la voluta base di autovettori:

$$\mathcal{B} = ((-1, 0, 1), (-1, 1, 0), (1, 1, 1)).$$

Se si vuole fare qualche verifica (comunque non obbligatoria), si può controllare che la matrice del cambio di base da \mathcal{B} alla base standard, cioè quella che ha per colonne le componenti (standard) dei vettori di \mathcal{B}

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

è effettivamente invertibile e che

$$B^{-1}AB$$

effettivamente è la matrice diagonale che ha gli autovalori 0, 0, 3 sulla diagonale principale.

Il metodo ora usato per trovare le basi degli autospazi fornisce sempre automaticamente una base, e funziona, più in generale, per trovare basi per molti tipi di spazi vettoriali (per esempio, nuclei di omomorfismi). Vediamo perché con un ulteriore esempio.

Esempio 236 Troviamo una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

La matrice completa è

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

(in realtà, per i sistemi omogenei, visto che l'ultima colonna è sempre nulla, basta considerare la matrice dei coefficienti). Riducendo a scalini otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ponendo $x_5 = s_1$ e $x_4 = s_2$ dalla seconda equazione otteniamo $x_3 = 4s_1 - 3s_2$. Ponendo $x_2 = s_3$ e sostituendo tutto nella prima otteniamo $x_1 = -5s_1 + 4s_2 + 2s_3$. Dunque lo spazio delle soluzioni è

$$\{(-5s_1 + 4s_2 + 2s_3, s_3, 4s_1 - 3s_2, s_2, s_1) : s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Osservando che

$$\begin{aligned} &(-5s_1 + 4s_2 + 2s_3, s_3, 4s_1 - 3s_2, s_2, s_1) = \\ &= s_1(-5, 0, 4, 0, 1) + s_2(4, 0, -3, 1, 0) + s_3(2, 1, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

otteniamo il sistema di generatori

$$\left((-5, 0, 4, 0, 1), (4, 0, -3, 1, 0), (2, 1, 0, 0, 0) \right).$$

Questo sistema è “automaticamente” indipendente. Infatti

$$(-5s_1 + 4s_2 + 2s_3, s_3, 4s_1 - 3s_2, s_2, s_1)$$

è proprio la combinazione lineare dei tre vettori considerati, tramite gli scalari s_1, s_2, s_3 , e se questa è uguale a $(0, 0, 0, 0, 0)$, allora in particolare i coefficienti s_1, s_2, s_3 , che sono proprio la seconda, la quarta e la quinta componente, devono essere tutti nulli.

Abbiamo dunque una base. Notiamo inoltre che i tre vettori scelti corrispondono alle tre scelte

- $s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 0$;
- $s_1 = 0, s_2 = 1, s_3 = 0$;
- $s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 1$;

Vediamo un'ultimo esempio.

Esempio 237 Consideriamo il sistema omogeneo

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Lo spazio delle soluzioni è

$$\left\{ \left(\frac{3}{2}s - t, s, -2t, t \right) : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Scrivendo

$$\begin{aligned} &\left(\frac{3}{2}s - t, s, -2t, t \right) = \\ &= t(-1, 0, -2, 1) + s\left(\frac{3}{2}, 1, 0, 0\right), \end{aligned}$$

Otteniamo che il sistema

$$\left((-1, 0, -2, 1), \left(\frac{3}{2}, 1, 0, 0\right) \right)$$

è una base per lo spazio delle soluzioni.

40 Diagonalizzazione ortogonale

Definizione 238 Sia \mathcal{V} lo spazio dei vettori liberi. Una base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ di \mathcal{V} si dice ortonormale se è costituita da vettori a due a due ortogonali.

Dunque una base ortonormale è costituita dai tre vettori di un riferimento monometrico ortogonale.

Definizione 239 Due vettori di \mathbb{R}^n saranno detti ortogonali se il loro prodotto scalare standard è uguale a 0. Il modulo (anche detto norma) di un vettore numerico $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ è definito come

$$|\mathbf{a}| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} .$$

Una base $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di \mathbb{R}^n si dice ortonormale se è costituita da vettori di modulo 1 a due a due ortogonali

Osservazione 240 Una base $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di \mathbb{R}^n è ortonormale se e solo se per ogni coppia di indici distinti $i, j \in \{1, \dots, n\}$ si ha

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0 ,$$

e per ogni indice $i \in \{1, \dots, n\}$ si ha

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 1 ,$$

Definizione 241 Una matrice (quadrata) invertibile A si dice ortogonale se

$$A^{-1} = A^t$$

Osservazione 242 È facile dimostrare che per ogni matrice quadrata A si ha

$$|A^t| = |A| .$$

Dunque, se A è una matrice ortogonale, siccome

$$|AA^t| = |I_n| = 1 ,$$

si ha

$$|A|^2 = 1 ,$$

e quindi

$$|A| = \pm 1 .$$

Se una matrice ha determinante ± 1 , non è detto però che sia ortogonale.

Proposizione 243 Una matrice quadrata A di ordine n è ortogonale se e solo se il sistema delle colonne (e il sistema delle righe) è una base ortonormale di \mathbb{R}^n .

Dimostrazione. Poiché A è invertibile se e solo se il suo determinante è non nullo, e questo accade se e solo se le colonne (o le righe) sono indipendenti, tenendo presente l'Esercizio 16 si ha che le colonne (o le righe) di A sono una base di \mathbb{R}^n se e solo se A è invertibile.

Chiaramente A è ortogonale se e solo se

$$A^t A = I_n .$$

Siccome le righe di A^t sono le colonne di A , l'elemento di posto i, j del prodotto $A^t A$ è

$$\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^j .$$

Quindi il prodotto $A^t A$ è uguale ad I_n se e solo se il sistema delle colonne di A (che sicuramente è una base, perché $|A|$ non può essere 0), soddisfa le condizioni dell'Osservazione 240, come volevamo.

Per le righe, basta considerare il prodotto AA^t e fare lo stesso ragionamento.

Definizione 244 *Sia V lo spazio dei vettori liberi oppure \mathbb{R}^n . Un'endomorfismo di V si dice ortogonalmente diagonalizzabile se esiste una base ortonormale \mathcal{B} tale che la matrice associata ad f rispetto a \mathcal{B} sia una matrice diagonale.*

Proposizione 245 *Sia A una matrice quadrata di ordine n e sia ϕ l'endomorfismo di \mathbb{R}^n dato dalla moltiplicazione per A . Allora ϕ è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se esiste una matrice ortogonale B e una matrice diagonale D tali che*

$$A = B^{-1} D B .$$

Esercizio 246 *Dimostrare la proposizione precedente.*

Definizione 247 *Una matrice si dice ortogonalmente diagonalizzabile se sono verificate le condizioni equivalenti espresse nella Proposizione 245.*

Proposizione 248 *Una matrice sui reali è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se è simmetrica.*

Tralasciamo la dimostrazione, che richiederebbe un po' di lavoro.

Un tipico esercizio d'esame è trovare una base ortonormale di autovettori di una matrice simmetrica. Se gli autovalori hanno tutti molteplicità 1, non ci sono particolari problemi: gli autovettori da usare per formare la base vengono automaticamente ortogonali tra loro; basta solo dividerli per il loro modulo, in modo da avere vettori di modulo 1. Un po' più di attenzione ci vuole se capita un autovalore di molteplicità maggiore di 1. Vediamo come si opera con un esempio concreto.

Esempio 249 *Troviamo una base ortonormale di autovettori dell'endomorfismo assegnato nell'Esempio 235. Notiamo che l'autovettore $(1, 1, 1)$ relativo all'autovalore 3, è effettivamente ortogonale ai due autovettori $(-1, 0, 1)$ e $(-1, 1, 0)$, relativi all'autovalore 0. Il problema è che questi due non sono ortogonali tra loro. Per fortuna, l'autospazio relativo a 0, avendo dimensione 2, ha*

molti altri autovettori. Per trovarne due indipendenti ed ortogonali, possiamo ispirarci alla dimostrazione del Lemma 58.

