

Appunti del corso di Geometria I

Ingegneria Civile e Civile S.S. - A. A. 2003-2004

Dott. A. De Paris

1 Richiami

Assumeremo come note la nozione di *insieme* e la nozione di *funzione* (o *applicazione*) fra due insiemi. Una funzione è determinata dal suo *dominio*, dal suo *insieme di arrivo*, e dal fatto che ad ogni elemento del dominio essa assegna un elemento dell'insieme di arrivo. La notazione

$$f : X \rightarrow Y$$

indicherà che f è una funzione con dominio X e insieme di arrivo Y .

A differenza del corso di Analisi, l'insieme d'arrivo deve essere sempre specificato: per noi farà parte integrante della definizione di funzione. Inoltre, il dominio X per noi potrà anche essere vuoto. Infine, se $f : X \rightarrow Y$ è una funzione, l'insieme

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}$$

non verrà chiamato codominio di f , ma *insieme immagine* di f . Per evitare confusioni con la terminologia usata nel corso di Analisi, cercheremo di evitare del tutto l'uso del termine *codominio*; tuttavia, se proprio ci dovesse scappare, il codominio non sarà l'insieme immagine, ma l'insieme di arrivo.

Assumiamo poi come noti: le operazioni di intersezione, unione e differenza tra insiemi, la relazione di inclusione tra insiemi, i numeri reali, alcuni loro sottoinsiemi notevoli (naturali, interi, razionali), le operazioni sui numeri reali e la relazione d'ordine ($<$) tra numeri reali.

Riportiamo infine alcune abbreviazioni molto usate (non è necessario preoccuparsi di impararle a memoria):

= uguale a

\in appartiene a, appartenente a

\subseteq contenuto in

\subset contenuto strettamente in

\supseteq contenente

- \supset contenente strettamente
- \cup unito con
- \cap intersecato con
- \leq minore o uguale a
- $<$ minore di
- \geq maggiore o uguale a
- $>$ maggiore di
- \forall per ogni
- \exists esiste
- $:$ tale che
- \Rightarrow implica che
- \Leftrightarrow equivale a
- \mathbb{N} insieme dei numeri naturali (cioè interi positivi)
- \mathbb{Z} insieme dei numeri interi (relativi)
- \mathbb{Q} insieme dei numeri razionali
- \mathbb{R} insieme dei numeri reali

Sottolineiamo il fatto che l'insieme \mathbb{N} non contiene lo zero, essendo costituito dagli interi *positivi*. Volendo includere anche lo zero, cioè volendo considerare l'insieme degli interi *non negativi*, si userà la notazione \mathbb{N}_0 .

Definizione 1 Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione. La funzione f si dirà suriettiva se l'insieme immagine coincide con l'insieme d'arrivo, cioè se

$$f(X) = Y.$$

La funzione f si dirà iniettiva se elementi distinti hanno immagini distinte, cioè se vale l'implicazione

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

La funzione f si dirà biettiva se è sia iniettiva che suriettiva.

Osservazione 2 Una funzione $f : X \rightarrow Y$ è suriettiva se e solo se

$$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y.$$

2 n -uple

Definizione 3 Sia $n \in \mathbb{N}_0$. La notazione

$$\{1, \dots, n\}$$

starà ad indicare (come ci si può facilmente aspettare) l'insieme

$$\{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq n\}.$$

Una n -upla (ordinata) di oggetti è un'applicazione suriettiva il cui dominio è $\{1, \dots, n\}$. Le n -uple sono spesso indicate con una lettera in grassetto, ad esempio

a

Il corrispondente di un $i \in \{1, \dots, n\}$ viene detto i -esima componente di **a**, e in genere si indica con la stessa lettera, non in grassetto, affetta dal pedice i :

a_i

Una n -upla può essere denotata, ed in effetti determinata, elencando nell'ordine, tra parentesi e separate da virgole, le sue componenti:

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$$

Le 2-uple sono dette anche coppie e le 3-uple sono anche dette terne.

In base alle definizioni appena date, ad esempio la coppia ordinata

$$(8, 5)$$

è formalmente definita come la funzione

$$\{1, 2\} \rightarrow \{5, 8\}$$

che ad 1 associa 8 e a 2 associa 5.

3 Prodotto cartesiano

Definizione 4 Sia (A_1, \dots, A_n) una n -upla di insiemi. Definiamo prodotto cartesiano di A_1, \dots, A_n l'insieme

$$\{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in A_i \forall i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Tale insieme sarà denotato elencando nell'ordine gli insiemi A_1, \dots, A_n , separati dal segno \times :

$$A_1 \times \dots \times A_n.$$

Nel caso A_1, \dots, A_n siano tutti uguali ad un certo insieme A , il loro prodotto cartesiano sarà anche denotato con

$$A^n.$$

Esempio 5

$$\{a, b\} \times \{3, 5\} = \{(a, 3), (a, 5), (b, 3), (b, 5)\}$$

$$\{1, 2, 3\} \times \{\alpha\} \times \{x, y\} = \{(1, \alpha, x), (1, \alpha, y), (2, \alpha, x), (2, \alpha, y), (3, \alpha, x), (3, \alpha, y)\}$$

Assumiamo che il lettore sia familiare con l'uso delle parentesi all'interno di espressioni algebriche. Sostanzialmente, basta tenere presente che quando in un'espressione coinvolgente operazioni (tra numeri o insiemi, o altri oggetti) una parte di essa è racchiusa tra parentesi, allora si deve sostituire detta parte con il risultato delle operazioni in essa contenute.

Esercizio 6 (facoltativo). Siano A, B, C insiemi non vuoti. I tre insiemi

$$A \times (B \times C), A \times B \times C, (A \times B) \times C$$

sono uguali?

4 Matrici

Definizione 7 Siano $m, n \in \mathbb{N}_0$. Una matrice di tipo $m \times n$ è un'applicazione suriettiva con dominio

$$\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}.$$

Le matrici sono spesso indicate con una lettera maiuscola, ad esempio

$$A$$

Il corrispondente di una coppia $(i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ viene detto termine, o entrata, di posto i, j e viene generalmente indicato con la stessa lettera, stavolta in minuscolo, affetta dal doppio pedice ij :

$$a_{ij}$$

Una matrice di tipo $m \times n$ viene anche denotata (e anzi determinata) scrivendo una tabella rettangolare, con m righe ed n colonne, in cui ogni elemento a_{ij} occupa il posto all'incrocio della i -esima riga con la j -esima colonna; generalmente, tale tabella viene inclusa tra parentesi tonde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Se $m = n$, la matrice si dice quadrata di ordine n .

In base alle definizioni appena date, ad esempio la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

è formalmente definita come la funzione

$$\{1, 2\} \times \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 4, 2, -1, 6\}$$

data da

$$(1, 1) \mapsto 2, \quad (1, 2) \mapsto 4 \quad (1, 3) \mapsto 6 \quad (2, 1) \mapsto -1 \quad (2, 2) \mapsto 0 \quad (2, 3) \mapsto 2$$

(la notazione $x \mapsto y$ indica che ad x viene associato y).

Definizione 8 *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

una matrice di tipo $m \times n$. Se $i \in \{1, \dots, m\}$, diremo i -esima riga di A la matrice di tipo $1 \times n$ data da

$$(a_{i1} \cdots a_{in}).$$

Tale matrice si indica generalmente con

$$\mathbf{a}_i$$

Sebbene formalmente \mathbf{a}_i sia cosa diversa dalla n -upla (a_{i1}, \dots, a_{in}) , spesso conviene identificarle per abuso di linguaggio. Se $j \in \{1, \dots, n\}$, diremo j -esima colonna di A la matrice di tipo $m \times 1$ data da

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Tale matrice si indica generalmente con

$$\mathbf{a}^j$$

ed è talvolta conveniente identificarla, per abuso di linguaggio, con la m -upla (a_{1j}, \dots, a_{mj}) .

A partire da una matrice A , possiamo costruire un'altra matrice "scambiando le righe con le colonne". Per esempio, dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice così costruita si chiama la *trasposta* di A . Una definizione rigorosa può essere data come segue.

Definizione 9 Sia A una matrice di tipo $m \times n$. La matrice B di tipo $n \times m$ data da

$$b_{ij} = a_{ji} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m\}$$

si dice matrice trasposta di A , e viene generalmente denotata con

$$A^t.$$

Alcune matrici non cambiano quando vengono trasposte. Tali matrici si dicono *simmetriche*. Stabiliamo quindi la seguente definizione.

Definizione 10 Una matrice A si dice *simmetrica* se

$$A = A^t.$$

Osservazione 11 Una matrice simmetrica deve essere per forza quadrata. Una matrice quadrata A di ordine n è simmetrica se e solo se si ha

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

5 Spazi vettoriali numerici reali

In questo paragrafo concentreremo l'attenzione sull'insieme

$$\mathbb{R}^n$$

(cioè il prodotto cartesiano di n insiemi uguali ad \mathbb{R}).

Definizione 12 Sia $n \in \mathbb{N}_0$. Un elemento di \mathbb{R}^n , cioè una n -pla di numeri reali, viene anche detto *vettore numerico* (reale). Il vettore numerico che ha tutte le componenti uguali a zero, viene detto *vettore nullo* e viene denotato con $\mathbf{0}$:

$$\mathbf{0} = (0, \dots, 0).$$

Così come per i numeri reali, anche per i vettori numerici è possibile definire alcune utili operazioni.

Definizione 13 Siano $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Definiamo la somma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ come il vettore $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ dato da

$$c_i = a_i + b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

In altri termini, possiamo scrivere

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n).$$

Con questa definizione abbiamo introdotto una *operazione* nell'insieme \mathbb{R}^n . Che cos'è un'operazione? Le note operazioni sui numeri (addizione, moltiplicazione, ecc.), consistono nel prendere due numeri e dare come risultato un numero. Dunque sostanzialmente sono delle funzioni che agiscono su coppie di numeri reali e hanno per immagini numeri reali. La situazione per i vettori numerici è perfettamente analoga: l'operazione di sommare due vettori può essere vista come una funzione che agisce su coppie di vettori e ha come immagini singoli vettori.

Definizione 14 *La funzione*

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

che ad ogni coppia (\mathbf{a}, \mathbf{b}) associa la somma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, si chiama operazione di addizione in \mathbb{R}^n .

Definizione 15 Sia $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e sia α un numero reale. Definiamo il prodotto (esterno) $\alpha\mathbf{a}$ come il vettore \mathbf{b} dato da

$$b_i = \alpha a_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

In altri termini, possiamo scrivere

$$\alpha(a_1, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n).$$

Anche in questo caso abbiamo definito un'operazione su vettori numerici. Ora però l'operazione non agisce su due vettori numerici, ma su numero ed un vettore. Una tale operazione si chiama "operazione esterna", perché il numero che interviene è un elemento esterno all'insieme su cui effettuiamo l'operazione. Per motivi legati al loro uso nella Fisica, i numeri reali vengono a volte chiamati *scalari*. Quindi il prodotto $\alpha\mathbf{a}$ viene a volte detto prodotto di \mathbf{a} per lo scalare α .

Definizione 16 *La funzione*

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

che ad ogni coppia (α, \mathbf{a}) associa il prodotto $\alpha\mathbf{a}$, si chiama operazione di moltiplicazione (esterna) per scalari su \mathbb{R}^n .

Definizione 17 Sia $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Il vettore

$$(-1)\mathbf{a}$$

si chiama l'opposto di \mathbf{a} e viene denotato con

$$-\mathbf{a}.$$

In altri termini, abbiamo

$$-(a_1, \dots, a_n) = (-a_1, \dots, -a_n).$$

Molto spesso una somma

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

viene denotata semplicemente con

$$\mathbf{a} - \mathbf{b}$$

e viene chiamata *differenza* tra \mathbf{a} e \mathbf{b} .

Nella seguente proposizione elenchiamo le proprietà fondamentali delle operazioni ora introdotte.

Proposizione 18 *Si ha:*

- $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \quad (\text{proprietà commutativa})$
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n \quad (\text{proprietà associativa})$
- $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a} \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$
- $\mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$
- $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$
- $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$
- $(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a}) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$
- $1\mathbf{a} = \mathbf{a} \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$

Grazie alle proprietà ora elencate, le regole per trattare espressioni complesse con molte somme e prodotti tra vettori e scalari, sono del tutto simili a quelle per le ordinarie espressioni con numeri. Così come per i numeri, bisogna solo tenere conto dell'uso delle parentesi e del fatto che i prodotti vanno eseguiti prima delle somme.

Definizione 19 *La terna*

$$(\mathbb{R}^n, +, \cdot),$$

dove ‘+’ denota l’operazione di addizione in \mathbb{R}^n e ‘ \cdot ’ denota l’operazione di moltiplicazione per scalari su \mathbb{R}^n , viene detta spazio vettoriale numerico (reale) di dimensione n .

Molto spesso, per brevità si usa parlare dello “spazio vettoriale \mathbb{R}^n ”, lasciando sottintese le operazioni di addizione e di moltiplicazione per scalari.

6 Spazi vettoriali di matrici

Definizione 20 Una matrice sui reali è una matrice i cui termini sono tutti numeri reali. L'insieme delle matrici di tipo $m \times n$ sui reali sarà denotato con

$$\mathbb{R}^{m \times n}.$$

Nei vari libri che trattano le matrici, sono anche usate differenti notazioni per l'insieme delle matrici di tipo $m \times n$ sui reali, come ad esempio $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $M(m, n; \mathbb{R})$ o simili.

Quanto fatto nel precedente paragrafo per i vettori numerici, può essere ripetuto per le matrici in maniera analoga.

Definizione 21 Una matrice sui reali che ha tutti i termini uguali a zero viene detta matrice nulla e viene a volte denotata con O :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Definizione 22 Siano $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Definiamo la somma $A + B$ come la matrice $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ data da

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Definizione 23 La funzione

$$\mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$$

che ad ogni coppia (A, B) associa la somma $A + B$, si chiama operazione di addizione in $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Definizione 24 Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e sia α un numero reale. Definiamo il prodotto (esterno) αA come la matrice B di tipo $m \times n$ data da

$$b_{ij} = \alpha a_{ij} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Definizione 25 La funzione

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$$

che ad ogni coppia (α, A) associa il prodotto αA , si chiama operazione di moltiplicazione (esterna) per scalari su $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Definizione 26 Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. La matrice

$$(-1)A$$

si chiama l'opposta di A e viene denotata con

$$-A.$$

Una somma

$$A + (-B)$$

viene spesso denotata semplicemente con

$$A - B$$

e viene chiamata *differenza* tra A e B .

Proposizione 27 *Si ha:*

- $A + B = B + A \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (*proprietà commutativa*)
- $(A + B) + C = A + (B + C) \quad \forall A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (*proprietà associativa*)
- $A + O = A \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $A - A = O \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $1A = A \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Definizione 28 *La terna*

$$(\mathbb{R}^{m \times n}, +, \cdot),$$

dove ‘+’ denota l’operazione di addizione in $\mathbb{R}^{m \times n}$ e ‘ \cdot ’ denota l’operazione di moltiplicazione per scalari su $\mathbb{R}^{m \times n}$, viene detta spazio vettoriale delle matrici sui reali di tipo $m \times n$.