Dividiamo dunque $(-1, 0, 1)$ per il suo modulo (in modo da ottenere un vettore di modulo 1):

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Poi consideriamo il vettore

$$(-1, 1, 0) - \left((-1, 1, 0) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

che è uguale a

$$\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right).$$

Ora i due vettori $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$ sono ancora autovettori relativi a 0, e stavolta sono ortogonali tra loro (oltre che a $(1, 1, 1)$). A questo punto, basta dividere i vettori $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$ e $(1, 1, 1)$ per il loro modulo (per il primo siamo già a posto). Otteniamo quindi la base ortonormale

$$\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right).$$

Se a qualcuno non piace il metodo ispirato alla dimostrazione del Lemma 58, per trovare i due autovettori relativi a 0 ortogonali tra loro, si può lasciare il primo vettore $((-1, 0, 1))$ tale e quale; poi, per il secondo, riscrivere il sistema (a scalini) che definiva l'autospazio (nel nostro caso, solo l'equazione $x + y + z = 0$), aggiungendo la condizione di ortogonalità con $(-1, 0, 1)$:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono

$$\{(t, -2t, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Dunque come secondo autovettore relativo a 0 possiamo prendere $(1, -2, 1)$. Abbiamo quindi i tre autovettori $(-1, 0, 1)$, $(1, -2, 1)$, $(1, 1, 1)$; e a questo punto basta dividere per i moduli.

Il metodo ora usato per trovare una base ortonormale di un autospazio funziona, più in generale, per trovare basi ortonormali per molti tipi di spazi vettoriali (per esempio, nuclei di omomorfismi).

Esercizio 250 *Trovare una base ortonormale per lo spazio considerato nell'Esempio 236.*

Suggerimento. Se ci si ispira al Lemma 58, si prendono innanzitutto i tre vettori trovati nell'Esempio 236: $\mathbf{u} = (-5, 0, 4, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (4, 0, -3, 1, 0)$, $\mathbf{w} = (2, 1, 0, 0, 0)$. Si divide innanzitutto \mathbf{u} per il suo modulo,

$$\mathbf{u}' = \frac{1}{|\mathbf{u}|} \mathbf{u},$$

e si pone

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}')\mathbf{u}' .$$

Poi si divide \mathbf{v}' per il suo modulo,

$$\mathbf{v}'' = \frac{1}{|\mathbf{v}'|} \mathbf{v}' ,$$

e si pone

$$\mathbf{w}' = \mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}')\mathbf{u}' - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}'')\mathbf{v}'' .$$

Infine si divide \mathbf{w}' per il suo modulo,

$$\mathbf{w}'' = \frac{1}{|\mathbf{w}'|} \mathbf{w}' ,$$

e si ottiene così la base ortonormale

$$(\mathbf{u}' , \mathbf{v}'' , \mathbf{w}'') .$$

41 Applicazione trasposta

Esercizio 251 Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Dimostrare che l'applicazione

$$W^\vee \rightarrow V^\vee$$

data da

$$\ell \mapsto \ell \circ f$$

è lineare.

Definizione 252 L'applicazione lineare $W^\vee \rightarrow V^\vee$ considerata nel precedente esercizio si chiama applicazione duale di f , o anche applicazione trasposta di f . Tale applicazione sarà indicata con f^\vee .

Proposizione 253 Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare tra spazi finitamente generati, sia \mathcal{B} una base di V , sia \mathcal{B}' una base di W e sia A la matrice associata ad f rispetto a tali basi. Allora la matrice associata ad f^\vee rispetto a \mathcal{B}'^\vee e \mathcal{B}^\vee è A^t .

Esercizio 254 (facoltativo). Dimostrare la proposizione precedente.

Esercizio 255 Sia V uno spazio vettoriale e sia W un suo sottospazio. Dimostrare che l'insieme delle forme lineari su V che si annullano in ogni vettore di W è un sottospazio di V^\vee .

Definizione 256 Nella situazione dell'esercizio precedente chiameremo sottospazio trasposto di W l'insieme delle forme lineari su V che si annullano in ogni vettore di W . Indicheremo tale sottospazio con W^t .

Proposizione 257 *Sia W un sottospazio di uno spazio V . Allora ogni forma lineare su W è restrizione di qualche forma lineare su V*

Tralasciamo la dimostrazione. Osserviamo solo che se V è finitamente generato, allora il risultato segue facilmente dalla Proposizione 156.

Proposizione 258 *Sia $f : V \rightarrow V'$ un'applicazione lineare. Allora si ha*

$$\text{Ker } f^\vee = (\text{Im } f)^t \quad e \quad \text{Im } f^\vee = (\text{Ker } f)^t .$$

Dimostrazione. Sia $\ell' \in V'^\vee$. Chiaramente $\ell' \in \text{Ker } f^\vee$ se e solo se per ogni $\mathbf{v} \in V$ si ha

$$f^\vee(\ell')(\mathbf{v}) = 0 .$$

Ma siccome $f^\vee(\ell') = \ell' \circ f$, abbiamo che $\ell' \in \text{Ker } f^\vee$ se e solo se per ogni $\mathbf{v} \in V$ si ha

$$\ell'(f(\mathbf{v})) = 0 .$$

Ma questo equivale a dire che ℓ' si annulla su tutti i vettori di $\text{Im } f$, cioè che $\ell' \in (\text{Im } f)^t$. Dunque

$$\ell' \in \text{Ker } f^\vee \quad \iff \quad \ell' \in (\text{Im } f)^t ,$$

il che prova la prima uguaglianza.

Sia ora $\ell \in \text{Im } f^\vee$. Dunque $\ell = f \circ \ell'$ per qualche $\ell' \in V'^\vee$. Se $\mathbf{v} \in \text{Ker } f$, allora

$$\ell(\mathbf{v}) = \ell'(f(\mathbf{v})) = \ell'(\mathbf{0}) = 0 .$$

Questo prova che $\ell \in (\text{Ker } f)^t$. Se viceversa $\ell_1 \in (\text{Ker } f)^t$, se abbiamo due vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} tali che $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{w})$, allora $\ell_1(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = 0$, quindi ha senso definire una funzione

$$\ell'_1 : \text{Im } f \rightarrow \mathbb{R}$$

data da

$$\ell'_1(f(\mathbf{v})) = \ell_1(\mathbf{v}) .$$

Per la Proposizione 257, esiste una forma $\ell''_1 \in V'^\vee$ la cui restrizione a $\text{Im } f$ è ℓ'_1 , e dalle definizioni segue subito che

$$\ell_1 = f^\vee(\ell''_1) .$$

Dunque $\ell_1 \in \text{Im } f^\vee$. Abbiamo così provato che una forma appartiene a $\text{Im } f^\vee$ se e solo se appartiene a $(\text{Ker } f)^t$, il che prova la seconda uguaglianza.

Osservazione 259 *Sia A una matrice sui reali di tipo $m \times n$ e sia $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ l'applicazione di moltiplicazione per A . Siano inoltre $\iota_m : \mathbb{R}^m \rightarrow (\mathbb{R}^m)^\vee$ e $\iota_n : \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^\vee$ gli isomorfismi standard (vedi Definizione 205). Vogliamo considerare l'applicazione*

$$\phi' \stackrel{\text{def}}{=} \iota_n^{-1} \circ \phi^\vee \circ \iota_m : \phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n .$$

Poiché l'isomorfismo standard manda la base standard nella sua base duale, e poiché la matrice associata a ϕ^\vee rispetto alle basi duali è A^t (per la Proposizione 253), otteniamo che la matrice associata a ϕ' rispetto alle basi standard è A^t . Quindi ϕ' è l'applicazione di moltiplicazione per A^t .

Esercizio 260 Sia W un sottospazio di \mathbb{R}^n . Dimostrare che l'insieme dei vettori ortogonali a tutti i vettori di W (vedi Definizione 239) è un sottospazio di \mathbb{R}^n .

Definizione 261 Nella situazione dell'esercizio precedente, lo spazio dei vettori ortogonali a tutti i vettori di W sarà detto complemento ortogonale di W e sarà indicato con W^\perp .

Osservazione 262 Sia W un sottospazio di \mathbb{R}^n e sia ι_n l'isomorfismo standard. Tenendo presente l'Osservazione 204, dalle definizioni segue subito che

$$\iota_n(W^\perp) = W^t .$$

Proposizione 263 Sia A una matrice e indichiamo, per abuso di notazione, ancora con A l'applicazione di moltiplicazione per A . Facciamo lo stesso per A^t . Allora si ha

$$\text{Ker } A^t = (\text{Im } A)^\perp \quad e \quad \text{Im } A^t = (\text{Ker } A)^\perp .$$

Dimostrazione. Segue facilmente dalla Proposizione 258 e dalle Osservazioni 259 e 262.

42 Applicazioni bilineari

Definizione 264 Siano V, V' e W spazi vettoriali e sia

$$\phi : V \times V' \longrightarrow W$$

un'applicazione. Per ogni $\mathbf{v} \in V$ indichiamo con $\phi_{\mathbf{v}} : V' \rightarrow W$ l'applicazione che a ciascun $\mathbf{v}' \in V'$ associa $\phi((\mathbf{v}, \mathbf{v}'))$:

$$\phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}') \stackrel{\text{def}}{=} \phi((\mathbf{v}, \mathbf{v}')) .$$

Per ogni $\mathbf{v}' \in V'$ indichiamo con $\phi'_{\mathbf{v}'} : V \rightarrow W$ l'applicazione che a ciascun $\mathbf{v} \in V$ associa $\phi((\mathbf{v}, \mathbf{v}'))$:

$$\phi'_{\mathbf{v}'}(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \phi((\mathbf{v}, \mathbf{v}')) .$$

Se per ogni $\mathbf{v} \in V$ e $\mathbf{v}' \in V'$ le applicazioni $\phi_{\mathbf{v}}$ e $\phi'_{\mathbf{v}'}$ sono lineari, allora si dirà che ϕ è un'applicazione bilineare.

Se $V = V'$ e $W = \mathbb{R}$, allora ϕ sarà anche detta forma bilineare su V . In tal caso, inoltre, se per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ si ha

$$\phi((\mathbf{v}, \mathbf{v}')) = \phi((\mathbf{v}', \mathbf{v}))$$

allora la forma si dirà simmetrica. Se invece una forma bilineare ϕ è tale che per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ si abbia

$$\phi((\mathbf{v}, \mathbf{v}')) = -\phi((\mathbf{v}', \mathbf{v})) ,$$

allora ϕ si dirà antisimmetrica.

Esempio 265 Il prodotto scalare tra vettori liberi e il prodotto scalare tra vettori numerici sono forme bilineari simmetriche.

Esempio 266 L'applicazione

$$\mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{n \times p} \longrightarrow \mathbb{R}^{m \times p}$$

tale che alla coppia di matrici $(A, B) \in \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{n \times p}$ associa il prodotto (righe per colonne) AB è un'applicazione bilineare.

Esempio 267 Il prodotto vettoriale tra vettori liberi è un'applicazione (non una forma) bilineare antisimmetrica.

Esempio 268 L'applicazione

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

che a ciascuna coppia $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ associa il determinante della matrice quadrata di ordine due che ha come righe (nell'ordine) \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 , è una forma bilineare antisimmetrica.

Esempio 269 Sia A una matrice quadrata di ordine n e siano $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Identificando (come abbiamo fatto per le applicazioni lineari) i vettori X e Y con matrici colonna, abbiamo che X^t è una matrice di tipo $1 \times n$, A è una matrice di tipo $n \times n$ e Y è una matrice di tipo $n \times 1$. Ha senso quindi il prodotto

$$X^t A Y ,$$

e questo è una matrice di tipo 1×1 .

Poiché una matrice di tipo 1×1 può essere identificata (per abuso di notazione) con il suo unico termine, abbiamo allora che

$$(X, Y) \longmapsto X^t A Y$$

Definisce un'applicazione

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} .$$

Tale applicazione è una forma bilineare sullo spazio \mathbb{R}^n .

Proposizione 270 Per ogni forma bilineare

$$\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

esiste una ed una sola matrice A tale che ϕ coincida con la forma bilineare definita nell'esempio precedente, cioè

$$\phi((X, Y)) = X^t A Y$$

Tralasciamo la dimostrazione.

Proposizione 271 Sia ϕ una forma bilineare definita su uno spazio vettoriale V di dimensione n e sia \mathcal{B} una base di V . Allora esiste una ed una sola matrice A tale che per ogni coppia (\mathbf{v}, \mathbf{w}) di vettori di V , detti X e Y i rispettivi vettori delle componenti, si abbia

$$\phi((\mathbf{v}, \mathbf{w})) = X^t A Y .$$

Tralasciamo i dettagli della dimostrazione (che peraltro è abbastanza immediata sulla base della proposizione precedente).

Definizione 272 Nella situazione della proposizione precedente, la matrice A è detta matrice associata a ϕ rispetto alla base \mathcal{B} .

Osservazione 273 Se $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ è la base standard di \mathbb{R}^n ed A è una matrice quadrata di ordine n , si vede facilmente che per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$ si ha

$$a_{ij} = \mathbf{e}_i^t A \mathbf{e}_j .$$

Dall'osservazione ora fatta si deduce facilmente che la matrice A associata ad una forma bilineare ϕ rispetto ad una base $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è data da

$$a_{ij} = \phi((\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)) .$$

Proposizione 274 Sia ϕ una forma bilineare definita su uno spazio vettoriale V di dimensione n , siano \mathcal{B} e \mathcal{B}' basi di V , siano A ed A' le matrici associate a ϕ rispetto a tali basi e sia infine B la matrice del cambio di base da \mathcal{B} a \mathcal{B}' .

Allora si ha

$$A = B^t A' B .$$

Tralasciamo la dimostrazione (si noti la differenza con l'Osservazione 208).

Definizione 275 Due matrici A ed A' si dicono congruenti se esiste una matrice invertibile B tale che

$$A = B^t A' B .$$

Proposizione 276 Matrici congruenti hanno lo stesso rango.

Tralasciamo la dimostrazione.

Come conseguenza abbiamo che tutte le matrici associate ad una stessa forma bilineare hanno lo stesso rango.

Definizione 277 Il rango di una forma bilineare definita su uno spazio vettoriale V di dimensione n è il rango delle matrici ad essa associate. Una forma bilineare su V si dice degenerare se il suo rango è minore di n .

43 Forme quadratiche

Definizione 278 Sia $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare su uno spazio vettoriale V . L'applicazione

$$q : V \rightarrow \mathbb{R}$$

data da

$$q(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} b(\mathbf{v}, \mathbf{v}) .$$

si dice forma quadratica su V .

Esempio 279 Siccome il prodotto scalare di vettori liberi è una forma bilineare, l'applicazione che ad ogni vettore libero associa il quadrato del suo modulo è una forma quadratica.

Esempio 280 Siccome il prodotto scalare standard di vettori numerici è una forma bilineare, l'applicazione che ad ogni vettore numerico di ordine n associa la somma dei quadrati delle sue componenti è una forma quadratica su \mathbb{R}^n .

Esempio 281 Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

e sia b la forma bilineare su \mathbb{R}^2 data da

$$b(X, Y) = X^t A Y .$$

Allora b dà luogo alla forma quadratica $q(\mathbf{v}) = b(\mathbf{v}, \mathbf{v})$. Un'espressione esplicita per q è

$$q((x, y)) = 2x^2 + 2xy + 6y^2 .$$

La forma q è dunque descritta da un polinomio di secondo grado in due variabili, che è inoltre un polinomio omogeneo (cioè tutti i monomi hanno lo stesso grado).

Non è difficile rendersi conto che qualunque forma quadratica su \mathbb{R}^n è descritta da un polinomio omogeneo di secondo grado in n variabili. Inoltre, usando la coordinazione rispetto ad una base, una forma quadratica su un qualunque spazio vettoriale finitamente generato può essere descritta tramite un polinomio omogeneo di secondo grado.