Molto spesso, per brevità si usa parlare dello “spazio vettoriale $\mathbb{R}^{m \times n}$ ”, lasciando sottintese le operazioni di addizione e di moltiplicazione per scalari.

7 Relazioni

Assumiamo come primitivo il concetto di *relazione* in un insieme. Esempi di relazioni sono la relazione di uguaglianza, la relazione d’ordine tra numeri, la relazione di inclusione tra insiemi, le relazioni di parentela tra persone, ecc. Definire una relazione \mathcal{R} in un insieme X equivale ad assegnare un insieme di coppie di elementi di X , cioè un sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times X$. Una coppia (x, y) apparterrà al sottoinsieme ogni volta che gli elementi x e y sono in relazione. In questo caso scriveremo

$$x \mathcal{R} y.$$

Se invece x e y non sono in relazione, scriveremo

$$x \not\mathcal{R} y$$

e in tal caso la coppia (x, y) non apparterrà al sottoinsieme di $X \times X$ che descrive la relazione.

Ad esempio, la relazione “=” nell’insieme $\{Milano, Roma, Napoli\}$ viene descritta dall’insieme

$$\{(Milano, Milano), (Roma, Roma), (Napoli, Napoli)\}.$$

La relazione “essere più a nord” nell’insieme $\{Milano, Roma, Napoli\}$ viene descritta da

$$\{(Milano, Roma), (Milano, Napoli), (Roma, Napoli)\}.$$

La relazione “<” nell’insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ viene descritta dall’insieme

$$\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}.$$

Definizione 29 Una relazione di equivalenza in un insieme X è una relazione \mathcal{R} per cui valgono le seguenti proprietà:

- $x\mathcal{R}x \quad \forall x \in X \quad (\text{proprietà riflessiva})$
- $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x \quad (\text{proprietà simmetrica})$
- $x\mathcal{R}y \text{ e } y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z \quad (\text{proprietà transitiva})$

La relazione di uguaglianza è una relazione di equivalenza. La relazione “essere coetanei” è una relazione di equivalenza nell’insieme delle persone. La relazione “essere nati lo stesso giorno dell’anno” è una relazione di equivalenza nell’insieme delle persone.

Possiamo dire, in maniera un po’ informale, che tutte le relazioni del tipo “avere in comune una certa proprietà” sono relazioni di equivalenza.

Definizione 30 Sia \mathcal{R} una relazione di equivalenza in un insieme X e sia $x \in X$. L’insieme

$$\{y \in X : y\mathcal{R}x\}$$

si dice classe di equivalenza di x (rispetto ad \mathcal{R}), e si denota con

$$[x]_{\mathcal{R}}$$

o semplicemente con

$$[x]$$

(sottintendendo \mathcal{R}).

Definizione 31 Una relazione d’ordine stretto in un insieme X è una relazione \mathcal{R} per cui valgono le seguenti proprietà:

- $x\mathcal{R}y \Rightarrow y \not\mathcal{R}x$
- $x\mathcal{R}y \text{ e } y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$

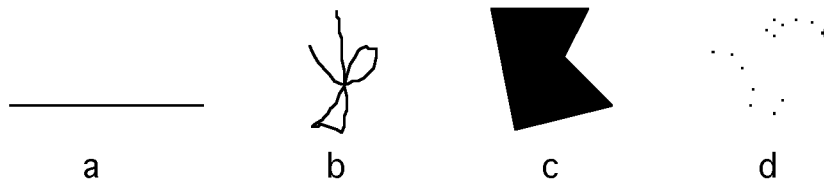
Una relazione d’ordine stretto si dice totale se per ogni coppia di elementi distinti x, y si ha che $x\mathcal{R}y$ oppure $y\mathcal{R}x$.

La relazione ‘<’ tra numeri reali è una relazione d’ordine stretto totale. La relazione di inclusione stretta ‘ \subset ’ tra insiemi è una relazione d’ordine stretto non totale.

8 Rette e piani

In questo paragrafo cominciamo ad affrontare questioni geometriche. Approssimativamente, possiamo dire che la geometria ordinaria si occupa di studiare le “figure nello spazio”. Che cos’è lo spazio? Che cosa sono le figure? Come al solito per trattare rigorosamente questi concetti si ricorre ad una formalizzazione insiemistica.

Assumendo come primitivo il concetto di *punto*, lo spazio può essere descritto semplicemente come l’insieme dei punti. Per quanto riguarda le figure, basta osservare che quando disegniamo una figura, non facciamo altro che marcare con la penna (o strumenti simili) un insieme di punti. Dunque le figure geometriche possono essere definite come dei sottoinsiemi dello spazio.



Osserviamo le figure qui sopra.

Qual è la più semplice, quella che sapremmo riprodurre con facilità? Certamente la (a). Dal punto di vista insiemistico, non c’è una maniera per distinguere i sottoinsiemi dello spazio, se non per il numero di punti, mentre è un dato di fatto che tra i sottoinsiemi dello spazio ce ne sono alcuni particolari, che chiamiamo *rette*. Una retta è una “linea dritta”, come la (a), che però si estende all’infinito in entrambi i sensi. Stabiliamo dunque che

- Ci sono dei particolari sottoinsiemi dello spazio: le rette.

Le rette hanno particolari proprietà, che assumiamo come evidenti:

- Su ogni retta esistono almeno due punti.
- Presi due punti distinti, esiste una e una sola retta che li contiene entrambi.

Quest’ultima asserzione si può anche esprimere (in maniera più geometricamente intuitiva, ma meno precisa) dicendo “per due punti distinti passa una sola retta”, oppure “esiste una sola retta che congiunge due punti distinti”.

Oltre alle rette, ci sono degli altri sottoinsiemi dello spazio molto semplici e particolari, di cui alle scuole medie si parla poco, forse perché sono figure che non si disegnano su un foglio. Infatti tali figure *sono* il foglio: stiamo parlando dei *piani*.

Intuitivamente, un piano è un foglio (non spiegazzato) prolungato all’infinito in ogni direzione. Dunque:

- Esistono dei particolari sottoinsiemi dello spazio detti piani.

Assumiamo per evidente che:

- Su ogni piano ci sono almeno tre punti non allineati (cioè non appartenenti ad una stessa retta).
- Dati tre punti non allineati, questi sono contenuti in uno ed un solo piano.
- Se due punti distinti appartengono ad un piano, allora tale piano contiene tutta la retta che li congiunge.
- Dato un piano, esiste un punto non contenuto in esso (cioè un piano non può coincidere con tutto lo spazio).
- Se due piani si incontrano in un punto, allora si incontrano in almeno un altro punto.

Una volta stabiliti questi fatti evidenti, molti altri fatti possono essere dedotti in maniera puramente logica (senza fare alcun riferimento all'intuizione geometrica). Tanto per fare un esempio banale, abbiamo detto che un piano non può coincidere con tutto lo spazio. Anche una retta non può coincidere con tutto lo spazio. Pure questo è evidente, ma possiamo anche dedurlo in maniera puramente logica a partire dai fatti enunciati sopra. Infatti, supponiamo che tutto lo spazio sia una retta. Prendiamo un piano qualsiasi, e chiamiamolo π . Su questo piano esistono almeno tre punti. Scegliamone due, e chiamiamoli P e Q . Siccome stiamo supponendo che tutto lo spazio è una retta, allora la retta che congiunge P e Q è tutto lo spazio. Ma abbiamo anche detto che se due punti sono contenuti in un piano allora tale piano contiene la retta che li congiunge. Quindi π contiene tutto lo spazio. Ma questo lo abbiamo esplicitamente escluso. Dunque una retta non può coincidere con tutto lo spazio.

Parliamo ora di rette parallele. Siamo abituati a dire che due rette sono parallele quando non si incontrano, però questo è giusto solo quando si sottintende che le rette siano sullo stesso piano (come avviene quasi sempre nei problemi trattati alle superiori). Infatti se pensiamo ad una gamba della sedia su cui siamo seduti e ad un lato del foglio che stiamo leggendo, questi non si incontrano, anche se li prolunghiamo all'infinito (a meno che non si stia in una posizione molto particolare), eppure non sono due rette parallele.

Definizione 32 *Due rette si dicono incidenti se hanno almeno un punto in comune. Due rette si dicono complanari se sono contenute in un piano, altrimenti si dicono sghembe. Due rette si dicono propriamente parallele se sono complanari e non hanno punti in comune; si dicono impropriamente parallele se coincidono. Due rette si dicono parallele, se lo sono propriamente o impropriamente.*

Esercizio 33 (facoltativo). *Dimostrare che due rette sghembe non possono avere punti in comune.*

Suggerimento. Bisogna dimostrare che se due rette si incontrano in un punto P , allora sono contenute in un piano. Per trovare tale piano, si scelgano altri

due punti oltre a P , in maniera opportuna.

Dunque abbiamo il seguente quadro della situazione:

- Due rette non si incontrano se e solo se sono propriamente parallele oppure sghembe.
- Due rette sono complanari se e solo se sono incidenti oppure parallele.
- Due rette sono sia incidenti che parallele se e solo se sono impropriamente parallele.

È importante infine assumere come evidente il seguente fatto (detto *assioma delle parallele*).

- Dati una retta r e un punto P , esiste un'unica retta passante per P e parallela ad r .

Usando l'assioma delle parallele, si può risolvere il seguente esercizio.

Esercizio 34 (*facoltativo*). *Nell'insieme di tutte le rette, consideriamo la relazione di parallelismo, cioè la relazione \mathcal{P} definita da*

$$r\mathcal{P}s \Leftrightarrow r \text{ è parallela ad } s.$$

Dimostrare che \mathcal{P} è una relazione di equivalenza.

Definizione 35 *Una classe di equivalenza rispetto alla relazione di parallelismo tra rette viene detta una direzione.*

Dunque la direzione di una retta r è la sua classe di equivalenza $[r]_{\mathcal{P}}$. Se d è una direzione ed r è una retta, dire che “ r ha direzione d ” formalmente equivale a dire che $r \in d$.

Definizione 36 *Due piani si dicono propriamente paralleli se non hanno punti in comune; si dicono impropriamente paralleli se coincidono. Una retta e un piano si dicono propriamente paralleli se non hanno punti in comune; si dicono impropriamente paralleli se la retta è contenuta nel piano.*

Anche per i piani è possibile dimostrare che la relazione di parallelismo è una relazione di equivalenza. Una classe di equivalenza di piani paralleli si chiama una *giacitura*.

Esercizio 37 (*facoltativo*). *Dimostrare che l'intersezione di due piani non paralleli è una retta.*

9 Versi su una retta

Un'altra proprietà elementare che viene usata (a volte implicitamente) in molte delle dimostrazioni che si studiano nella scuola media, è il fatto che ogni retta può essere percorsa in due possibili versi; il che si può esprimere dicendo che i punti di una retta possono essere ordinati in due maniere naturali, l'una opposta dell'altra. Naturalmente esistono infiniti modi di ordinare infiniti punti, ma questi due sono “naturali”, così come le rette sono particolari tra tutti i sottoinsiemi dello spazio.

Il concetto di “verso” si può esprimere in maniera rigorosa in termini di concetti che abbiamo già introdotto: esso è infatti una *relazione d'ordine stretto totale* definita tra i punti della retta. Fissare un verso infatti, significa poter dire, per ogni coppia di punti distinti, che uno dei due precede l'altro (e non viceversa). Il fatto che i due possibili versi sono tra di loro opposti significa che se in un verso P precede Q , allora nel verso opposto è Q a precedere P . Dunque:

- Esistono su ogni retta due particolari ordinamenti totali, detti *versi*, l'uno opposto dell'altro.

La relazione che definisce un verso verrà indicata col simbolo \prec . La scrittura

$$P \prec Q$$

si legge “ P precede Q ”. Scrivendo invece

$$P \preceq Q$$

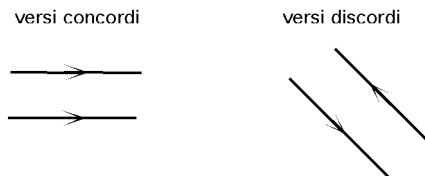
intenderemo che P “precede o è uguale” a Q .

Definizione 38 Una retta orientata è una coppia

$$(r, \prec),$$

dove r è una retta e ‘ \prec ’ è un verso su r .

Se r ed s sono due rette parallele, dato un verso su r , possiamo considerare come intuitivo (vedi figura qui sotto) che uno dei versi di s è *concorde* con il verso scelto, mentre l'altro è *discorde*.



Assumiamo quindi come evidente il seguente fatto.

- Nell'insieme di tutti i versi di una classe di rette parallele, esiste una relazione di equivalenza (*concordanza*), tale che i due versi opposti di ciascuna retta sono discordi (cioè non concordi), e che se due versi sono discordi da un terzo, allora sono tra di loro concordi.

10 Segmenti

Definizione 39 *Dati due punti distinti A e B , sia r la retta che li contiene e fissiamo il verso (\prec) secondo cui $A \prec B$. Si dice segmento di estremi A e B , e si indica con \overline{AB} , l'insieme*

$$\overline{AB} = \{P \in r : A \preceq P \preceq B\}.$$

E' opportuno definire anche il "segmento nullo", che è un insieme del tipo $\overline{AA} = \{P \in r : A \preceq P \preceq A\}$: tale insieme è sempre uguale ad $\{A\}$, qualsiasi sia la retta r che contiene il punto A , e qualsiasi sia il verso \prec scelto su r . Riassumendo:

Definizione 40 *Sia A un punto. Si dice segmento nullo di estremo A , l'insieme $\overline{AA} = \{A\}$.*

Definizione 41 *Due segmenti non nulli saranno detti paralleli se lo sono le rette che li contengono, e un segmento non nullo sarà detto parallelo ad una retta se lo è la retta che lo contiene.*

Dato un segmento non nullo \overline{AB} , se si fissa un verso sulla retta che lo contiene, si avrà automaticamente un verso sul segmento, cioè lo stesso ordinamento, considerato però limitatamente ai punti del segmento (più precisamente dovremmo parlare di *restrizione* ad \overline{AB} del verso fissato sulla retta). Se abbiamo invece un segmento nullo \overline{AA} , qualsiasi sia la retta che lo contiene e qualsiasi sia il verso scelto su di essa, si ottiene sempre lo stesso ordinamento su \overline{AA} (d'altra parte, c'è un unico modo di ordinare un insieme fatto da un solo punto). Quindi possiamo dire che su un segmento nullo c'è un unico verso, coincidente col suo opposto.

Definizione 42 *Un segmento orientato è una coppia costituita da un segmento e da un verso su di esso. Un segmento orientato non nullo costituito da \overline{AB} , con il verso rispetto al quale $A \prec B$, verrà indicato con AB , e il segmento orientato BA (cioè quello dato sempre da \overline{AB} , ma con il verso opposto) viene detto opposto ad AB . Il segmento orientato nullo di estremo A verrà indicato con AA , e coincide con il suo opposto.*

Naturalmente la relazione di concordanza tra i versi su rette parallele induce una relazione di concordanza tra i versi di segmenti (non nulli) paralleli, dunque potremo chiamare *concordi* due segmenti orientati paralleli se lo sono i loro versi.