Osservazione 282 Sia b una forma bilineare antisimmetrica su uno spazio vettoriale V sui reali. Allora per ogni $\mathbf{v} \in V$ si ha

$$b(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = -b(\mathbf{v}, \mathbf{v}) ,$$

dunque $b(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$. Quindi la forma quadratica data da $q(\mathbf{v}) = b(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ si riduce all'applicazione che associa 0 ad ogni vettore.

L'esempio di sopra mostra che diverse forme bilineari possono dare luogo alla stessa forma quadratica (basta considerare una forma antisimmetrica non nulla e la forma bilineare nulla).

Proposizione 283 *Sia q una forma quadratica su uno spazio vettoriale V sui reali, e consideriamo l'applicazione*

$$s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

definita da

$$s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2} (q(\mathbf{v} + \mathbf{w}) - q(\mathbf{v}) - q(\mathbf{w})) .$$

Allora s è una forma bilineare simmetrica.

Inoltre per ogni $\mathbf{v} \in V$ si ha

$$q(\mathbf{v}) = s(\mathbf{v}, \mathbf{v}) .$$

Dimostrazione. Siccome q è una forma quadratica, deve essere data da

$$q(\mathbf{v}) = b(\mathbf{v}, \mathbf{v})$$

per qualche forma bilineare b . Dunque (tenendo presente che b è bilineare) otteniamo che per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha

$$s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2} (b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{w}, \mathbf{v})) .$$

Da questa formula, poiché b è bilineare, si ottiene subito che s è bilineare e che soddisfa la formula

$$q(\mathbf{v}) = s(\mathbf{v}, \mathbf{v}) .$$

Inoltre, s è evidentemente simmetrica (discende subito, sia dalla definizione, sia dalla relazione con b).

Definizione 284 *Nella situazione della proposizione precedente, si dice che la forma s è ottenuta da q per polarizzazione.*

Se b è una forma bilineare su V , si dice che la forma bilineare simmetrica data da

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \frac{1}{2} (b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{w}, \mathbf{v}))$$

è ottenuta da b per simmetrizzazione.

Se V è finitamente generato e \mathcal{B} è una sua base, la matrice associata ad s rispetto a \mathcal{B} si dice anche matrice associata a q rispetto a \mathcal{B} .

La forma quadratica q si dirà degenerare se s è degenerare.

Proposizione 285 *Sia q una forma quadratica su uno spazio finitamente generato V . Allora esiste una base \mathcal{B} di V tale che la matrice associata a q sia una matrice diagonale i cui termini appartengono tutti all'insieme $\{-1, 0, 1\}$.*

Tralasciamo i dettagli della (facile) dimostrazione. L'idea fondamentale consiste nel cosiddetto "completamento dei quadrati", di cui un'esempio è il seguente:

$$4x^2 + 6xy + 3y^2 = (2x + \frac{3}{2}y)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}y)^2 .$$

Un'altra dimostrazione si può ottenere usando la diagonalizzazione ortogonale. Infatti la matrice associata a q , essendo simmetrica, è ortogonalmente diagonalizzabile. Dunque esiste una matrice ortogonale B e una matrice diagonale D tali che

$$A = B^{-1}DB .$$

Poiché B è ortogonale, si ha

$$A = B^tDB .$$

Se ora \mathcal{B}' è la matrice tale che la matrice del cambio di base da \mathcal{B} a \mathcal{B}' sia B , otteniamo che D è la matrice associata a q rispetto a \mathcal{B}' . Abbiamo così rappresentato q con una matrice diagonale, e sulla diagonale ci sono proprio gli autovalori di A . A questo punto, per ottenere che i termini appartengano tutti all'insieme $\{-1, 0, 1\}$, basta considerare la base \mathcal{B}'' ottenuta dividendo gli autovettori della base \mathcal{B}' relativi ad autovalori non nulli per la radice quadrata del valore assoluto di detti autovalori.

Proposizione 286 *Sia A la matrice associata ad una forma quadratica q , e sia A' un'altra matrice associata a q , che sia però diagonale e con tutti i termini appartenenti all'insieme $\{-1, 0, 1\}$. Allora il numero di termini di A' uguali a 1 (cioè il numero di indici i tali che $a'_{ii} = 1$) è uguale alla somma delle molteplicità algebriche degli autovalori positivi di A , e il numero di termini di A' uguali a -1 è uguale alla somma delle molteplicità algebriche degli autovalori negativi di A .*

Tralasciamo la dimostrazione.

Osservazione 287 *Dalla proposizione precedente segue subito che se due matrici diagonali A ed A' hanno i termini tutti appartenenti all'insieme $\{-1, 0, 1\}$, e se esse rappresentano una stessa forma quadratica su uno spazio V , rispetto ad opportune basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' , allora il numero di termini di A uguali ad 1 è uguale al numero di termini di A' uguali ad 1, e il numero di termini di A uguali a -1 è uguale al numero di termini di A' uguali a -1 .*

Definizione 288 *Sia q una forma quadratica e sia A una matrice associata a q che sia diagonale e con tutti i termini appartenenti all'insieme $\{-1, 0, 1\}$. Se p è il numero di termini di A uguali ad 1 ed n è il numero di termini di A uguali a -1 , allora la coppia (p, n) si dice *segnatura* di q .*

Dalle cose dette segue subito che se q è una forma quadratica su uno spazio finitamente generato V sui reali e se la segnatura di q è (p, n) , allora esiste una base \mathcal{B} tale che, dette (x_1, \dots, x_m) le componenti di un qualunque vettore $\mathbf{v} \in V$ si ha:

$$q(\mathbf{v}) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+n}^2 .$$

Tale espressione viene detta *forma canonica* di q .

44 Coniche

Definizione 289 Sia π un piano, siano F_1 ed F_2 punti di π e sia a un numero reale tale che

$$a > \frac{1}{2}d(F_1, F_2).$$

L'insieme

$$E = \{P \in \pi : d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$$

si chiama ellisse di fuochi F_1, F_2 e semiasse maggiore a .

Osservazione 290 Un'ellisse con i fuochi coincidenti si riduce ad una circonferenza.

Proposizione 291 Sia E un'ellisse in un piano π , di fuochi F_1, F_2 e semiasse maggiore a . Sia $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ un riferimento monometrico ortogonale in π con origine uguale al punto medio di F_1, F_2 e con versore \mathbf{i} parallelo al vettore $F_2 - F_1$ (cioè con l'asse x contenente i fuochi). Allora un punto P di coordinate (x, y) appartiene ad E se e solo se

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

con

$$b^2 = a^2 - \left(\frac{1}{2}d(F_1, F_2)\right)^2.$$

Tralasciamo la dimostrazione.

Definizione 292 Sia π un piano, siano F_1 ed F_2 punti di π e sia a un numero reale tale che

$$0 < a < \frac{1}{2}d(F_1, F_2).$$

L'insieme

$$I = \{P \in \pi : |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$$

si chiama iperbole di fuochi F_1, F_2 e semiasse a .

Proposizione 293 Sia I un'iperbole in un piano π , di fuochi F_1, F_2 e semiasse a . Sia $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ un riferimento monometrico ortogonale in π con origine uguale al punto medio di F_1, F_2 e con versore \mathbf{i} parallelo al vettore $F_2 - F_1$. Allora un punto P di coordinate (x, y) appartiene ad I se e solo se

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

con

$$b^2 = \left(\frac{1}{2}d(F_1, F_2)\right)^2 - a^2.$$

Tralasciamo la dimostrazione.

Definizione 294 Sia π un piano, sia F un punto ed r una retta contenuti in π , con $F \notin r$. L'insieme

$$C = \{P \in \pi : d(P, F) = d(P, r)\}$$

si chiama parabola di fuoco F e direttrice r .

Proposizione 295 Sia C una parabola in un piano π , di fuoco F e direttrice r . Detta H la proiezione ortogonale di F su r , sia $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ un riferimento monometrico ortogonale in π con origine uguale al punto medio di F ed H e con versore \mathbf{i} parallelo e concorde ad $F - H$. Allora un punto P di coordinate (x, y) appartiene a C se e solo se

$$2px - y^2 = 0,$$

con

$$p = d(F, r).$$

Tralasciamo la dimostrazione.

Osservazione 296 Abbiamo visto che ellissi, iperboli e parabole sono tutte rappresentate, in opportuni riferimenti, da equazioni di secondo grado in due variabili. Tenendo presenti le formule del cambio di riferimento (cfr. Proposizione 164), che sono date da polinomi di primo grado, si ha che in un riferimento qualunque, ellissi iperboli e parabole sono ancora rappresentate da equazioni di secondo grado.

Definizione 297 Consideriamo un polinomio in due variabili di grado 2, cioè una funzione

$$p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

del tipo

$$(x, y) \longmapsto ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, a, b, c non tutti nulli.

Fissato un riferimento di un piano, chiameremo conica l'insieme Γ di tutti i punti le cui coordinate sono soluzioni dell'equazione

$$p(x, y) = 0.$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}$$

si dice matrice associata a p , o anche matrice associata a Γ .

Esempio 298 Fissato un riferimento in un piano, consideriamo il polinomio p dato da

$$p(x, y) = xy .$$

La conica rappresentata dall'equazione $p(x, y) = 0$ è chiaramente l'unione dei due assi del riferimento. La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Osservazione 299 Sia A la matrice associata ad un polinomio p in due variabili di grado minore o uguale a 2, e sia q la forma quadratica su \mathbb{R}^3 data da

$$q(X) = X^t A X$$

(considerando i vettori $X \in \mathbb{R}^3$ come matrici colonna).

Allora si ha

$$p(x, y) = q(x, y, 1) .$$

Molte proprietà della conica di equazione $p(x, y) = 0$ possono essere dedotte dalle proprietà della forma quadratica q . Altre importanti informazioni possono essere dedotte da un'altra forma quadratica su \mathbb{R}^2 che si può associare a p .

Osservazione 300 Siano p , q ed A come nell'osservazione precedente. L'applicazione

$$q' : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

data da

$$q'(x, y) = q(x, y, 0) .$$

è una forma quadratica: infatti posto $A' = A_{\{1,2\},\{1,2\}}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, si ha

$$q'(x, y) = X^t A' X .$$

Notiamo inoltre che se p è dato da

$$(x, y) \mapsto ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

allora q' è dato da

$$(x, y) \mapsto ax^2 + bxy + cy^2 ,$$

cioè dai termini di secondo grado del polinomio p .

Proposizione 301 Siano p , q e q' come prima, e sia Γ la conica data dall'equazione

$$p(x, y) = 0 .$$

Allora Γ è un'ellisse, un'iperbole o una parabola se e solo se q è non degenera e Γ è non vuota. Inoltre in tal caso si ha:

- Γ è un'ellisse \iff la segnatura di q' è $(2, 0)$ o $(0, 2)$
- Γ è un'iperbole \iff la segnatura di q' è $(1, 1)$
- Γ è una parabola \iff la segnatura di q' è $(1, 0)$ o $(0, 1)$

Tralasciamo la dimostrazione.

È anche utile la seguente proposizione.

Proposizione 302 *Siano p , q e q' come prima, e sia Γ la conica data dall'equazione*

$$p(x, y) = 0 .$$

Se q è non degenera e la segnatura di q' è $(1, 0)$, o $(0, 1)$, oppure $(1, 1)$, allora Γ è non vuota.

Nello spazio, gli insiemi rappresentati da equazioni di secondo grado in tre variabili si chiamano *quadriche*. Lo studio delle quadriche è analogo a (ma più ricco di) quello delle coniche: lo strumento principale per tale studio sono ancora le forme quadratiche. Tale studio non presenta dunque nessuna particolare difficoltà.

Le condizioni espresse nella Proposizione 301, utili al riconoscimento del tipo di conica, sono espresse in termini di segnatura, in quanto questa forma è quella che, generalizzata per le dimensioni superiori, permette una migliore classificazione. Nel caso delle coniche (e solo in questo caso), detta A' la matrice associata a q' (cioè $A' = A_{\{1,2\},\{1,2\}}$, con A matrice associata a q), queste condizioni sulla segnatura di q' sono equivalenti alle seguenti, più semplici:

- Γ è un'ellisse $\iff |A'| > 0$
- Γ è un'iperbole $\iff |A'| < 0$
- Γ è una parabola $\iff |A'| = 0$

45 Tensori

Questo paragrafo contiene materiale facoltativo ai fini dell'esame.

Abbiamo visto che un'applicazione bilineare

$$V \times V' \rightarrow W$$

può essere considerata come una specie di “prodotto esterno”. Per alcuni spazi esistono degli esempi molto naturali di tali prodotti, per altri no. Un po' come succede per la costruzione dei numeri negativi a partire dai naturali, o per la costruzione dei complessi a partire dai reali, è comodo “inventare” nuovi oggetti che possano essere considerati come prodotti di un vettore di uno spazio V per un vettore di un altro spazio W (salvo poi ad accorgersi, talvolta, che gli oggetti ottenuti non sono poi tanto nuovi). Vediamo di precisare tecnicamente questo discorso.

Definizione 303 (facoltativa). Siano V e W spazi vettoriali. Un prodotto tensoriale di V e W è una coppia

$$(T, t)$$

dove T è uno spazio vettoriale e

$$t : V \times W \rightarrow T$$

è un'applicazione bilineare che soddisfa le seguenti condizioni:

1. per ciascun sistema linearmente indipendente $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di V e ciascun sistema linearmente indipendente $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ di vettori di W , il sistema costituito da tutti gli $n \times m$ vettori $t(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j)$ (presi in un ordine qualunque) è ancora linearmente indipendente;
2. ogni vettore di T si può scrivere come combinazione lineare di vettori del tipo $t(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ con $\mathbf{v} \in V$ e $\mathbf{w} \in W$.

Per semplicità, spesso si dice semplicemente che T è un prodotto tensoriale di V e W (lasciando t sottinteso). Un vettore del tipo $t(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ viene denotato con

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} .$$

Uno spazio prodotto tensoriale T viene in genere denotato con

$$V \otimes W .$$

Dalla proprietà (2), e dal fatto che t è bilineare, ogni elemento del prodotto tensoriale può essere scritto come una somma

$$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w}_1 + \dots + \mathbf{v}_s \otimes \mathbf{w}_s ,$$

con $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s \in V$ e $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s \in W$. Parlando informalmente, il prodotto tensoriale di un vettore di V per un vettore di W è un oggetto nuovo, un po' come la radice quadrata di un numero negativo è un numero nuovo rispetto ai numeri reali. Così come le radici quadrate di numeri negativi non sono i soli numeri complessi possibili, i quali sono in generale somme del tipo $x + iy$, i prodotti tensoriali di un vettore di V per un vettore di W non sono gli unici elementi possibili di $V \otimes W$: bisogna considerare anche le somme.

Si può dimostrare facilmente che uno spazio prodotto tensoriale di V e W esiste sempre. Anzi, gli spazi prodotto tensoriale di V e W sono molti.

Osservazione 304 (facoltativa). Se (T, t) è un prodotto tensoriale di V e W e $f : T \rightarrow T'$ è un isomorfismo, allora anche $(T', f \circ t)$ è un prodotto tensoriale di V e W .

La proprietà principale di uno spazio prodotto tensoriale è la seguente.

Proposizione 305 (facoltativa). Sia $\phi : V \times W \rightarrow S$ un'applicazione bilineare. Allora esiste una ed una sola applicazione lineare

$$f : V \otimes W \rightarrow S$$

tale che per ogni $\mathbf{v} \in V$ e $\mathbf{w} \in W$ si abbia

$$f(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = \phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Proposizione 306 (facoltativa). Siano (T, t) e (T', t') due prodotti tensoriali di V e W . Allora esiste uno ed un solo isomorfismo

$$f : T \rightarrow T'$$

tale che

$$t' = f \circ t.$$

Tralasciamo la dimostrazione.