11 Congruenza, lunghezze, misura

Dati due segmenti nello spazio, sappiamo confrontarli: il procedimento consiste nel trasportarli l'uno sull'altro (pensiamo a due bastoncini o a due fili). Se i due bastoncini possono essere portati a coincidere, allora si dice che i segmenti di partenza sono *congruenti*, o che hanno la stessa *lunghezza*. A partire da questa idea, si può anche definire il concetto di misura, che si fonda sulla possibilità di riportare consecutivamente dei segmenti di fissata lunghezza. Tutto

questo discorso può essere formalizzato insiemisticamente in varie maniere. Una è quella di richiedere per assioma (postulare) l'esistenza di particolari funzioni dello spazio in sé, detti movimenti rigidi (il che traduce il trasporto dei bastoncini). Un'altra è quella di postulare l'esistenza di una relazione di equivalenza tra segmenti (la congruenza, cioè l'avere la stessa lunghezza), con particolari proprietà di trasporto. Seguiamo questa seconda strada. Assumiamo come evidente il seguente fatto.

- Esiste una particolare relazione di equivalenza nell'insieme dei segmenti, detta *congruenza*.

Definizione 43 Una lunghezza è una classe di equivalenza di segmenti congruenti.

Dunque la lunghezza di un segmento s è la sua classe di equivalenza $[s]$ rispetto alla relazione di congruenza. Se l è una lunghezza ed s è un segmento, dire che “ s ha lunghezza l ” formalmente equivale a dire che $s \in l$.

Non ci preoccupiamo qui di elencare tutti gli assiomi della congruenza, ci limitiamo per ora ad enunciare il seguente fatto evidente

- Fissati un segmento \overline{AB} , una retta r , un verso su r e un punto $C \in r$, esiste uno ed un solo punto $D \in r$ che segue C e tale che \overline{CD} è congruente ad \overline{AB} .

Questa proprietà permette il confronto di segmenti e il “riporto consecutivo”, che apre la strada alla definizione di somma di due segmenti (o meglio di due lunghezze) e quindi alla definizione di *misura* di un segmento rispetto ad un altro. Naturalmente c'è bisogno anche di altri assiomi, che riguardino la compatibilità della congruenza rispetto al riporto consecutivo, le proprietà di continuità della retta (data una successione infinita di segmenti l'uno contenuto nel successivo, l'intersezione è sempre non vuota), l'assioma di Archimede (dati due segmenti, esiste sempre un multiplo del primo che contiene il secondo). Non possiamo addentrarci nei dettagli della costruzione, ma visto che il concetto di misura dovrebbe essere familiare a tutti, potremo considerare come evidenti molte sue proprietà. Quindi, possiamo cominciare ad assumere che

- Dato un segmento \overline{AB} ed un segmento non nullo u esiste un determinato numero reale non negativo $|\overline{AB}|^u$, detto misura di \overline{AB} rispetto ad u .

Spesso si sottintende di aver fissato un segmento non nullo u (detto unità di misura) e, parlando di misura di \overline{AB} , si sottintende “rispetto ad u ”, e si usa il simbolo $|\overline{AB}|$. In tale situazione, il numero $|\overline{AB}|$ viene anche chiamato *modulo* di \overline{AB} .

A volte si tende a confondere il concetto di lunghezza con quello di misura. A rigore, non ha senso dire che una strada “è lunga 50”; si dovrebbe specificare: 50 chilometri, 50 miglia, o altro.

12 Vettori liberi ordinari

Diamo ora una definizione importante.

Definizione 44 *Due segmenti orientati si dicono equipollenti se sono congruenti e inoltre, nel caso siano non nulli, sono paralleli e concordi.*

Poiché la congruenza tra segmenti, il parallelismo e la concordanza tra versi sono tutte relazioni di equivalenza, si dimostra subito che anche l'equipollenza è una relazione di equivalenza.

Definizione 45 *Una classe di segmenti orientati equipollenti si chiama vettore libero ordinario (o semplicemente vettore libero). Se AB è un segmento orientato, il vettore da esso individuato (cioè l'insieme dei segmenti ad esso equipollenti) sarà indicato con $B - A$, e si dirà che AB è un rappresentante di $B - A$.*

I segmenti orientati nulli formano una classe di equipollenza: tale vettore si chiama *vettore nullo*, e si indica con $\mathbf{0}$. Se due segmenti orientati sono equipollenti, anche i loro opposti lo sono, dunque per ogni vettore $B - A$ c'è il vettore $A - B$ che si chiama *opposto* di $B - A$, e che è costituito da tutti gli opposti dei segmenti orientati che costituiscono $B - A$. Il vettore opposto di \mathbf{v} si indicherà con $-\mathbf{v}$. Da quanto abbiamo detto nel paragrafo sulla congruenza si deduce subito la seguente proposizione.

Proposizione 46 *Dato un punto A ed un vettore libero \mathbf{v} , esiste uno e un solo punto B tale che $\mathbf{v} = B - A$.*

Definizione 47 *Nella situazione della precedente proposizione, il punto B si dice somma di A e \mathbf{v} , e si denota con*

$$A + \mathbf{v}.$$

Osservazione 48 *Ogni coppia (A, \mathbf{v}) determina un segmento orientato AB (quello con $B = A + \mathbf{v}$). Ogni segmento orientato AB proviene da un'unica coppia (A, \mathbf{v}) (quella con $\mathbf{v} = B - A$). Dunque c'è una naturale applicazione biettiva tra l'insieme delle coppie del tipo (A, \mathbf{v}) e l'insieme dei segmenti orientati. Un vettore applicato può essere formalmente definito sia come una coppia (A, \mathbf{v}) , sia come un segmento orientato AB .*

13 Operazioni tra vettori liberi

Definizione 49 *Siano \mathbf{u} e \mathbf{v} vettori liberi, sia AB un rappresentante di \mathbf{u} e sia BC il rappresentante di \mathbf{v} che ha origine in B . Il vettore $C - A$ si dice somma di \mathbf{u} e \mathbf{v} , e si indica con $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.*

Se $A'B'$ è un altro rappresentante di \mathbf{u} , allora è equipollente ad AB . Inoltre il rappresentante $B'C'$ di \mathbf{v} che ha origine in B' è equipollente a BC . Non è

difficile allora dimostrare che il segmento orientato $A'C'$ è equipollente ad AC . Dunque il vettore $C' - A'$, ottenuto partendo da $A'B'$, è lo stesso di quello ottenuto partendo da AB . Questo dimostra che la nostra definizione di somma è “ben posta”, non dipende cioè da come scegliamo il segmento orientato che rappresenta \mathbf{u} .

La somma di un vettore \mathbf{u} con l'opposto $-\mathbf{v}$ di un vettore \mathbf{v} viene detta *differenza* di \mathbf{u} e \mathbf{v} e viene denotata con

$$\mathbf{u} - \mathbf{v}$$

Dalla definizione stessa di somma, ricaviamo che comunque prendiamo tre punti A, B, C si ha

$$(B - A) + (C - B) = C - A.$$

Definizione 50 Sia $\mathbf{u} = B - A$ un vettore libero e sia k un numero reale. Sia CD un segmento orientato tale che:

- $|\overline{CD}| = |k| \cdot |\overline{AB}|$ (dove $|k|$ indica il valore assoluto di k , mentre $|\overline{AB}|$ e $|\overline{CD}|$ sono i moduli rispetto ad una fissata unità di misura)

e, se è non nullo (il che avviene se e solo se $k \neq 0$ e $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$):

- \overline{CD} è parallelo ad \overline{AB} ;
- $\begin{cases} \text{se } k > 0, CD \text{ è concorde ad } AB \\ \text{se } k < 0, CD \text{ è discorde con } AB \end{cases}$

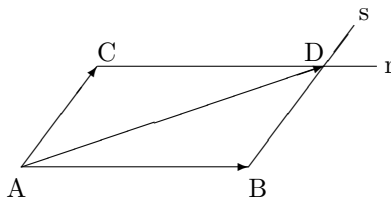
Allora il vettore $D - C$ viene detto prodotto di k per \mathbf{u} e viene indicato con $k\mathbf{u}$.

Anche questa definizione si può dimostrare che è ben posta (non dipende dalla scelta dell'unità di misura rispetto a cui calcoliamo i moduli e non dipende dalla scelta di CD).

Proposizione 51 Sia \mathcal{V} l'insieme dei vettori liberi. Si ha:

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$
- $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}$
- $\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}$
- $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$
- $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}$
- $(\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u}) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}$
- $1\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}$

Tutte le proprietà enunciate in questa proposizione possono essere dimostrate usando la geometria elementare. A titolo di esempio, diamo un cenno di dimostrazione della proprietà commutativa della somma, nel caso i due vettori siano non nulli e non paralleli (cioè siano rappresentabili con segmenti non paralleli). Rappresentiamo due vettori liberi \mathbf{u} e \mathbf{v} tramite due segmenti orientati AB e AC aventi l'origine nello stesso punto A . Supponiamo che i vettori siano non nulli e non paralleli. Tracciamo la retta r , passante per C e parallela alla retta per A e B . Tracciamo inoltre la retta s , passante per B e parallela alla retta per A e C . Chiamiamo D l'intersezione di r ed s .



Otteniamo un parallelogramma $ABDC$. Dunque il segmento orientato CD è equipollente ad AB , e quindi è un altro rappresentante del vettore libero \mathbf{u} . Allo stesso modo, il segmento orientato BD è equipollente ad AC , e dunque è un altro rappresentante di \mathbf{v} . Allora abbiamo

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (B - A) + (D - B) = D - A$$

e

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = (C - A) + (D - C) = D - A.$$

Quindi

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u},$$

il che dimostra la proprietà commutativa in questo caso.

Inoltre abbiamo anche ottenuto che la somma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è rappresentata dalla diagonale (orientata) AD del parallelogramma che ha per lati i rappresentanti AB e AC di \mathbf{u} e \mathbf{v} . Questo fatto va sotto il nome di *regola del parallelogramma*, ed è utile quando si vogliono rappresentare i vettori con segmenti orientati aventi tutti una stessa origine.

14 Spazio vettoriale dei vettori liberi

Definizione 52 Sia \mathcal{V} l'insieme dei vettori liberi, indichiamo con $+$ l'operazione di addizione in \mathcal{V} (cioè l'applicazione $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ che ad ogni coppia di vettori associa la loro somma) e con \cdot l'operazione di moltiplicazione per scalari su \mathcal{V} (cioè l'applicazione $\mathbb{R} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ che ad ogni coppia $(\alpha, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V}$ associa il loro prodotto). Allora la terna

$$(\mathcal{V}, +, \cdot)$$

si chiama spazio vettoriale dei vettori liberi ordinari.

Molto spesso, per brevità si usa parlare dello “spazio vettoriale \mathcal{V} ”, lasciando sottintese le operazioni di addizione e di moltiplicazione per scalari.

15 Spazi vettoriali

Definizione 53 Sia V un insieme, denotiamo con ‘+’ un’operazione interna, cioè un’applicazione

$$V \times V \rightarrow V,$$

e denotiamo con ‘ \cdot ’ un’operazione di moltiplicazione esterna per numeri reali, cioè un’applicazione

$$\mathbb{R} \times V \rightarrow V.$$

Denotando con $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ l’immagine tramite ‘+’ di una qualunque coppia (\mathbf{x}, \mathbf{y}) e con $h\mathbf{x}$ l’immagine tramite ‘ \cdot ’ di una qualunque coppia (h, \mathbf{x}) , supponiamo che valgano le seguenti proprietà:

- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$
- $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$
- $\exists \mathbf{0} \in V : \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in V$
- $\forall \mathbf{x} \in V, \exists -\mathbf{x} \in V : \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
- $h(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = h\mathbf{x} + h\mathbf{y} \quad \forall h \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$
- $(h + k)\mathbf{x} = h\mathbf{x} + k\mathbf{x} \quad \forall h, k \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in V$
- $(hk)\mathbf{x} = h(k\mathbf{x}) \quad \forall h, k \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in V$
- $1\mathbf{x} = \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in V$

In tal caso, la terna

$$(V, +, \cdot)$$

si dice spazio vettoriale (sui reali). Gli elementi di V saranno detti vettori e i numeri reali saranno detti scalari. Il particolare vettore che abbiamo indicato con $\mathbf{0}$ sarà detto vettore nullo. Abbiamo inoltre supposto che per ogni vettore \mathbf{x} si possa trovare in corrispondenza un vettore che abbiamo indicato $-\mathbf{x}$: tale vettore sarà detto opposto di \mathbf{x} . La somma di un vettore \mathbf{x} con l’opposto $-\mathbf{y}$ di un vettore \mathbf{y} sarà detta differenza di \mathbf{x} e \mathbf{y} , e sarà indicata con

$$\mathbf{x} - \mathbf{y}.$$

Molto spesso, per brevità si usa parlare dello “spazio vettoriale V ”, lasciando sottintese le operazioni di addizione e di moltiplicazione per scalari.

Nei paragrafi precedenti abbiamo incontrato tre esempi di spazi vettoriali: spazio dei vettori numerici, spazio delle matrici sui reali, spazio dei vettori liberi. Esistono molti altri esempi.

Nel seguito introdurremo alcune nozioni e dimostreremo alcuni fatti, validi per un qualsiasi spazio vettoriale. Dunque queste nozioni e questi fatti potranno essere automaticamente usati sia per i vettori numerici, sia per le matrici sui reali, sia per i vettori liberi.

Esercizio 54 (facoltativo). *Sia V uno spazio vettoriale. Dimostrare che*

- $0\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in V$
- $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in V$

16 Combinazioni lineari

Definizione 55 *Sia V uno spazio vettoriale. Una n -upla $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di V sarà a volte chiamata un sistema di vettori¹.*

Definizione 56 *Sia V uno spazio vettoriale, sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ un sistema di vettori e sia (h_1, \dots, h_n) una n -pla di scalari. Il vettore*

$$\mathbf{w} = h_1\mathbf{v}_1 + \dots + h_n\mathbf{v}_n$$

sarà detto combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ tramite h_1, \dots, h_n . In questa situazione diremo anche che il vettore \mathbf{w} dipende dal sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. Nel caso sia $n = 0$ (quindi nessun vettore e nessuno scalare) assumiamo

$$\mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Una maniera sintetica per scrivere la combinazione $h_1\mathbf{v}_1 + \dots + h_n\mathbf{v}_n$ è

$$\sum_{i=1}^n h_i\mathbf{v}_i.$$

Similmente, se vogliamo esprimere sinteticamente una somma di numeri

$$a_1 + \dots + a_n,$$

possiamo usare la notazione

$$\sum_{i=1}^n a_i.$$

¹Avvertiamo che questa definizione di “sistema di vettori” differisce un po’ da quella “classica”. In realtà, quando si trattano i sistemi di vettori non è importante l’ordine in cui sono scritti; è importante però che si possano considerare dei vettori ripetuti. Parlando alla buona, la definizione classica di sistema di vettori consisteva sostanzialmente nell’introdurre il concetto di “insieme con ripetizioni” (era quindi qualcosa un po’ a metà tra un insieme ed una n -upla). È inutile entrare nei dettagli: per i nostri scopi possiamo accettare di definire un sistema di vettori come una n -upla.

Esempio 57 Consideriamo lo spazio vettoriale \mathbb{R}^2 e il sistema di vettori

$$((1, 1), (3, -4)).$$

Calcoliamo la combinazione lineare dei vettori del nostro sistema tramite gli scalari 2 e 7:

$$2(1, 1) + 7(3, -4) = (2, 2) + (21, -28) = (23, -26).$$

Dunque la combinazione lineare voluta è il vettore $(23, -26)$. Calcoliamo poi la combinazione lineare tramite gli scalari 4 e 0:

$$4(1, 1) + 0(3, -4) = (4, 4) + (0, 0) = (4, 4).$$

Dunque la nuova combinazione lineare è il vettore $(4, 4)$.

17 Dipendenza e indipendenza lineare

Osservazione 58 Il vettore nullo dipende da qualsiasi sistema di vettori. Infatti, dato un qualunque sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, basta considerare gli scalari tutti uguali a zero:

$$0\mathbf{v}_1 + \dots + 0\mathbf{v}_n = \mathbf{0} + \dots + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Naturalmente non è detto che questo sia l'unico modo possibile per ottenere il vettore nullo. Ad esempio se consideriamo il sistema di vettori di \mathbb{R}^3 dato da $(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)$ anche la combinazione lineare tramite gli scalari 1, -2 e 1 ci dà il vettore nullo:

$$\begin{aligned} 1(1, 2, 3) - 2(4, 5, 6) + 1(7, 8, 9) &= (1, 2, 3) - (8, 10, 12) + (7, 8, 9) = \\ &= (-7, -8, -9) + (7, 8, 9) = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Tuttavia per certi sistemi di vettori l'unico modo possibile di ottenere $\mathbf{0}$ è quello di prendere gli scalari tutti uguali a zero. Ad esempio se prendiamo $(1, 0)$ e $(0, 1)$ (nello spazio \mathbb{R}^2) e chiamiamo h e k due scalari qualsiasi, otteniamo che la combinazione lineare tramite h e k ci dà il vettore

$$h(1, 0) + k(0, 1) = (h, 0) + (0, k) = (h, k).$$

Questo vettore è nullo solo quando sia h che k sono nulli. Quindi, nel caso del particolare sistema $(1, 0), (0, 1)$, l'unico modo di ottenere il vettore nullo è quello di prendere gli scalari tutti nulli.

Ricapitolando, scegliendo gli scalari tutti nulli, una combinazione lineare dà sempre il vettore nullo. Però: per alcuni sistemi di vettori ci sono anche altri modi di ottenerlo, mentre per altri sistemi di vettori questo è l'unico modo.

Definizione 59 Sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ un sistema di vettori di uno spazio vettoriale. Se esistono degli scalari h_1, \dots, h_n non tutti nulli tali che la combinazione lineare

$$h_1\mathbf{v}_1 + \dots + h_n\mathbf{v}_n$$

sia il vettore nullo, allora diremo che il sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è linearmente dipendente. In caso contrario (cioè se l'unico modo di ottenere il vettore nullo come combinazione lineare di $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è quello di prendere gli scalari tutti uguali a zero) allora diremo che il sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è linearmente indipendente.

Osservazione 60 Un sistema di vettori $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è linearmente indipendente quando vale l'implicazione

$$h_1\mathbf{v}_1 + \dots + h_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Rightarrow h_1 = 0, \dots, h_n = 0.$$

Proposizione 61 Sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ un sistema di vettori di uno spazio vettoriale e sia \mathbf{v} un vettore che dipende da $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. Allora il sistema

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v})$$

(cioè il sistema ottenuto “aggiungendo” \mathbf{v}) è linearmente dipendente.

Dimostrazione. Siccome \mathbf{v} dipende dal sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, allora esistono degli scalari h_1, \dots, h_n tali che

$$\mathbf{v} = h_1\mathbf{v}_1 + \dots + h_n\mathbf{v}_n.$$

Sommando l'opposto di \mathbf{v} ai due membri dell'uguaglianza di sopra, e tenendo conto che $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$, otteniamo

$$\mathbf{0} = h_1\mathbf{v}_1 + \dots + h_n\mathbf{v}_n + (-1)\mathbf{v}.$$

Dunque la combinazione $h_1\mathbf{v}_1 + \dots + h_n\mathbf{v}_n + (-1)\mathbf{v}$ è nulla ed ha lo scalare -1 che è non nullo. Quindi il sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v})$ è linearmente dipendente, come volevamo dimostrare.

Se, viceversa, abbiamo un sistema linearmente dipendente $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v})$, allora non sempre si ha che \mathbf{v} dipende da $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$.

Esempio 62 Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^2 consideriamo il sistema

$$((1, 1), (2, 2), (0, 1)).$$

Poiché abbiamo la combinazione

$$2(1, 1) + (-1)(2, 2) + 0(0, 1)$$

che è uguale al vettore nullo, allora il sistema è linearmente dipendente. Tuttavia l'ultimo vettore, $(0, 1)$, non dipende dai primi due. Infatti una qualunque combinazione

$$h(1, 1) + k(2, 2)$$

dà un vettore del tipo $(h+2k, h+2k)$, che ha le due componenti uguali tra loro. Quindi non può essere uguale ad $(1, 0)$, che ha le due componenti diverse tra loro.

Proposizione 63 Sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ un sistema di vettori linearmente dipendente di uno spazio vettoriale. Allora c'è almeno uno dei vettori che dipende dai rimanenti.

Dimostrazione. Siccome il sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è linearmente dipendente, allora esistono degli scalari h_1, \dots, h_n non tutti nulli e tali che

$$h_1\mathbf{v}_1 + \dots + h_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Dire che gli scalari sono non tutti nulli vuol dire che c'è almeno uno scalare $h_i \neq 0$. Sommando ad entrambi i membri l'opposto di $h_i\mathbf{v}_i$ otteniamo

$$h_1\mathbf{v}_1 + \dots + h_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + h_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} + \dots + h_n\mathbf{v}_n = -h_i\mathbf{v}_i$$

Moltiplicando entrambi i membri per $-\frac{1}{h_i}$ otteniamo

$$-\frac{h_1}{h_i}\mathbf{v}_1 - \dots - \frac{h_{i-1}}{h_i}\mathbf{v}_{i-1} - \frac{h_{i+1}}{h_i}\mathbf{v}_{i+1} - \dots - \frac{h_n}{h_i}\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_i$$

Quindi il vettore \mathbf{v}_i dipende dai rimanenti vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n$, come volevamo dimostrare.

Dunque in un sistema linearmente dipendente si può sempre trovare un vettore che dipende dagli altri. Anzi, di solito sono molti i vettori con questa proprietà; spesso addirittura tutti i vettori del sistema. Tuttavia, come abbiamo visto nell'esempio di prima, preso un vettore di un sistema linearmente dipendente, non possiamo essere sicuri che dipenda dagli altri. Un caso in cui invece si può essere sicuri è quello trattato nella seguente proposizione.

Proposizione 64 Sia V uno spazio vettoriale, sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ un sistema di vettori e sia \mathbf{v} un vettore di V . Supponiamo che si abbia:

- il sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è linearmente indipendente;
- il sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v})$ è linearmente dipendente.

Allora il vettore \mathbf{v} dipende dal sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$.

Dimostrazione. Siccome il sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v})$ è linearmente dipendente, allora esistono degli scalari non tutti nulli h_1, \dots, h_n, h tali che

$$h_1\mathbf{v}_1 + \dots + h_n\mathbf{v}_n + h\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Osserviamo per prima cosa che h deve essere diverso da zero. Infatti, supponiamo per assurdo $h = 0$. Poiché gli scalari h_1, \dots, h_n, h non possono essere tutti

nulli abbiamo che gli scalari h_1, \dots, h_n non sono tutti nulli; d'altra parte se $h = 0$ otteniamo anche che

$$h_1 \mathbf{v}_1 + \dots + h_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Ma siccome il sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è linearmente indipendente questo è impossibile. Dunque $h \neq 0$.

Quindi, con passaggi simili a quelli della proposizione precedente, otteniamo

$$\mathbf{v} = -\frac{h_1}{h} \mathbf{v}_1 - \dots - \frac{h_n}{h} \mathbf{v}_n,$$

cioè il vettore \mathbf{v} dipende dal sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, come volevamo dimostrare.

18 Equazioni lineari

Definizione 65 Sia $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ un vettore numerico, e consideriamo l'applicazione

$$\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

definita da

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n.$$

Tale funzione si dice *funzione lineare in n variabili (a valori reali)*. Il vettore (a_1, \dots, a_n) sarà detto *vettore dei coefficienti di ℓ* . Una equazione lineare in n incognite è definita assegnando una coppia

$$(\ell, b)$$

con ℓ funzione lineare in n variabili e $b \in \mathbb{R}$. Una soluzione di un'equazione (ℓ, b) è un vettore numerico $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\ell(\mathbf{s}) = b.$$

Un'equazione lineare sarà spesso denotata scrivendo:

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b.$$

Le lettere x_1, \dots, x_n prendono il nome di *incognite* (nel caso n sia piccolo, si possono usare anche lettere diverse tra loro, ad esempio x, y, z invece di x_1, x_2, x_3). Il numero reale b si dice *termine noto dell'equazione*.

Definizione 66 Sia X un qualunque insieme, siano $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni e sia $h \in \mathbb{R}$. La funzione $X \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$x \mapsto f(x) + g(x)$$

è detta *somma di f e g* ed è denotata con $f + g$. La funzione $X \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$x \mapsto hf(x)$$

è detta *prodotto di h per f* ed è denotata con hf .

Quindi, in base alla definizione di sopra, possiamo scrivere

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

e

$$(hf)(x) = hf(x).$$

Osservazione 67 Siano ℓ ed ℓ' funzioni lineari con rispettivi vettori dei coefficienti \mathbf{a} e \mathbf{a}' . Allora la somma $\ell + \ell'$ è una funzione lineare con vettore dei coefficienti $\mathbf{a} + \mathbf{a}'$. Se poi $h \in \mathbb{R}$, il prodotto $h\ell$ è una funzione lineare con vettore dei coefficienti $h\mathbf{a}$.

Definizione 68 Siano $e = (\ell, b)$ ed $e' = (\ell', b')$ equazioni lineari e sia $h \in \mathbb{R}$. L'equazione lineare $(\ell + \ell', b + b')$ è detta somma (membro a membro) di (ℓ, b) ed (ℓ', b') , e sarà indicata con $e + e'$. L'equazione lineare $(h\ell, hb)$ è detta prodotto (membro a membro) di h per e , e sarà indicata con he .

Proposizione 69 Siano e ed e' equazioni lineari, e supponiamo che

$$\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$$

sia una soluzione di entrambe. Allora \mathbf{s} è soluzione di $e + e'$.

Dimostrazione. Sia $e = (\ell, b)$ ed $e' = (\ell', b')$. Siccome \mathbf{s} è soluzione delle due equazioni abbiamo

$$\ell(\mathbf{s}) = b, \quad \ell'(\mathbf{s}) = b'.$$

Quindi

$$(\ell + \ell')(\mathbf{s}) = \ell(\mathbf{s}) + \ell'(\mathbf{s}) = b + b'.$$

Ma il fatto che $(\ell + \ell')(\mathbf{s}) = b + b'$ vuol dire, per definizione, che \mathbf{s} è soluzione dell'equazione $(\ell + \ell', b + b')$, che è l'equazione somma $e + e'$, come volevamo dimostrare.

Proposizione 70 Sia e un'equazione lineare, sia \mathbf{s} una sua soluzione e sia $h \in \mathbb{R}$. Allora \mathbf{s} è soluzione dell'equazione prodotto he .

Dimostrazione. Sia $e = (\ell, b)$. Siccome \mathbf{s} è una soluzione abbiamo $\ell(\mathbf{s}) = b$. Quindi

$$(h\ell)(\mathbf{s}) = h\ell(\mathbf{s}) = hb.$$

Ma il fatto che $(h\ell)(\mathbf{s}) = hb$ vuol dire, per definizione, che \mathbf{s} è soluzione dell'equazione $(h\ell, hb)$, che è l'equazione prodotto he , come volevamo dimostrare.

Proposizione 71 Sia e un'equazione lineare, sia $h \in \mathbb{R}$ e sia \mathbf{s} una soluzione dell'equazione prodotto he . Se $h \neq 0$ allora \mathbf{s} è soluzione di e .

Dimostrazione. Sia $e = (\ell, b)$. Siccome \mathbf{s} è una soluzione di $he = (h\ell, hb)$ abbiamo $h\ell(\mathbf{s}) = hb$. Siccome $h \neq 0$ possiamo moltiplicare per $\frac{1}{h}$:

$$\ell(\mathbf{s}) = \frac{1}{h} \cdot h \cdot \ell(\mathbf{s}) = \frac{1}{h} \cdot h \cdot b = b.$$

Ma il fatto che $\ell(\mathbf{s}) = b$ vuol dire, per definizione, che \mathbf{s} è soluzione dell'equazione $e = (\ell, b)$, come volevamo dimostrare.

Dalle ultime due proposizioni ricaviamo che se $h \neq 0$, le equazioni e ed he sono *equivalenti*, cioè hanno le stesse soluzioni.

19 Sistemi lineari

Definizione 72 *Un sistema lineare di m equazioni in n incognite è una m -upla (e_1, \dots, e_m) di equazioni lineari in n incognite. Generalmente si usa la notazione*

$$\begin{cases} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{cases}$$

La n -pla dei coefficienti dell'equazione e_i ($i \in \{1, \dots, n\}$), si indica generalmente usando un doppio pedice: (a_{i1}, \dots, a_{in}) . Il termine noto di e_i si indica generalmente con b_i . Dunque la notazione per esteso di un generico sistema lineare è:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(cioè la matrice $m \times n$ tale che per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ la riga \mathbf{a}_i è il vettore dei coefficienti dell'equazione e_i) si dice *matrice dei coefficienti del sistema*. La matrice

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

(cioè la matrice $m \times (n+1)$ tale che per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ la colonna \mathbf{a}'^i è uguale alla colonna \mathbf{a}^i di A , mentre la colonna \mathbf{a}'^{n+1} è costituita dai termini noti) si dice *matrice completa del sistema*. Una soluzione del sistema lineare è un vettore numerico $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ che sia soluzione di tutte le equazioni e_1, \dots, e_m . Se il sistema ammette almeno una soluzione si dice *compatibile*, in caso contrario *incompatibile*. Due sistemi si dicono *equivalenti* se hanno le

stesse soluzioni. Un sistema si dice omogeneo se ha tutti i termini noti uguali a zero.

Osservazione 73 Un sistema omogeneo è sicuramente compatibile, perché ha come soluzione il vettore numerico nullo $(0, \dots, 0)$.