La proposizione ora vista mostra che due diversi prodotti tensoriali di V e W sono sempre isomorfi tra loro, e che inoltre, presi due qualunque vettori $\mathbf{v} \in V$ e $\mathbf{w} \in W$, il prodotto

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$$

in T e il prodotto

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$$

in T' si corrispondono.

Dunque, anche se il prodotto tensoriale di V e W non è unico, possiamo dire che è "unico a meno di un isomorfismo compatibile con l'operazione \otimes ".

Esempio 307 (facoltativo). Consideriamo l'applicazione

$$t : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$$

che a ciascuna coppia di vettori

$$\left((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_n) \right)$$

associa la matrice A data da

$$a_{ij} = x_i y_j.$$

Allora

$$(\mathbb{R}^{m \times n}, t)$$

è un prodotto tensoriale di \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n :

$$\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Tralasciamo i (semplici) dettagli dimostrativi.

Esempio 308 (facoltativo). Consideriamo l'applicazione

$$t : V^\vee \times W \rightarrow \text{Hom}(V, W)$$

che a ciascuna coppia

$$(\ell, \mathbf{w})$$

associa l'applicazione lineare

$$V \rightarrow W$$

data da

$$\mathbf{v} \mapsto \ell(\mathbf{v})\mathbf{w} .$$

Allora

$$(\text{Hom}(V, W), t)$$

è un prodotto tensoriale di V^\vee e W :

$$V^\vee \otimes W = \text{Hom}(V, W) .$$

Esempio 309 (facoltativo). Sia V uno spazio vettoriale e sia $\text{Bil } V$ l'insieme delle forme bilineari su V . Poiché gli elementi di $\text{Bil } V$ sono funzioni a valori reali, restano definite la somma di elementi di $\text{Bil } V$ e la moltiplicazione di elementi di $\text{Bil } V$ per un numero reale (vedi Definizione 66 a pag. 26 degli appunti di Geometria I). Non è difficile dimostrare che tali operazioni danno come risultati ancora elementi di $\text{Bil } V$, e che danno luogo ad una struttura di spazio vettoriale su $\text{Bil } V$.

Se ora definiamo un'applicazione

$$t : V^\vee \times V^\vee \longrightarrow \text{Bil } V$$

ponendo, per ogni $\ell_1, \ell_2 \in V^\vee$ e per ogni $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$

$$t(\ell_1, \ell_2)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \ell_1(\mathbf{v}_1) \cdot \ell_2(\mathbf{v}_2) ,$$

non è difficile dimostrare che

$$(\text{Bil } V, t)$$

è un prodotto tensoriale:

$$\text{Bil } V = V^\vee \otimes V^\vee .$$

Più in generale, non è difficile dimostrare che l'insieme delle applicazioni bilineari

$$V \times V' \rightarrow W$$

è uno spazio vettoriale, e che tale spazio è un prodotto tensoriale

$$(V^\vee \otimes V'^\vee) \otimes W .$$

Proposizione 310 (facoltativa). Siano V, V' e V'' spazi vettoriali. Allora un prodotto tensoriale

$$(V \otimes V') \otimes V''$$

è anche un prodotto tensoriale

$$V \otimes (V' \otimes V'')$$

(ma con una differente forma bilineare), tale che per ogni $\mathbf{v} \in V, \mathbf{v}' \in V'$ e $\mathbf{v}'' \in V''$ si ha

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}') \otimes \mathbf{v}'' = \mathbf{v} \otimes (\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'') .$$

Tralasciamo la dimostrazione.

Definizione 311 (facoltativa) Sia V uno spazio vettoriale e siano $a, b \in \mathbb{N}_0$. Un tensore di tipo (a, b) di V è un elemento del prodotto tensoriale

$$\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_a \text{ volte} \otimes \underbrace{V^\vee \otimes \cdots \otimes V^\vee}_b \text{ volte}$$

L'Esempio 308 mostra che i tensori di tipo $(1, 1)$ corrispondono agli endomorfismi di V , mentre i tensori di tipo $(0, 2)$ corrispondono alle forme bilineari. I tensori di tipo $(1, 2)$ corrispondono ad applicazioni bilineari

$$V \times V \rightarrow V$$

(ad esempio, si pensi al prodotto vettoriale nello spazio dei vettori liberi). I tensori di tipo $(2, 0)$ sono invece sostanzialmente oggetti di tipo nuovo (rispetto a quelli che conosciamo già).

Come succede per le componenti dei vettori, è utile saper dare una descrizione numerica dei tensori. Ovviamente, siccome i prodotti tensoriali sono a loro volta spazi vettoriali, è possibile fissare una base e ottenere le componenti. Ma questo non è ancora del tutto soddisfacente: c'è infatti una maniera per associare dei dati numerici ai tensori di uno spazio V , semplicemente fissando una base in V . Stavolta però i numeri ottenuti non vanno “organizzati” in una n -pla, ma in qualcosa di un po' più articolato. Per rendersene conto, basta ricordare che agli endomorfismi (tensori $(1, 1)$) e alle forme bilineari (tensori $(0, 2)$) sono associate delle matrici. Le matrici non bastano ancora, però. Infatti, consideriamo un'applicazione bilineare

$$\phi : V \times V \rightarrow V$$

(tensore di tipo $(1, 2)$). Se ad esempio $V = \mathbb{R}^n$, la Proposizione 147 implica che per descrivere ϕ ci vogliono n forme bilineari su \mathbb{R}^n : è necessaria quindi una n -pla di matrici, il che corrisponde ad una “matrice con tre indici” (se si vuole, si pensi ad una matrice “cubica”, anche se questo non ha molta utilità pratica).

Per trattare numericamente un qualunque tensore, diamo dunque la seguente definizione.

Definizione 312 (facoltativa). Siano $m, n \in \mathbb{N}$ e sia $I_n = \{1, \dots, n\}$. Un tensore numerico è un'applicazione

$$\underbrace{I_n \times \dots \times I_n}_{m \text{ volte}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Un tale tensore verrà indicato con una lettera maiuscola, ad esempio

$$A$$

e il corrispondente di una m -pla di indici (i_1, \dots, i_m) (compresi tra 1 ed n) verrà indicato con la stessa lettera, ma in minuscolo, affetta da pedici o apici:

$$a_{i_1, \dots, i_m}.$$

Per ogni fissata scelta di m, n , l'insieme dei tensori numerici del tipo ora descritto verrà indicato con

$$\mathbb{R}^{(n^m)}$$

Proposizione 313 (facoltativa). Si ha

$$\mathbb{R}^{(n^m)} = \underbrace{\mathbb{R}^n \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^n}_{m \text{ volte}}$$

Inoltre se V è uno spazio vettoriale di dimensione n e \mathcal{B} è una sua base, allora esiste uno ed un solo isomorfismo tra lo spazio dei tensori di tipo (a, b) di V e lo spazio dei tensori numerici $\mathbb{R}^{(n^m)}$ con $m = a+b$, tale che per ogni $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_a \in V$ e $\ell_1, \dots, \ell_b \in V^\vee$ il corrispondente di

$$\mathbf{v}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_a \otimes \ell_1 \otimes \dots \otimes \ell_b$$

è

$$c_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}_1) \otimes \dots \otimes c_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}_a) \otimes c_{\mathcal{B}^\vee}(\ell_1) \otimes \dots \otimes c_{\mathcal{B}^\vee}(\ell_b).$$

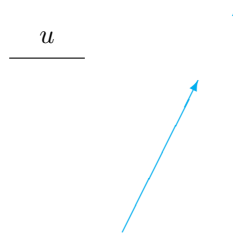
Dunque, fissata una base di V , ad ogni tensore di tipo (a, b) di V risulta associato un tensore numerico in $\mathbb{R}^{(n^{(a+b)})}$. In genere, per denotare le componenti di tale tensore, conviene mettere ad apice i primi a indici, e a pedice i rimanenti b . Lasciamo come esercizio (facoltativo) al lettore interessato, di dedurre le formule del cambio di base, e di verificare che coincidono con quelle che si usano nella definizione “classica” dei tensori.