20 Trasformazioni elementari

Definizione 74 Sia \mathcal{S} l'insieme di tutti i sistemi lineari di m equazioni in n incognite. Una trasformazione elementare su tali sistemi è un'applicazione $\tau : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ definita in uno dei seguenti tre modi:

- *Trasformazione di primo tipo (moltiplicazione di un'equazione per uno scalare non nullo):* fissati $i \in \{1, \dots, m\}$ ed $h \in \mathbb{R} - \{0\}$, per ogni sistema

$$S : \begin{cases} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_m \end{cases}$$

si definisce $\tau(S)$ come il sistema

$$\begin{cases} e_1 \\ \vdots \\ he_i \\ \vdots \\ e_m \end{cases}$$

- *Trasformazione di secondo tipo (scambio di due equazioni):* fissati $i, j \in \{1, \dots, m\}$, per ogni sistema

$$S : \begin{cases} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_m \end{cases}$$

si definisce $\tau(S)$ come il sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_m \end{array} \right.$$

- *Trasformazione di terzo tipo (somma di un'equazione con un multiplo di un'altra): fissati $i, j \in \{1, \dots, m\}$ con $i \neq j$, ed $h \in \mathbb{R}$, per ogni sistema*

$$S : \left\{ \begin{array}{l} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_m \end{array} \right.$$

si definisce $\tau(S)$ come il sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 \\ \vdots \\ e_i + he_j \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_m \end{array} \right.$$

(naturalmente e_j potrebbe anche comparire prima di e_i).

Le trasformazioni definite sopra possono essere sinteticamente indicate come segue:

- Tipo I:

$$e_i \rightarrow he_i$$

- Tipo II:

$$e_i \leftrightarrow e_j$$

- Tipo III:

$$e_i \rightarrow e_i + he_j$$

È importante sottolineare che nella trasformazione di primo tipo lo scalare h deve essere diverso da 0, e che nella trasformazione di terzo tipo j deve essere diverso da i (h può anche essere 0).

Esempio 75 Consideriamo il sistema

$$S : \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + y + 4z = -2 \\ 3x - 2y - 2z = 5 \end{cases}$$

Se applichiamo al sistema S la trasformazione elementare

$$e_2 \rightarrow 4e_2$$

otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 4x + 4y + 16z = -8 \\ 3x - 2y - 2z = 5 \end{cases}$$

Se invece applichiamo (sempre al sistema S) la trasformazione elementare

$$e_1 \leftrightarrow e_3$$

otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y - 2z = 5 \\ x + y + 4z = -2 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

Applicando (sempre al sistema S) la trasformazione elementare

$$e_3 \rightarrow e_3 + 2e_2$$

otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + y + 4z = -2 \\ 5x + 6z = 1 \end{cases}$$

Proposizione 76 Sia S un sistema lineare e sia S' un sistema ottenuto da S tramite una trasformazione elementare. Allora S ed S' sono equivalenti.

Dimostrazione. Diciamo e_1, \dots, e_m le equazioni di S ed e'_1, \dots, e'_m le equazioni di S' .

Se la trasformazione elementare è di primo tipo, allora per qualche $i \in \{1, \dots, n\}$ e qualche $h \in \mathbb{R} - \{0\}$ abbiamo $e'_i = he_i$. Abbiamo già osservato in precedenza che allora (essendo $h \neq 0$) e'_i ed e_i sono equivalenti. Poiché tutte le altre equazioni rimangono le stesse (cioè $e'_k = e_k \quad \forall k \neq i$), i due sistemi sono chiaramente equivalenti.

Se la trasformazione elementare è di secondo tipo, allora le equazioni rimangono le stesse (cambia solo l'ordine in cui sono scritte). Dunque i due sistemi sono ovviamente equivalenti.

Supponiamo infine che la trasformazione sia di terzo tipo, diciamo

$$e_i \rightarrow e_i + he_j.$$

Se \mathbf{s} è una soluzione di S , allora in particolare è soluzione dell'equazione e_j . Per una proposizione dimostrata precedentemente, abbiamo anche che \mathbf{s} è soluzione di he_j . Poiché poi \mathbf{s} deve anche essere soluzione dell'equazione e_i , per un'altra proposizione vista in precedenza, \mathbf{s} è soluzione dell'equazione somma $e'_i = e_i + he_j$. Poiché tutte le altre equazioni rimangono le stesse (cioè $e'_k = e_k \quad \forall k \neq i$), concludiamo che \mathbf{s} è soluzione del sistema S' . Ci rimane da dimostrare che S' non ha altre soluzioni oltre a quelle di S . Supponiamo quindi che \mathbf{s}' sia una soluzione di S' . In particolare \mathbf{s}' è soluzione di e'_j . Ma siccome $j \neq i$ abbiamo $e'_j = e_j$. Dunque \mathbf{s}' è soluzione di e_j , e quindi anche di $(-h)e_j$. Inoltre, siccome \mathbf{s}' è soluzione di e'_i , otteniamo che \mathbf{s}' è soluzione dell'equazione somma $e'_i + (-h)e_j$. Ma $e'_i + (-h)e_j = e_i + he_j + (-h)e_j = e_i$, quindi \mathbf{s}' è soluzione di e_i . Poiché tutte le altre equazioni rimangono le stesse (cioè $e_k = e'_k \quad \forall k \neq i$), concludiamo che \mathbf{s}' è soluzione del sistema S . Quindi anche in questo caso i sistemi S ed S' sono equivalenti, come volevamo dimostrare.

Le trasformazioni elementari possono essere definite in maniera perfettamente analoga per le matrici sui reali.

Definizione 77 Una trasformazione elementare per righe su matrici $m \times n$ è un'applicazione $\tau : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ definita in uno dei seguenti tre modi:

- *Trasformazione di primo tipo (moltiplicazione di una riga per uno scalare non nullo):* fissati $i \in \{1, \dots, m\}$ ed $h \in \mathbb{R} - \{0\}$, per ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ si definisce $\tau(A)$ come la matrice B tale che

$$\mathbf{b}_i = h\mathbf{a}_i \text{ e } \mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k \quad \forall k \neq i.$$

- *Trasformazione di secondo tipo (scambio di due righe):* fissati due indici $i, j \in \{1, \dots, m\}$, per ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ si definisce $\tau(A)$ come la matrice B tale che

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_j, \quad \mathbf{b}_j = \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k \quad \forall k \neq i, j.$$

- *Trasformazione di terzo tipo (somma di una riga con un multiplo di un'altra):* fissati $i, j \in \{1, \dots, m\}$ con $i \neq j$, ed $h \in \mathbb{R}$, per ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ si definisce $\tau(A)$ come la matrice B tale che

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i + h\mathbf{a}_j \text{ e } \mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k \quad \forall k \neq i.$$

Le trasformazioni definite sopra possono essere sinteticamente indicate come segue:

- Tipo I:

$$\mathbf{a}_i \rightarrow h\mathbf{a}_i$$

- Tipo II:

$$\mathbf{a}_i \leftrightarrow \mathbf{a}_j$$

- Tipo III:

$$\mathbf{a}_i \rightarrow \mathbf{a}_i + h\mathbf{a}_j$$

Anche per le matrici è importante sottolineare che nella trasformazione di primo tipo lo scalare h deve essere diverso da 0, e che nella trasformazione di terzo tipo j deve essere diverso da i (h può anche essere 0).

Osservazione 78 Sia S un sistema lineare, sia A la sua matrice completa e sia B una matrice ottenuta da A tramite una trasformazione elementare. Allora il sistema che ha B come matrice completa si può ovviamente ottenere da S tramite la trasformazione elementare corrispondente a quella fatta su A .

Esempio 79 Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Se applichiamo ad A la trasformazione elementare

$$\mathbf{a}_2 \rightarrow 4\mathbf{a}_2$$

otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 16 & -8 \\ 3 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Se invece applichiamo (sempre alla matrice A) la trasformazione elementare

$$\mathbf{a}_1 \leftrightarrow \mathbf{a}_3$$

otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Applicando (sempre alla matrice A) la trasformazione elementare

$$\mathbf{a}_3 \rightarrow \mathbf{a}_3 + 2\mathbf{a}_2$$

otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che le matrici dell'esempio qui sopra sono le matrici complete dei sistemi dell'esempio 75 (cfr. l'osservazione 78).

Osservazione 80 Siano $h, k \in \mathbb{R}$, con $h \neq 0$. Una trasformazione

$$\mathbf{a}_i \rightarrow h\mathbf{a}_i + k\mathbf{a}_j$$

non è una trasformazione elementare, a meno che non sia $k = 0$ oppure $h = 1$. Tuttavia possiamo ottenere tale trasformazione effettuando due trasformazioni elementari di seguito:

$$\mathbf{a}_i \rightarrow \mathbf{a}_i + \frac{k}{h}\mathbf{a}_j, \quad \mathbf{a}_i \rightarrow h\mathbf{a}_i.$$

21 Matrici a scalini

Definizione 81 Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matrice e sia \mathbf{a}_i una sua riga non nulla. Il primo termine non nullo di \mathbf{a}_i si dice pivot di \mathbf{a}_i . Più precisamente:

$$a_{ij} \text{ è il pivot di } \mathbf{a}_i \Leftrightarrow a_{ij} \neq 0 \text{ e } a_{ik} = 0 \forall k < j.$$

La matrice A si dice a scalini se valgono i seguenti due fatti:

- il pivot di ogni riga non nulla è più a sinistra dei pivot delle righe non nulle successive;
- le righe nulle sono tutte alla fine.

Queste due condizioni possono essere più precisamente espresse dicendo che valgono le seguenti implicazioni:

- a_{ij} pivot di $\mathbf{a}_i, a_{i'j'}$ pivot di $\mathbf{a}_{i'}, i < i' \Rightarrow j < j'$
- $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{0}, \mathbf{a}_j = \mathbf{0} \Rightarrow i < j$.

Il nome di “matrice a scalini” deriva dal fatto che gli zeri “utili” possono essere disposti sotto una figura “a scalini”, come possiamo vedere nei seguenti esempi:

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & -9 & \\ 0 & \boxed{-5} & 15 & \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & 5 & 3 \\ 0 & \boxed{-5} & -3 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{-46} & -46 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & -1 & -5 \\ 0 & \boxed{-5} & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{13} \end{pmatrix}.$$

La “scala” deve sempre partire in alto a sinistra e scendere terminando a destra; gli scalini devono essere “alti uno”. I pivot sono proprio gli elementi negli “angoletti degli scalini”, e devono essere per forza diversi da zero; mentre gli elementi sotto gli scalini devono essere tutti nulli. Tutti gli altri elementi possono essere sia nulli, sia non nulli.

Esercizio 82 *La matrice*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

è a scalini?

22 Procedimento di riduzione a scalini

Il seguente procedimento consente di passare da una matrice A qualsiasi ad una matrice a scalini, usando una sequenza di trasformazioni elementari. Naturalmente supponiamo che ci siano almeno due righe, perché una matrice con una sola riga è automaticamente già a scalini.

- Si individui una riga non nulla che abbia il pivot più a sinistra possibile (se tutte le righe sono nulle il procedimento termina).
- Se la riga trovata non è la prima, si effettui una trasformazione elementare di secondo tipo, scambiando la riga trovata con la prima riga (in questo modo la prima riga avrà il pivot più a sinistra possibile).
- Detto a_{1j} il pivot della prima riga, si scelgano due numeri h e k , con $h \neq 0$, tali che

$$\frac{k}{h} = \frac{a_{2j}}{a_{1j}}$$

(si può scegliere ad esempio $h = a_{1j}$, che è proprio il pivot della prima riga, e $k = a_{2j}$; altre scelte potrebbero essere convenienti a seconda dei conti da fare). Quindi si effettui la trasformazione elementare di terzo tipo:

$$\underline{a}_2 \longrightarrow h\underline{a}_2 - k\underline{a}_1.$$

- Si ripeta il passaggio di sopra con la terza riga (se c'è) invece della seconda (quindi si scelgono ora h e k tali che $\frac{k}{h} = \frac{a_{3j}}{a_{1j}}$ e si effettua la trasformazione $\underline{a}_3 \longrightarrow h\underline{a}_3 - k\underline{a}_1$).
- Si proceda ancora allo stesso modo per tutte le righe successive (così facendo tutti gli elementi al di sotto del pivot a_{1j} diventano zero, e il pivot sarà più a sinistra dei pivot successivi, come richiesto per una matrice a scalini).
- Si ripeta tutto dall'inizio, applicandolo però solo alla matrice ottenuta "dimenticando" la prima riga (la prima riga rimarrà d'ora in poi sempre invariata): la nuova prima riga da considerare nel secondo ciclo sarà quindi quella che in effetti è la seconda riga della matrice A . Alla fine del secondo ciclo la seconda riga sarà messa da parte, e si ripeterà considerando solo le righe dalla terza in poi, e così via finché rimangono righe non nulle.

Non ci addenteremo nella dimostrazione che l'algoritmo ora esposto funziona, cioè che davvero applicando l'algoritmo ad una qualsiasi matrice si ottiene alla fine una matrice a scalini. In effetti, dalla descrizione appena fatta si intuisce abbastanza bene che l'algoritmo mira a disporre i pivot nell'ordine richiesto in una matrice a scalini (quelli più in basso, sono più a destra), l'unico dubbio serio è se, durante lo svolgimento dell'algoritmo, qualcuno degli zeri ottenuti in passi precedenti possa ridiventare non nullo. Ma questo non accade perché, ad ogni passo, l'azione che le trasformazioni vengono ad avere sulla parte di matrice già sistemata coinvolgono solo zeri, e dunque non può ricomparire nulla di diverso da zero.

Esercizio 83 *Ridurre a scalini la matrice*

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -9 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -9 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{a}_2 \rightarrow 3\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -9 \\ 0 & -5 & 15 \end{pmatrix}$$

Esercizio 84 *Ridurre a scalini la matrice*

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & -6 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Soluzione:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & -6 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{a}_3 \rightarrow 2\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_1]{\mathbf{a}_2 \rightarrow \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_1} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{a}_2 \leftrightarrow \mathbf{a}_3} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 85 *Ridurre a scalini la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & -11 & 9 & -5 \\ -1 & -4 & 10 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & -11 & 9 & -5 \\ -1 & -4 & 10 & -5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{a}_4 \rightarrow \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_1]{\substack{\mathbf{a}_2 \rightarrow \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \rightarrow \mathbf{a}_3 - 2\mathbf{a}_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

i valori determinati fino a quel momento.

Le incognite a cui possiamo assegnare valori arbitrari (cioè quelle il cui coefficiente non è un pivot) vengono spesso chiamate *variabili libere*.

Esempio 86 Risolviamo, con il procedimento di sostituzione a ritroso, il sistema lineare con la seguente matrice completa (a scalini):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'ultima riga non nulla è \mathbf{a}_2 . Il suo pivot $a_{23} = 2$ non è all'ultimo posto. Dunque il sistema è compatibile e possiamo andare avanti con le sostituzioni a ritroso. Il sistema è

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = -7 \\ 2x_3 + 4x_4 = -10 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Nell'equazione e_2 possiamo assegnare un valore arbitrario ad x_4 . Lasciamo indeterminata la scelta, ponendo

$$x_4 = t.$$

Il valore di x_3 si ricava da e_2 :

$$x_3 = -5 - 2t.$$

Sostituiamo tali valori nelle equazioni precedenti. In questo caso abbiamo solo e_1 , che diventa:

$$2x_1 - 3x_2 + (-5 - 2t) + 4t = -7,$$

quindi

$$2x_1 - 3x_2 = -2 - 2t.$$

Possiamo assegnare ad x_2 un altro valore arbitrario, diciamolo s , e ricavare x_1 :

$$x_1 = -1 + \frac{3}{2}s - t$$

Dunque l'insieme delle soluzioni è

$$\left\{ \left(-1 + \frac{3}{2}s - t, \quad s, \quad -5 - 2t, \quad t \right) : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ad esempio, fissando $t = 0$ ed $s = 0$ otteniamo la soluzione

$$(-1, 0, -5, 0);$$

se invece fissiamo $t = 1$ ed $s = 2$ otteniamo un'altra soluzione:

$$(1, 2, -7, 1).$$

In definitiva, il sistema ammette infinite soluzioni, che dipendono dalle infinite possibili scelte dei parametri t, s (una maniera tradizionale di esprimere questo fatto è dire che ci sono " ∞^2 soluzioni").

24 Metodo di Gauss

Le cose sin qui dette ci consentono di risolvere qualsiasi sistema lineare. Infatti, la matrice completa di un qualsiasi sistema può essere ridotta a scalini tramite trasformazioni elementari. Poiché tali trasformazioni corrispondono a trasformazioni elementari sui sistemi, e poiché queste danno luogo a sistemi equivalenti, il sistema dato dalla matrice ridotta a scalini è equivalente al sistema iniziale. Dunque basta risolvere questo sistema col procedimento di sostituzione a ritroso. Questo metodo di risoluzione è detto *metodo di Gauss*.

Riassumendo, il metodo di Gauss per la risoluzione di un qualunque sistema lineare consiste nelle seguenti due fasi:

- Riduzione a scalini della matrice completa del sistema.
- Risoluzione tramite sostituzioni a ritroso del sistema corrispondente alla matrice a scalini ottenuta nella fase precedente.

Esempio 87 Risolviamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 11x_3 + 9x_4 = -5 \\ -x_1 - 4x_2 + 10x_3 - 5x_4 = 1 \end{cases}.$$

Riduciamo a scalini la matrice completa:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & -11 & 9 & -5 \\ -1 & -4 & 10 & -5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{a_2 \rightarrow a_2 - a_1 \\ a_3 \rightarrow a_3 - 2a_1 \\ a_4 \rightarrow a_4 + a_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{a_2 \leftrightarrow a_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{a_4 \rightarrow a_4 + a_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{a_4 \rightarrow a_4 + 2a_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Risolviamo a ritroso:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -5 \\ -x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{cases} x_1 + (-5) - 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 0 = 0 \rightarrow x_1 = -1 \\ 3x_2 - 5 \cdot (-2) + 0 = -5 \rightarrow x_2 = -5 \\ -x_3 + 0 = 2 \rightarrow x_3 = -2 \\ x_4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Dunque il sistema ha un'unica soluzione: $(-1, -5, -2, 0)$.

Esempio 88 Risolviamo col metodo di Gauss il sistema

$$\begin{cases} 3x - y + z = -2 \\ 6x - 2y + 2z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} .$$

La matrice completa è

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Riduciamo a scalini:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{a_2 \rightarrow a_2 - 2a_1 \\ a_3 \rightarrow 3a_3 - a_1}]{} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{a_2 \leftrightarrow a_3} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

Applichiamo ora il procedimento di sostituzione a ritroso.

- L'ultima riga non nulla è \mathbf{a}_3 .
- In tale riga il pivot è all'ultimo posto. Dunque il sistema è incompatibile.

Nell'esempio di sopra, svolto applicando meccanicamente tutti i passi dei procedimenti, ci si poteva fermare prima. Infatti, dopo il primo ciclo della riduzione a scalini, è comparsa la riga $(0, 0, 0, 4)$: già a questo punto si poteva concludere che il sistema è incompatibile, dato che anche i sistemi corrispondenti alle matrici intermedie della riduzione sono equivalenti al sistema assegnato, e la presenza della riga in questione implica la presenza dell'equazione $0 = 4$, che non ha soluzioni.

Sebbene i procedimenti presentati siano perfettamente efficienti, con un po' di pratica e buon senso, in casi particolari si può pervenire alla soluzione anche più rapidamente.

Esempio 89 Risolviamo col metodo di Gauss il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ 3x + 4z = 7 \end{cases} .$$

Riduciamo a scalini la matrice completa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{e_2 \rightarrow e_2 - 2e_1 \\ e_3 \rightarrow e_3 - 3e_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$e_3 \xrightarrow{e_3 - e_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sostituzioni a ritroso:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -3y + z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{3}t + \frac{2}{3} + t = 3 \longrightarrow x = -\frac{4}{3}t + \frac{7}{3} \\ -3y + z = -2 \longrightarrow z = t, y = \frac{1}{3}t + \frac{2}{3} \end{cases}$$

Quindi l'insieme di tutte le soluzioni è

$$\left\{ \left(-\frac{4}{3}t + \frac{7}{3}, \frac{1}{3}t + \frac{2}{3}, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

25 Lemma di Steinitz

Osservazione 90 Consideriamo un qualsiasi sistema di tre vettori nello spazio \mathbb{R}^2 , diciamo $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$, e cerchiamo di trovare degli scalari x, y, z tali che

$$x(a_1, a_2) + y(b_1, b_2) + z(c_1, c_2) = (0, 0).$$

Naturalmente possiamo prendere i tre scalari uguali a zero, ma chiediamoci se questa è l'unica possibilità. Osserviamo che

$$x(a_1, a_2) + y(b_1, b_2) + z(c_1, c_2) = (a_1x + b_1y + c_1z, a_2x + b_2y + c_2z)$$

Dunque la combinazione sarà uguale a $(0, 0)$ se e solo se (x, y, z) è soluzione del sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

Siccome questo sistema è omogeneo (cioè ha tutti i termini noti uguali a zero), è sicuramente compatibile (d'altra parte abbiamo già osservato che è possibile prendere $(x, y, z) = (0, 0, 0)$). Quindi, applicando il metodo di Gauss, sicuramente dovremo effettuare le sostituzioni a ritroso (cioè non ci si fermerà davanti ad una riga con il pivot alla fine). Poiché poi la matrice del sistema ha solo due righe, i pivot saranno al massimo due. Quindi ci sarà almeno una variabile libera. Attribuendo un valore diverso da zero a tale variabile, otterremo una soluzione $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Concludiamo quindi che esiste una combinazione nulla dei vettori del sistema $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$ con scalari non tutti nulli. Dunque il sistema di vettori è linearmente dipendente.

Osservazione 91 L'osservazione precedente mostra che tre vettori in \mathbb{R}^2 sono sempre linearmente dipendenti. Con lo stesso ragionamento si ottiene più in generale che dato un sistema di m vettori in \mathbb{R}^n , se $m > n$ questo è sicuramente linearmente dipendente.

Si può migliorare ancora un po' l'osservazione di sopra, ottenendo un risultato valido per qualsiasi spazio vettoriale (non necessariamente un \mathbb{R}^n). Questo risultato è di fondamentale importanza in algebra lineare, e prende il nome di "lemma di Steinitz".

Proposizione 92 (*lemma di Steinitz*) Siano $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ e $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ due sistemi di vettori di uno spazio vettoriale qualsiasi. Supponiamo che il sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ sia linearmente indipendente e che ogni suo vettore dipenda dall'altro sistema $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$. Allora deve essere necessariamente $m \leq n$.

Cenno di dimostrazione. Poiché ogni vettore \mathbf{v}_i dipende da $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$, allora per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ esisterà una n -upla di scalari $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ tale che

$$\mathbf{v}_i = a_{i1}\mathbf{u}_1 + \dots + a_{in}\mathbf{u}_n.$$

I vettori $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$ sono m vettori nello spazio \mathbb{R}^n . Se supponiamo per assurdo $m > n$, allora l'osservazione 91 ci dice che $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$ è un sistema linearmente dipendente, cioè esiste una combinazione

$$h_1\mathbf{a}_1 + \dots + h_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$$

con scalari h_1, \dots, h_m non tutti nulli. Tenendo presenti le espressioni dei vettori \mathbf{v}_i , le quali coinvolgono le n -ple \mathbf{a}_i , con un po' di semplici conti (che però non riportiamo) si ottiene

$$h_1\mathbf{v}_1 + \dots + h_m\mathbf{v}_m = 0\mathbf{u}_1 + \dots + 0\mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Quindi il sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ sarebbe linearmente dipendente, il che è contro la nostra ipotesi. Dunque non può essere $m > n$, e allora $m \leq n$ come volevamo dimostrare.

26 Sistemi di generatori

Definizione 93 Sia V uno spazio vettoriale. Un sistema di generatori (finito) di V è un sistema di vettori $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ tale che ogni vettore di V dipenda da questo sistema.

Esempio 94 Il sistema $(1, 0), (0, 1)$ è un sistema di generatori di \mathbb{R}^2 . Infatti se prendiamo un qualsiasi vettore $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha:

$$x(1, 0) + y(0, 1) = (x, 0) + (0, y) = (x, y).$$

Quindi ogni vettore di \mathbb{R}^2 dipende da $(1, 0), (0, 1)$.

Definizione 95 Uno spazio vettoriale si dice finitamente generato se esiste un suo sistema di generatori finito $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$.

Osservazione 96 Sia V uno spazio vettoriale, sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ un sistema linearmente indipendente e sia $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ un sistema di generatori. Allora ogni vettore di $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$, come tutti i vettori di V , dipende dall'altro sistema $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$. Quindi per il lemma di Steinitz si ha che $m \leq n$.

Dall'osservazione di sopra ricaviamo che in uno spazio vettoriale finitamente generato esiste un limite massimo per il numero di vettori di un sistema linearmente indipendente. Infatti, se lo spazio è finitamente generato, allora esiste un sistema di generatori $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$; dunque un qualunque sistema linearmente indipendente non può avere più di n vettori.

27 Basi

Definizione 97 Sia V uno spazio vettoriale. Una base di V è un sistema di generatori linearmente indipendente. Una base è detta anche un riferimento (vettoriale).

Proposizione 98 In uno spazio vettoriale finitamente generato una base esiste sempre.

Cenno di dimostrazione. Poiché V è finitamente generato, esiste un sistema di generatori $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$. Se questo sistema è linearmente indipendente, allora abbiamo trovato una base.

Se invece il sistema è linearmente dipendente, per la proposizione 63 esiste un vettore \mathbf{u}_i che dipende dagli altri. Se “togliamo” tale vettore dal sistema, otteniamo ancora un sistema di generatori. Infatti poiché un qualunque vettore $\mathbf{v} \in V$ è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$, e poiché il vettore \mathbf{u}_i è a sua volta combinazione lineare dei rimanenti, sostituendo \mathbf{u}_i nell'espressione che dà \mathbf{v} è possibile ottenere \mathbf{v} come una combinazione degli \mathbf{u} che non coinvolge più \mathbf{u}_i .

Abbiamo ottenuto dunque un sistema di generatori “più piccolo”. Se questo sistema è linearmente indipendente abbiamo trovato una base. Altrimenti, possiamo ripetere il ragionamento e togliere un altro vettore. Così procedendo, ad un certo punto dobbiamo per forza ottenere un sistema linearmente indipendente (se riusciamo a togliere tutti i vettori arriviamo al sistema vuoto, che è indipendente; se non ci riusciamo vuol dire che ci siamo dovuti fermare prima, cioè che abbiamo incontrato un sistema indipendente). Abbiamo dunque trovato un sistema di generatori linearmente indipendente, cioè una base, come volevamo dimostrare.

Per gli spazi che non sono finitamente generati, esiste un risultato analogo. Per enunciarlo avremmo però bisogno di trattare i sistemi infiniti di vettori. La cosa non è affatto difficile, però dobbiamo rinunciarvi per brevità.

Abbiamo visto che in uno spazio finitamente generato una base esiste sempre. In realtà, escluso casi molto particolari, di basi ce ne sono infinite. Il fatto sorprendente è che tutte le basi devono avere lo stesso numero di vettori. Vediamo perché.

Proposizione 99 *Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno lo stesso numero di vettori.*

Dimostrazione. Consideriamo due basi qualsiasi, $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ e $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$. Poiché $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ è linearmente indipendente e $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è un sistema di generatori, in base all'osservazione 96 otteniamo che $m \leq n$. Allo stesso modo, poiché $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è linearmente indipendente e $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ è un sistema di generatori, otteniamo che $n \leq m$. Dunque $m = n$, come volevamo dimostrare.

Definizione 100 *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato. Si definisce dimensione di V il numero di vettori di una qualunque sua base. La dimensione di V si indica con*

$$\dim V.$$

Bisogna fare un po' di attenzione a non confondere la dimensione di V con il numero di vettori di V . A parte casi molto particolari, uno spazio vettoriale finitamente generato (sui reali) ha infiniti vettori, mentre la dimensione è il numero (finito) di vettori di una sua base.

Osservazione 101 *Sia V uno spazio vettoriale, sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base e sia \mathbf{v} un vettore di V . Poiché $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è un sistema di generatori, esistono scalari x_1, \dots, x_n tali che*

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n.$$

Il fatto che $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ sia anche linearmente indipendente implica che la n -pla di scalari (x_1, \dots, x_n) è univocamente determinata, cioè è l'unica possibile che dia \mathbf{v} . Infatti, supponiamo che si abbia anche

$$\mathbf{v} = y_1\mathbf{v}_1 + \dots + y_n\mathbf{v}_n$$

per certi scalari y_1, \dots, y_n . Allora abbiamo

$$\mathbf{v} - \mathbf{v} = (x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n) - (y_1\mathbf{v}_1 + \dots + y_n\mathbf{v}_n).$$

Ma $\mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$, e con un po' di semplici passaggi otteniamo che $(x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n) - (y_1\mathbf{v}_1 + \dots + y_n\mathbf{v}_n)$ è uguale a $(x_1 - y_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (x_n - y_n)\mathbf{v}_n$. Dunque abbiamo

$$(x_1 - y_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (x_n - y_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Questa è una combinazione lineare nulla di $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ con scalari

$$(x_1 - y_1), \dots, (x_n - y_n).$$

Siccome $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è linearmente indipendente, questi scalari sono nulli, cioè si deve avere

$$x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n.$$

Quindi qualsiasi combinazione di $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ che dia \mathbf{v} deve essere fatta con gli scalari uguali a (x_1, \dots, x_n) .

Definizione 102 Sia V uno spazio vettoriale, sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base e sia \mathbf{v} un vettore di V . L'unica n -pla di scalari (x_1, \dots, x_n) tale che

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_n \mathbf{v}_n$$

si dice n -pla delle componenti di \mathbf{v} rispetto alla base $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$.

La definizione delle componenti ci consente di descrivere i vettori di un qualsiasi spazio vettoriale tramite vettori numerici. Dato uno spazio vettoriale V di dimensione n , una volta fissata una base, abbiamo un'applicazione biettiva

$$V \leftrightarrow \mathbb{R}^n,$$

che ad ogni vettore associa la n -pla delle sue componenti.

28 Matrici particolari

Definizione 103 Una matrice antisimmetrica è una matrice A sui reali tale che

$$A = -A^t$$

(ricordiamo che A^t è la matrice trasposta; cfr. la definizione 9).

Osservazione 104 Una matrice antisimmetrica deve essere per forza quadrata. Una matrice quadrata è antisimmetrica se e solo se si ha

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

In particolare, per una matrice antisimmetrica dobbiamo avere che $a_{ii} = -a_{ii}$, quindi i termini del tipo a_{ii} devono essere tutti nulli.