Un'ultima informazione che può essere utile è la seguente. In fisica matematica sono molto usati i “campi vettoriali”, cioè funzioni definite su un dominio di punti e a valori vettoriali (tali valori è conveniente immaginarseli come vettori infinitesimi applicati nei punti a cui corrispondono). Molto spesso si usa la parola “vettore” per significare in realtà un campo vettoriale. Tenendo presente la Proposizione 147, tali campi possono essere descritti da n -ple di funzioni. Allo stesso modo, la parola “tensore” spesso denota un campo tensoriale, cioè una funzione a valori tensoriali (che quindi risulta descritta da un complesso di funzioni, affette da apici e pedici).

46 Esempi di prove d'esame

Esempio 314 Entro due ore e mezza, si risponda ai quesiti da 1 a 8 e ci si prepari ad esporre oralmente le dimostrazioni richieste nei punti 9 e 10. Se si vuole, si risponda anche al quesito 11. È permesso consultare gli appunti delle lezioni. Sono a disposizione righello numerato e squadretta per i quesiti "grafici".

1. Fissata l'unità di misura u indicata, calcolare il prodotto scalare dei vettori liberi rappresentati dai segmenti orientati disegnati qui sotto.



[2 punti]

2. Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, sia \mathbf{u} il vettore di componenti $(2, 4, 5)$ e \mathbf{v} il vettore di componenti $(2, 0, 1)$. Calcolare le componenti del prodotto vettoriale

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} .$$

[2 punti]

3. Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, sia r la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$$

e sia π il piano di equazione

$$2x - y + 3z + 9\sqrt{2} = 0 .$$

La retta r e il piano π sono paralleli? Sono ortogonali? [2 punti]

4. Fissato nello spazio un riferimento, siano r ed s rappresentate da

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases} .$$

Si dica se esiste una retta passante per il punto di coordinate $(1, 1, 1)$ ed incidente sia r che s , e in caso affermativo la si rappresenti (suggerimento:

per essere incidente, la retta voluta deve essere complanare sia con r che con s ; conviene quindi cercare l'intersezione di due opportuni piani, e controllare che non sia parallela a nessuna delle due rette date). [4 punti]

5. Sia

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

l'applicazione data da

$$(x, y, z) \xrightarrow{f} (x + y - 2z, 3y).$$

Dire se f è un'applicazione lineare, motivando la risposta. In caso affermativo, scrivere la matrice associata ad f rispetto alle basi

$$\mathcal{B} = ((2, 1, 3), (0, 1, 0), (1, 1, 2)) \quad e \quad \mathcal{B}' = ((1, 1), (0, 2)).$$

[4 punti]

6. Sia

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

l'applicazione lineare data da

$$(x, y, z) \xrightarrow{f} (x + 2y - z, 3y + z, x + 5y, x + 8y + z).$$

trovare una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f . [4 punti]

7. Dire (motivando la risposta) se la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile.

[3 punti]

8. Sia \mathcal{V} lo spazio dei vettori liberi, siano fissate un'orientazione e un'unità di misura e sia $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ una base ortonormale concorde all'orientazione fissata. Trovare la matrice associata alla forma bilineare

$$\phi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

data da

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \xrightarrow{\phi} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{i}) \cdot \mathbf{v},$$

rispetto alla base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

[3 punti]

9. Sia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ un riferimento dello spazio e sia π un piano. Dimostrare che esistono $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che, se P è un qualunque punto dello spazio e (x, y, z) sono le sue coordinate, si ha

$$P \in \pi \iff ax + by + cz + d = 0.$$

Dimostrare inoltre che a, b, c non possono essere tutti nulli.

[3 punti]

10. Dimostrare che il nucleo di un'applicazione lineare è un sottospazio vettoriale del dominio. [3 punti]
11. Sia P un punto ed r una retta. Dimostrare che esiste uno ed un solo piano passante per P ed ortogonale ad r . [3 punti]

Risposte:

1. 4.
2. (4,8,-8).
3. Paralleli sì, ortogonali no.
4. Esiste, ed è

$$r : \begin{cases} -x + y + z - 1 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

(sono ovviamente possibili anche altre rappresentazioni della stessa retta).

5. È lineare e la matrice è

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

6. Base del nucleo:

$$((-5, 1, -3)).$$

Base dell'immagine:

$$((1, 0, 1, 1), (2, 3, 5, 8)).$$

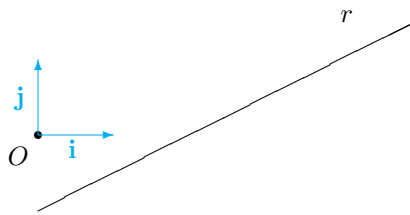
7. La matrice è diagonalizzabile.

- 8.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esempio 315 Entro due ore e mezza, si risponda ai quesiti da 1 a 8 e ci si prepari ad esporre oralmente le dimostrazioni richieste nei punti 9 e 10. Se si vuole, si risponda anche al quesito 11. È permesso consultare gli appunti delle lezioni. Sono a disposizione righello numerato e squadretta per i quesiti "grafici".

1. Trovare (con ragionevole precisione) i coseni direttori della retta r rappresentata qui di seguito, rispetto al riferimento monometrico ortogonale levogiro $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, dove \mathbf{i} e \mathbf{j} sono rappresentati dai segmenti orientati disegnati qui di seguito.



[2 punti]

2. Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, sia \mathbf{u} il vettore di componenti $(2, 0, 5)$ e \mathbf{v} il vettore di componenti $(0, 1, 1)$. Calcolare le componenti del prodotto vettoriale

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} .$$

[2 punti]

3. Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, sia π il piano di equazione

$$x + 2y + 2z + 14 = 0$$

e sia σ il piano di equazione

$$2x + 4y + 4z + 14 = 0 .$$

I piani π e σ sono paralleli? Sono ortogonali?

[2 punti]

4. Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, sia P il punto di coordinate $(1, 2, 1)$ e π il piano di equazione

$$2x - y + z + 2 = 0 .$$

Scrivere delle equazioni parametriche della retta r perpendicolare a π e passante per P e un'equazione cartesiana del piano contenente r e parallelo al vettore di componenti $(1, 1, 1)$.

[4 punti]

5. Trovare la matrice di passaggio dalla base standard di \mathbb{R}^3 alla base

$$\mathcal{B} = ((2, 5, 2), (1, 3, 1), (0, 1, 1))$$

(suggerimento: conviene trovare prima la matrice inversa).

[4 punti]

6. Sia f l'unica applicazione lineare

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tale che

$$f(1, 1) = (2, -1, 0), \quad f(2, 1) = (5, 4, 3) .$$

Calcolare

$$f(-5, 4) .$$

[4 punti]

7. Dire (motivando la risposta) se l'endomorfismo

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

dato da

$$(x, y) \xrightarrow{f} (0, x)$$

è diagonalizzabile.

[3 punti]

8. Fissato nel piano un riferimento, sia Γ la conica di equazione

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x = 0$$

Dire se Γ è un'ellisse, un'iperbole, una parabola, o nessuna di queste.

[3 punti]

9. Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare tra spazi finitamente generati e sia

A la matrice associata rispetto alle basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' . Dimostrare che

$$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rk} A,$$

dove $\operatorname{rk} A$ indica il rango di A .

[3 punti]

10. Dimostrare che due vettori liberi \mathbf{v} e \mathbf{w} sono ortogonali se e solo $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

[3 punti]

11. Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare tra spazi finitamente generati, sia \mathcal{B} una base di V , sia \mathcal{B}' una base di W e sia A la matrice associata ad f rispetto a tali basi. Dimostrare che la matrice associata ad f^\vee rispetto a \mathcal{B}'^\vee e \mathcal{B}^\vee è A^t .

[3 punti]

Risposte:

1.

$$\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0 \right).$$

(oppure gli opposti); si accettano anche valori approssimati.

2. $(-5, -2, 2)$.

3. Paralleli sì, ortogonali no.

4.