Ad esempio, la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 6 \\ -3 & -5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

è antisimmetrica.

Definizione 105 Sia A una matrice quadrata di ordine n sui reali. Allora diremo:

$$\begin{aligned} A \text{ è diagonale} & \stackrel{\text{def.}}{\iff} a_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : i \neq j \\ A \text{ è triangolare alta} & \stackrel{\text{def.}}{\iff} a_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : i > j \\ A \text{ è triangolare bassa} & \stackrel{\text{def.}}{\iff} a_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : i < j \end{aligned}$$

Se A è una matrice quadrata, la n -pla (a_{11}, \dots, a_{nn}) si dice *diagonale principale* di A . Quindi una matrice quadrata è diagonale quando i termini al di fuori della sua diagonale principale sono tutti nulli (i termini della diagonale principale possono essere numeri reali qualsiasi, anche nulli).

Esempio 106 Le seguenti matrici sono rispettivamente diagonale, triangolare alta, triangolare bassa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

29 Determinante

Definizione 107 Sia X un insieme. Una permutazione su X è un'applicazione biettiva

$$X \rightarrow X.$$

Esempio 108 Sia $X = \{1, 2, 3\}$ e consideriamo la terna ordinata $(2, 1, 3)$. In base alla nostra definizione di terna ordinata, $(2, 1, 3)$ è l'applicazione $X \rightarrow X$ tale che

$$1 \mapsto 2 \quad 2 \mapsto 1 \quad 3 \mapsto 3.$$

Quindi è una permutazione sull'insieme $X = \{1, 2, 3\}$.

Osservazione 109 Per definire una permutazione sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ basta assegnare una n -upla i cui termini sono tutti i numeri interi da 1 ad n , disposti in un ordine qualsiasi.

Esempio 110 Tutte le possibili permutazioni dell'insieme $\{1, 2, 3\}$ sono:

$$(1, 2, 3) (1, 3, 2) (2, 1, 3) (2, 3, 1) (3, 1, 2) (3, 2, 1).$$

Definizione 111 Sia σ una permutazione dell'insieme $\{1, \dots, n\}$ e siano $i, j \in \{1, \dots, n\}$ indici tali che

$$i < j \text{ e } \sigma(i) > \sigma(j).$$

Allora la coppia (i, j) sarà detta una inversione in σ . Definiamo poi il segno di σ , come il numero 1 oppure -1 , a seconda che il numero delle inversioni in σ sia pari oppure dispari. Il segno di σ sarà denotato con ϵ_σ .

Esempio 112 Le inversioni della permutazione $(2, 3, 1)$ sono $(1, 3)$ e $(2, 3)$. Quindi il segno di $(2, 3, 1)$ è 1. La permutazione $(2, 1, 3)$ ha solo l'inversione $(1, 2)$. Quindi il segno di $(2, 1, 3)$ è -1 . Le inversioni della permutazione $(2, 4, 3, 1)$ sono $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$. Quindi il segno di $(2, 3, 1, 4)$ è 1.

Definizione 113 Sia A una matrice quadrata di ordine n sui reali. Indicato con S_n l'insieme di tutte le permutazioni su $\{1, \dots, n\}$, definiamo il determinante di A come il numero

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

(talvolta si usa anche la notazione $\det A$).

Ad esempio nel caso $n = 3$, S_3 è costituito dalle permutazioni descritte nell'esempio 110. Quindi il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

è dato da

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Nel caso $n = 2$ abbiamo solo due permutazioni: $(1, 2)$ e $(2, 1)$; quindi il determinante di una matrice di ordine due è

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Il determinante di una matrice di ordine 1 è semplicemente uguale all'unico termine della matrice.

30 Sottomatrici

Definizione 114 Sia A una matrice di tipo $m \times n$, sia I un sottoinsieme di $\{1, \dots, m\}$ e sia J un sottoinsieme di $\{1, \dots, n\}$. Possiamo assumere

$$I = \{i_1, \dots, i_r\}, \text{ con } i_1 < i_2 < \dots < i_r$$

e

$$J = \{j_1, \dots, j_s\}, \text{ con } j_1 < j_2 < \dots < j_s.$$

Definiamo la sottomatrice di A individuata dagli insiemi di indici I, J come la matrice B di tipo $r \times s$ tale che

$$b_{hk} = a_{i_h j_k} \quad \forall h \in \{1, \dots, r\} \forall k \in \{1, \dots, s\}.$$

Tale matrice sarà denotata con

$$A_{I,J}.$$

Esempio 115 Sia

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$I = \{2, 4\}$, $J = \{2, 3, 5\}$. La sottomatrice individuata da I e J è

$$A_{I,J} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

In maniera meno precisa ma più intuitiva, possiamo dire che la sottomatrice $A_{I,J}$ si ottiene cancellando tutte le righe eccetto $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}$ e tutte le colonne eccetto $\mathbf{a}^{j_1}, \dots, \mathbf{a}^{j_s}$. O anche, si può dire che $A_{I,J}$ è formata dai quei termini che sono "all'incrocio" delle righe $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}$ e delle colonne $\mathbf{a}^{j_1}, \dots, \mathbf{a}^{j_s}$.

31 Minori

Definizione 116 Sia A una matrice sui reali. Un minore di A è il determinante di una qualunque sottomatrice quadrata di A .

Talvolta per abuso di linguaggio ci si riferisce al minore volendo parlare della sottomatrice; ad esempio, si dice “minore di ordine h ” per significare che il minore è il determinante di una sottomatrice di ordine h .

Esempio 117 I minori di ordine 2 della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

sono

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12 \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15.$$

I minori di ordine 1 non sono altro che i termini della matrice.

Definizione 118 Sia A una matrice quadrata di ordine n sui reali, sia a_{ij} un suo termine e poniamo

$$I = \{1, \dots, n\} - \{i\}, \quad J = \{1, \dots, n\} - \{j\}.$$

La sottomatrice $A_{I,J}$ è allora quadrata di ordine $n - 1$, e il suo determinante è un minore di A che prende il nome di minore complementare del termine a_{ij} . Il numero ottenuto moltiplicando tale minore complementare per $(-1)^{i+j}$ si chiama complemento algebrico del termine a_{ij} , e si indica con A_{ij} :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{\{1, \dots, n\} - \{i\}, \{1, \dots, n\} - \{j\}}|.$$

32 Sviluppo di Laplace

La seguente proposizione presenta una formula che è utile per calcolare determinanti di ordine elevato.

Proposizione 119 (Teorema di Laplace). Sia A una matrice quadrata di ordine n sui reali. Fissiamo un indice $i \in \{1, \dots, n\}$. Allora si ha:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{in}A_{in}$$

e

$$|A| = a_{1i}A_{1i} + \dots + a_{ni}A_{ni}.$$

Le formule ora presentate sono facili da ricordare: nella prima sono presenti tutti i termini della riga \mathbf{a}_i , moltiplicati per i rispettivi complementi algebrici; nella seconda succede lo stesso per i termini della colonna \mathbf{a}^i . Per questo motivo l'espressione

$$a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{in}A_{in}$$

prende il nome di *sviluppo* (di Laplace) secondo la riga \mathbf{a}_i , mentre l'espressione

$$a_{1i}A_{1i} + \cdots + a_{ni}A_{ni}.$$

prende il nome di *sviluppo* (di Laplace) secondo la colonna \mathbf{a}^i . La dimostrazione del teorema è concettualmente molto semplice: si tratta di mettere in evidenza nell'espressione del determinante i termini della riga o della colonna prescelta. Per esigenze di brevità, non possiamo entrare nei dettagli.

Esempio 120 Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Lo sviluppo del determinante secondo la prima riga è:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \\ & = (45 - 48) - 2 \cdot (36 - 42) + 3 \cdot (32 - 35) = -3 + 12 - 9 = 0. \end{aligned}$$

Lo sviluppo secondo la seconda colonna è:

$$\begin{aligned} & -2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = \\ & = -2 \cdot (36 - 42) + 5 \cdot (9 - 21) - 8 \cdot (6 - 12) = 12 - 60 + 48 = 0. \end{aligned}$$

Esercizio 121 Calcolare, utilizzando uno sviluppo di Laplace, il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

(suggerimento: conviene usare la seconda riga, perché compaiono due zeri).

33 Proprietà del determinante

Proposizione 122 Sia A una matrice quadrata sui reali e sia B la matrice ottenuta da A scambiando due righe \mathbf{a}_i e \mathbf{a}_j con $i \neq j$. Allora si ha

$$|B| = -|A|.$$

Rinunciamo a dimostrare questa proposizione.

Osserviamo che se le due righe scambiate sono uguali, cioè $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j$, allora $B = A$; quindi si ha $|A| = -|A|$, e dunque $|A| = 0$. Questo dimostra il seguente risultato.

Proposizione 123 Sia A una matrice quadrata sui reali che abbia due righe uguali (cioè ci sono due indici $i \neq j$ tali che $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j$). Allora si ha

$$|A| = 0.$$

Proposizione 124 Sia A una matrice quadrata sui reali, e sia B una matrice ottenuta da A moltiplicando una riga per uno scalare $h \in \mathbb{R}$. Allora si ha

$$|B| = h|A|.$$

Anche qui rinunciamo ai dettagli dimostrativi, anche se consisterebbero in un semplice conto sulla definizione del determinante (o, se si vuole, sullo sviluppo di Laplace secondo la riga che viene moltiplicata). In maniera simile si potrebbe dimostrare anche la seguente proposizione.

Proposizione 125 Siano A, B, C matrici quadrate di ordine n sui reali tali che per un indice i si abbia

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_h &= \mathbf{b}_h = \mathbf{c}_h \quad \forall h \neq i \\ \mathbf{a}_i &= \mathbf{b}_i + \mathbf{c}_i \end{aligned}$$

(quindi le matrici differiscono solo per la i -esima riga, e la i -esima riga di A è la somma della i -esima riga di B con la i -esima riga di C). Allora si ha:

$$|A| = |B| + |C|.$$

Esempio 126 Se consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

siamo nella situazione della proposizione 125, dunque si deve avere $|A| = |B| + |C|$. Ed infatti $|A| = 52$, $|B| = 48$, $|C| = 4$.

Che cosa si può dire riguardo al determinante di una somma di matrici?

Esempio 127 Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $|A| = 1$, $|B| = 0$, $|A + B| = 2$. Quindi

$$|A + B| \neq |A| + |B|.$$

Naturalmente, in alcuni casi il determinante di una somma può essere uguale alla somma dei determinanti, ma questo capita molto raramente.

Usando le proposizioni 123, 124 e 125 è molto facile dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione 128 *Sia A una matrice quadrata sui reali, e sia B una matrice ottenuta da A tramite una trasformazione elementare di terzo tipo. Allora si ha:*

$$|B| = |A|.$$

Un'altra conseguenza importante delle proposizioni 123, 124 e 125 è che se in una matrice c'è una riga che dipende dalle altre, allora il determinante è zero. In altre parole abbiamo la seguente proposizione.

Proposizione 129 *Sia A una matrice quadrata sui reali. Se le righe di A sono linearmente dipendenti allora si ha*

$$|A| = 0.$$

È possibile anche invertire questa proposizione; cioè si può dimostrare che se il determinante è uguale a zero, allora le righe sono linearmente dipendenti. Rimandiamo a dopo la trattazione di questo fatto.

Un'ultimo semplice (ma importante) fatto da tenere presente è il seguente.

Proposizione 130 *Tutte le proposizioni di questa sezione valgono anche per le colonne.*

34 Sistemi massimi indipendenti

Definizione 131 *Sia A una matrice sui reali di tipo $m \times n$ e sia $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ un sottoinsieme di $\{1, \dots, m\}$. Supponiamo che il sistema di righe $(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r})$ sia linearmente indipendente. Supponiamo poi che per ogni altro sottoinsieme $I' = \{i'_1, \dots, i'_{r'}\}$ che contenga propriamente I (quindi in particolare si deve avere $r' > r$), il sistema $(\mathbf{a}_{i'_1}, \dots, \mathbf{a}_{i'_{r'}})$ sia linearmente dipendente. In questa situazione si dice che $(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r})$ è un sistema massimo linearmente indipendente di righe di A . In maniera analoga si definisce un sistema massimo linearmente indipendente di colonne di A .*

Osservazione 132 *Sia $(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r})$ un sistema massimo linearmente indipendente di righe di una matrice A e sia \mathbf{a}_i un'altra riga (quindi $i \notin \{i_1, \dots, i_r\}$). Per definizione di sistema massimo, abbiamo che il sistema $(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}, \mathbf{a}_i)$ è linearmente dipendente. Per la proposizione 64 si ha che \mathbf{a}_i dipende dal sistema $(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r})$. Inoltre, ovviamente anche le righe $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}$ dipendono dal sistema stesso. Dunque ogni riga della matrice dipende dal sistema massimo $(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r})$.*

Osservazione 133 *Viceversa, sia $(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r})$ un sistema linearmente indipendente di righe di una matrice A , e supponiamo che ogni riga di A dipenda da questo sistema. Allora il sistema $(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r})$ è sicuramente un sistema massimo. Infatti, per ogni altro sottoinsieme $I' = \{i'_1, \dots, i'_{r'}\}$ che contenga propriamente I , il sistema $(\mathbf{a}_{i'_1}, \dots, \mathbf{a}_{i'_{r'}})$ ha almeno una riga che dipende da alcune delle rimanenti; dunque, ragionando come per la proposizione 61, otteniamo che questo sistema è linearmente dipendente.*

Dalle due osservazioni appena fatte ricaviamo che i sistemi massimi linearmente indipendenti sono esattamente i sistemi indipendenti di righe tali che ogni riga della matrice dipenda da loro.

Esercizio 134 *Dimostrare che due sistemi massimi linearmente indipendenti di righe di una matrice hanno lo stesso numero di righe (suggerimento: ragionare come per la proposizione 99).*

Naturalmente, lo stesso vale per i sistemi massimi di colonne linearmente indipendenti.

35 Teorema degli orlati

Definizione 135 *Sia A una matrice sui reali di tipo $m \times n$, sia*

$$|A_{I,J}|$$

un suo minore e siano $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$ indici tali che

$$i \notin I \text{ e } j \notin J.$$

Posto

$$I' = I \cup \{i\} \text{ e } J' = J \cup \{j\},$$

il minore

$$|A_{I',J'}|$$

sarà detto orlato di $|A_{I,J}|$ (tramite i e j).

Esempio 136 *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -3 & -5 & -7 \end{pmatrix},$$

consideriamo il minore

$$A_{\{1,3\},\{2,3\}} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}$$

e cerchiamo i suoi orlati. Dobbiamo scegliere un $i \notin \{1,3\}$ e un $j \notin \{2,3\}$; dunque i deve essere per forza 2, mentre j può essere sia 1 che 4. Dunque gli orlati del nostro minore sono

$$A_{\{1,3,2\},\{2,3,1\}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad A_{\{1,3,2\},\{2,3,4\}} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ -3 & -5 & -7 \end{vmatrix}.$$

Definizione 137 *Un minore fondamentale di una matrice sui reali è un minore non nullo tale che tutti i suoi orlati (se ce ne sono) sono nulli.*

Proposizione 138 (teorema degli orlati). Sia A una matrice sui reali e sia $|A_{I,J}|$ un minore fondamentale di A . Posto $I = \{i_1, \dots, i_r\}$, $J = \{j_1, \dots, j_r\}$, si ha che $(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r})$ è un sistema massimo di righe indipendenti di A e $(\mathbf{a}^{j_1}, \dots, \mathbf{a}^{j_r})$ è un sistema massimo di colonne indipendenti di A .