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases},$$

$$2x + y - 3z - 1 = 0.$$

5.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

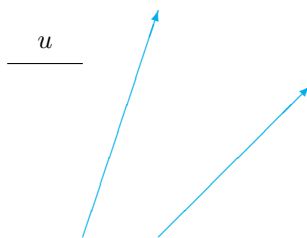
6. $(-19, -49, -27)$.

7. Non è diagonalizzabile.

8. Parabola.

Esempio 316 Entro due ore e mezza, si risponda ai quesiti da 1 a 8 e ci si prepari ad esporre oralmente le dimostrazioni richieste nei punti 9 e 10. Se si vuole, si risponda anche al quesito 11. È permesso consultare gli appunti delle lezioni. Sono a disposizione righello numerato e squadretta per i quesiti “grafici”.

1. Fissata l'unità di misura u indicata e un'orientazione dello spazio, calcolare il modulo del prodotto vettoriale dei vettori liberi rappresentati dai segmenti orientati disegnati qui di seguito.



[2 punti]

2. Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, trovare i coseni direttori della retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = \sqrt{2} - 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

[2 punti]

3. Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, siano r ed s rappresentate da

$$r : \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 - t \\ z = 2 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4t \\ z = 1 - t \end{cases} .$$

Le rette r ed s sono parallele? Sono ortogonali?

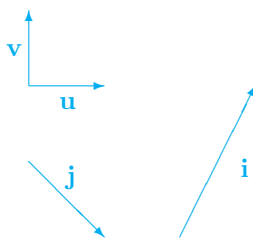
[2 punti]

4. Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, sia r la retta di equazioni

$$\begin{cases} x - y + 3z - 2 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

e sia P il punto di coordinate $(2, -1, 0)$. Scrivere un'equazione cartesiana del piano contenente r e P (suggerimento: oltre al metodo solito, che usa un punto e due vettori, se si preferisce si può anche ragionare osservando che ogni combinazione lineare dei due piani dati dalle equazioni di r contiene ancora r ; dunque si può cercare di determinare i coefficienti imponendo il passaggio per P). Inoltre, scrivere l'equazione della retta passante per P e ortogonale al piano trovato. [4 punti]

5. Sia W lo spazio direttore del piano contenente il presente foglio. Scrivere la matrice del cambio di base da (\mathbf{i}, \mathbf{j}) a (\mathbf{u}, \mathbf{v}) , dove tali vettori sono rappresentati dai segmenti orientati disegnati qui di seguito.



[4 punti]

6. Sia

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

l'applicazione lineare data da

$$(x, y, z) \xrightarrow{f} (x + 2y - z, 2x + 4y - 2z, 0).$$

Trovare una base ortonormale del nucleo di f e la dimensione dell'immagine di f . [4 punti]

7. Trovare autovalori ed autovettori dell'endomorfismo di \mathbb{R}^2 dato da

$$(x, y) \longmapsto (x + 3y, x - y)$$

e dire se è diagonalizzabile (motivando la risposta). [3 punti]

8. Fissato un riferimento in un piano, trovare due numeri reali a e b tali che l'equazione

$$ax^2 + bxy + y^2 + bx = 0$$

rappresenti una parabola. [3 punti]

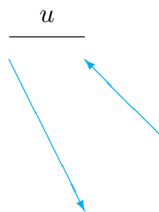
9. Dimostrare che un'applicazione lineare è iniettiva se e solo se il suo nucleo è $\{0\}$. [3 punti]
10. Sia W un sottospazio di \mathbb{R}^n . Dimostrare che l'insieme dei vettori ortogonali a tutti i vettori di W è un sottospazio di \mathbb{R}^n . [3 punti]
11. Sia π un piano, sia r una retta parallela a π e sia $P \in r$. Dimostrare che

$$d(r, \pi) = d(P, \pi)$$

[3 punti]

Esempio 317 Entro due ore e mezza, si risponda ai quesiti da 1 a 8 e ci si prepari ad esporre oralmente le dimostrazioni richieste nei punti 9 e 10. Se si vuole, si risponda anche al quesito 11. È permesso consultare gli appunti delle lezioni. Sono a disposizione righello numerato e squadretta per i quesiti "grafici".

1. Fissata l'unità di misura u indicata, determinare il prodotto scalare dei vettori liberi rappresentati dai segmenti orientati disegnati qui sotto.



[2 punti]

2. Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, siano \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} i vettori rispettivamente di componenti $(2, -1, 3)$, $(1, 0, 0)$ e $(2, 2, -4)$. Calcolare il prodotto misto

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} .$$

[2 punti]

3. Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, sia π il piano di equazione

$$x + y + z + 11 = 0$$

e sia σ il piano di equazione

$$2x + 2y - 4z = 0 .$$

- I piani π e σ sono paralleli? Sono ortogonali? [2 punti]

4. Fissato nello spazio un riferimento, si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3t \end{cases}.$$

Dire se r ed s sono sghembe o complanari, e rappresentare il piano contenente r e passante per il punto di s corrispondente a $t = 1$. [4 punti]

5. Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$, sia \mathbf{u} il vettore di componenti $(1, 2, 3)$ e sia r la retta passante per il punto di coordinate $(4, \sqrt{7}, \cos 1)$ e con vettore direzionale \mathbf{u} . Calcolare la matrice associata alla proiezione ortogonale vettoriale sullo spazio direttore di r , rispetto alle basi $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ed (\mathbf{u}) . [4 punti]

6. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dato da

$$(x, y) \mapsto (0, x)$$

Trovare una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f . [3 punti]

7. Trovare una base ortonormale di autovettori della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

[4 punti]

8. Fissato nel piano un riferimento, sia Γ la conica di equazione

$$x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$$

Dire se Γ è un'ellisse, un'iperbole, una parabola, o nessuna di queste. [3 punti]

9. Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Dimostrare che l'applicazione

$$W^\vee \rightarrow V^\vee$$

data da

$$\ell \mapsto \ell \circ f$$

è lineare.

[3 punti]

10. Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare biettiva. Dimostrare che l'applicazione inversa $f^{-1} : W \rightarrow V$ è lineare. [3 punti]

11. Siano r ed r' rette parallele e sia P un punto di r . Dimostrare che $d(r, r') = d(P, r')$. [3 punti]

Indice

1	Rappresentazione parametrica di una retta nello spazio	1
2	Rappresentazione parametrica di un piano	3
3	Equazione cartesiana di un piano	6
4	Rappresentazione cartesiana di una retta nello spazio	7
5	Condizioni di parallelismo	8
6	Richiami sugli angoli	11
7	“Angolo” tra due rette orientate e tra due vettori liberi	13
8	Ortogonalità tra vettori	14
9	Prodotto scalare tra vettori liberi	15
10	Esistenza di riferimenti ortogonali	17
11	Relazione tra prodotto scalare geometrico e numerico	19
12	Formula per il modulo di un vettore libero	20
13	Distanza tra due punti	20
14	Dimostrazione del teorema di Pitagora	21
15	Coseni direttori	21
16	Ortogonalità per i piani	23
17	Condizioni di ortogonalità	25
18	Esercizi riassuntivi di geometria analitica nello spazio.	26
19	Proiezioni ortogonali	33
20	Simmetrie ortogonali	36
21	Applicazioni lineari	37

22 Proprietà elementari delle applicazioni lineari	43
23 Isomorfismi	45
24 Nucleo e Immagine	46
25 Applicazioni lineari tra vettori numerici	48
26 Matrice associata	52
27 Cambio di base	55
28 Cambio di riferimento	56
29 Orientazione	57
30 Prodotto vettoriale	59
31 Determinanti e volumi	62
32 Distanza tra punti, rette e piani	64
33 Dimostrazione del teorema di Rouché-Capelli	69
34 Sistema omogeneo associato	69
35 Spazi di applicazioni lineari	71
36 Usi delle applicazioni lineari	74
37 Endomorfismi	75
38 Autovalori ed autovettori	76
39 Diagonalizzazione	79
40 Diagonalizzazione ortogonale	86
41 Applicazione trasposta	89
42 Applicazioni bilineari	91
43 Forme quadratiche	94
44 Coniche	97
45 Tensori	100

46 Esempi di prove d'esame

106