I seguenti fatti sono facili conseguenze del teorema degli orlati (omettiamo però i dettagli dimostrativi).

- Se il determinante di una matrice quadrata sui reali è uguale a zero, allora le sue righe sono linearmente dipendenti (e le sue colonne sono linearmente dipendenti).
- Dato un minore fondamentale, tutti i minori di ordine maggiore sono nulli.

Viceversa, se abbiamo un minore non nullo tale che tutti i minori di ordine maggiore sono nulli, ovviamente questo è un minore fondamentale (perché gli eventuali orlati hanno ordine maggiore). Dunque abbiamo che un minore fondamentale può anche essere caratterizzato come un minore che abbia ordine massimo possibile tra tutti i minori non nulli.

In particolare abbiamo che tutti i minori fondamentali hanno lo stesso ordine. Un'altra conseguenza, importante quanto immediata, del teorema degli orlati, è la seguente.

Proposizione 139 Un sistema massimo di righe e un sistema massimo di colonne di una matrice hanno lo stesso numero di elementi.

36 Rango

Ricapitoliamo le principali osservazioni fatte nella sezione precedente.

Osservazione 140 Data una matrice A sui reali, possiamo dire che i seguenti numeri sono tutti uguali ad uno stesso numero r :

- il massimo ordine per i minori non nulli
- l'ordine di un minore fondamentale
- il numero di righe di un sistema massimo di righe indipendenti
- il numero di colonne di un sistema massimo di colonne indipendenti

Definizione 141 Il numero r introdotto nell'osservazione precedente si chiama rango della matrice A .

Ci sono vari modi per trovare il rango di una matrice. Ne illustriamo uno con il seguente esempio.

Esempio 142 Troviamo il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo di trovare un minore fondamentale. Partiamo dal minore non nullo

$$|A_{\{1\},\{1\}}| = |1| = 1.$$

Vediamo se per caso tutti i suoi orlati sono nulli. L'orlato tramite $i = 2$ e $j = 2$ è

$$|A_{\{1,2\},\{1,2\}}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

L'orlato tramite $i = 3$ e $j = 2$ è

$$|A_{\{1,3\},\{1,2\}}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

L'orlato tramite $i = 2$ e $j = 3$ è

$$|A_{\{1,2\},\{1,3\}}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 3.$$

Siccome questo orlato è non nullo, il minore $|A_{\{1\},\{1\}}|$ non è fondamentale. A questo punto però possiamo ripartire dal minore non nullo $|A_{\{1,2\},\{1,3\}}|$. Vediamo se i suoi orlati sono tutti nulli. L'unico orlato possibile è

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Dunque il minore

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$$

è un minore fondamentale. Siccome il suo ordine è 2, il rango di A è 2.

37 Prodotto di matrici

Definizione 143 Siano $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ e $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ vettori numerici in \mathbb{R}^n . Definiamo il prodotto scalare standard di \mathbf{a} per \mathbf{b} come lo scalare

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \stackrel{\text{def.}}{=} a_1 b_1 + \dots + a_n b_n.$$

Esempio 144

$$(1, 2, 3, 4) \cdot (5, 6, 7, 8) = 5 + 12 + 21 + 32 = 70.$$

Definizione 145 Siano $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Definiamo il prodotto (righe per colonne) di A per B come la matrice $C \in \mathbb{R}^{m \times p}$ data da

$$c_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}^j \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, p\}$$

(quindi $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj}$). Tale prodotto sarà denotato con AB .

Esempio 146

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 44 & 50 & 56 \\ 83 & 98 & 113 & 128 \end{pmatrix}.$$

Esempio 147 Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo

$$AB = \begin{pmatrix} 14 & 15 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 22 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$AB \neq BA.$$

Questo esempio mostra che il prodotto di matrici non ha la proprietà commutativa. D'altra parte, come ulteriore esempio, possiamo osservare che se A è una matrice di tipo 3×2 e B è una matrice di tipo 2×4 , allora il prodotto AB è definito, mentre il prodotto BA non è definito. Naturalmente, in casi particolari può succedere che un prodotto AB sia uguale a BA , ma questo avviene molto raramente.

Per fortuna il prodotto di matrici, anche se non è commutativo, ha comunque altre utili proprietà. Riassumiamo qui di seguito le principali:

- $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n} \forall B, C \in \mathbb{R}^{n \times p}, \quad A(B + C) = AB + AC$
- $\forall A, B \in \mathbb{R}^{m \times n} \forall C \in \mathbb{R}^{n \times p}, \quad (A + B)C = AC + BC$
- $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n} \forall B \in \mathbb{R}^{n \times p} \forall C \in \mathbb{R}^{p \times q}, \quad (AB)C = A(BC)$
- $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n} \forall B \in \mathbb{R}^{n \times p} \forall h \in \mathbb{R}, \quad (hA)B = h(AB) = A(hB)$
- $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad |AB| = |A||B|$

38 Forma matriciale dei sistemi lineari

Consideriamo un sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sia A la matrice dei coefficienti e sia

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

una matrice di tipo $n \times 1$. Calcoliamo il prodotto AY :

$$AY = \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + \cdots + a_{mn}y_n \end{pmatrix}.$$

Dunque AY è la matrice di tipo $m \times 1$ costituita dai numeri ottenuti sostituendo (y_1, \dots, y_n) nei primi membri delle equazioni del sistema. Consideriamo la matrice B , di tipo $m \times 1$, costituita dai termini noti:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Allora abbiamo che

$$(y_1, \dots, y_n) \text{ è soluzione del sistema } \iff AY = B.$$

Per questo motivo, si dice che

$$AX = B$$

è la *forma matriciale* del sistema lineare. Conviene pensare X come una matrice di tipo $n \times 1$ costituita dalle incognite:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Ad esempio, la forma matriciale del sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = 4 \end{cases}$$

è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

39 Matrice identica

Definizione 148 Sia A la matrice quadrata di ordine n data da

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} .$$

Tale matrice si dice matrice identica di ordine n , e si indica generalmente con I_n (o a volte anche solo con I). I suoi termini si indicano spesso con δ_{ij} , e vengono detti simboli di Kronecker.

Quindi il simbolo di Kronecker δ_{ij} indica semplicemente il numero 1 se $i = j$, o il numero 0 se $i \neq j$. La matrice identica è una matrice diagonale, ed i termini della diagonale principale sono tutti uguali ad 1.

La matrice identica ha la seguente importante proprietà.

Proposizione 149 Si ha:

- $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad AI_n = A$
- $\forall B \in \mathbb{R}^{n \times p}, \quad I_n B = B$

Consideriamo i vettori numerici di \mathbb{R}^n dati dalle righe della matrice identica I_n :

$$(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1).$$

Se $n = 2$, il sistema è quello incontrato nell'esempio 94, e abbiamo visto che è un sistema di generatori di \mathbb{R}^2 . Allo stesso modo, in generale il sistema

$$(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)$$

è un sistema di generatori di \mathbb{R}^n . Poiché è anche linearmente indipendente, costituisce una base di \mathbb{R}^n .

Definizione 150 Il sistema costituito dai vettori numerici di \mathbb{R}^n dati dalle righe della matrice identica I_n si dice base standard di \mathbb{R}^n .

Le componenti di un vettore $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ rispetto alla base standard sono proprio a_1, \dots, a_n .

40 Matrici scalari

Sia $h \in \mathbb{R}$ e poniamo $S_h = hI_n$. Quindi S_h è una matrice diagonale che ha i termini della diagonale principale tutti uguali ad h . Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ abbiamo

$$AS_h = A(hI_n) = h(AI_n) = hA.$$

Allo stesso modo, se $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ si ha

$$S_h B = hB.$$

Quindi moltiplicare per S_h equivale a moltiplicare per h . Per questo motivo la matrice S_h si dice *matrice scalare*.

41 Matrice inversa

Definizione 151 Sia A una matrice quadrata di ordine n sui reali. La matrice A si dice invertibile se esiste una matrice B tale che

$$AB = I_n \text{ e } BA = I_n.$$

Definizione 152 Sia A una matrice quadrata di ordine n sui reali. Definiamo la matrice aggiunta di A come la matrice A^* data da

$$a_{ij}^* = A_{ji}$$

(ricordiamo che A_{ji} è il complemento algebrico di a_{ji}).

Proposizione 153 Una matrice quadrata A sui reali è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero. In tal caso c'è un'unica matrice B tale che

$$AB = I_n \text{ e } BA = I_n,$$

ed è data da

$$B = \frac{1}{|A|} A^*.$$

Definizione 154 Se A è una matrice invertibile, la matrice $\frac{1}{|A|} A^*$ si dice matrice inversa di A e si denota con A^{-1} .

Esempio 155 Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante è

$$|A| = 2(3 - 1) - 1(5 - 2) = 1.$$

Siccome il determinante è diverso da 0, la matrice è invertibile. Calcoliamo l'inversa. I complementi algebrici sono: $A_{11} = 2$, $A_{12} = -3$, $A_{13} = -1$, $A_{21} = -1$, $A_{22} = 2$, $A_{23} = 0$, $A_{31} = 1$, $A_{32} = -2$, $A_{33} = 1$. Dunque l'aggiunta è

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi l'inversa è

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = 1 \cdot A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

42 Sottospazi vettoriali

Definizione 156 Sia V uno spazio vettoriale. Un sottoinsieme non vuoto W di V sarà detto sottospazio vettoriale se sono verificati i seguenti fatti:

- $\forall \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W$;
- $\forall h \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{w} \in W, h\mathbf{w} \in W$.

Osservazione 157 Se W è un sottospazio di V , utilizzando l'addizione e la moltiplicazione per scalari definite su V possiamo definire due operazioni su W :

$$\begin{aligned} W \times W &\rightarrow W \\ (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) &\mapsto \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times W &\rightarrow W \\ (h, \mathbf{w}) &\mapsto h\mathbf{w}. \end{aligned}$$

Le operazioni su W sono in sostanza le stesse di quelle di V : l'unica differenza è che sono definite su insiemi "più piccoli" (in termini più precisi, si dice che le operazioni su W sono restrizioni delle operazioni su V). Poiché le proprietà richieste per gli spazi vettoriali valgono "in tutto V ", a maggior ragione valgono in W (per l'esistenza del vettore nullo e dell'opposto bisogna tenere presente che $\mathbf{0} = 0\mathbf{w}$ e $-\mathbf{w} = (-1)\mathbf{w}$). Dunque il sottospazio W , dotato delle due operazioni ora introdotte, è uno spazio vettoriale.

Proposizione 158 Sia $S = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ un sistema di vettori di uno spazio vettoriale V . L'insieme dei vettori che dipendono da S è un sottospazio vettoriale di V .

Definizione 159 Sia $S = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ un sistema di vettori di uno spazio vettoriale V . L'insieme dei vettori che dipendono da S si dice sottospazio generato da S , e si indica generalmente con $L(S)$ o con $\langle S \rangle$.

43 Spazi direttori

Definizione 160 Un vettore libero si dice parallelo ad una retta r , se è nullo oppure se i segmenti orientati che lo rappresentano sono paralleli ad r . Un vettore libero si dice parallelo ad un piano π , se è nullo oppure se i segmenti orientati che lo rappresentano sono paralleli a π .

Osservazione 161 Sia \mathbf{v} un vettore parallelo ad una retta r . Preso un qualunque punto A di r , sia AB il segmento orientato che rappresenta \mathbf{v} e ha origine in A . Siccome AB deve essere parallelo ad r , ed $A \in r$, otteniamo che AB è tutto contenuto in r . Quindi un vettore parallelo ad r può essere rappresentato con un segmento contenuto in r . Viceversa, se un vettore può essere rappresentato con un segmento contenuto in r , allora è ovviamente parallelo ad r . In definitiva, i vettori paralleli ad r possono essere caratterizzati come quei vettori che possono essere rappresentati con segmenti orientati contenuti in r . Analogamente vale per i vettori paralleli ad un piano.

Proposizione 162 *Sia \mathcal{V} lo spazio dei vettori liberi, sia r una retta e π un piano. L'insieme dei vettori paralleli ad r è un sottospazio di dimensione 1 di \mathcal{V} . L'insieme dei vettori paralleli a π è un sottospazio di dimensione 2 di \mathcal{V} . Infine, lo spazio \mathcal{V} ha dimensione 3.*

Per brevità, dobbiamo rinunciare a dimostrare questa proposizione, anche se non sarebbe difficile. Ad esempio, per dimostrare che l'insieme dei vettori paralleli ad r è un sottospazio di dimensione 1, basta prendere un vettore non nullo \mathbf{v} parallelo ad r ed osservare che ogni vettore parallelo ad r si può ottenere moltiplicando \mathbf{v} per uno scalare. Dunque l'insieme dei vettori paralleli ad r è il sottospazio generato da \mathbf{v} . Siccome una base è proprio (\mathbf{v}) , la dimensione è 1.

Definizione 163 *Lo spazio dei vettori paralleli ad una retta r si dice spazio direttore di r . L'insieme dei vettori paralleli ad un piano π si dice spazio direttore di π .*

Proposizione 164 *Un sistema (\mathbf{u}, \mathbf{v}) di vettori liberi è linearmente indipendente se e solo se i due vettori sono non nulli e non paralleli (cioè i segmenti che rappresentano \mathbf{u} non sono paralleli ai segmenti che rappresentano \mathbf{v}). Un sistema $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ di vettori liberi è linearmente indipendente se e solo se i tre vettori non sono paralleli ad uno stesso piano.*

Anche per questa proposizione dobbiamo rinunciare a riportare la dimostrazione, anche se non è difficile. Ad esempio, dire che due vettori (\mathbf{u}, \mathbf{v}) sono paralleli oppure uno dei due è nullo, equivale a dire che almeno uno dei due si può ottenere dall'altro moltiplicandolo per uno scalare. Ma questo equivale a dire che uno dei due dipende dall'altro, cioè che i due vettori sono dipendenti. Tenendo presente questa proposizione, per ottenere una base dello spazio direttore di un piano, basta prendere due vettori paralleli al piano, che siano non nulli e non paralleli tra loro. Per ottenere una base dello spazio dei vettori liberi, basta prendere tre vettori che non siano paralleli ad uno stesso piano. Infine, enunciamo altre due utili proposizioni, rinunciando ancora alla loro non difficile dimostrazione.

Proposizione 165 *Sia \mathcal{V} lo spazio dei vettori liberi. Dato un punto P e un sottospazio \mathcal{W} di \mathcal{V} di dimensione 1, esiste un'unica retta che passa per P e ha spazio direttore \mathcal{W} . Tale retta è costituita da tutti i punti del tipo*

$$P + \mathbf{w}$$

con $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$.

Proposizione 166 *Sia \mathcal{V} lo spazio dei vettori liberi. Dato un punto P e un sottospazio \mathcal{W} di \mathcal{V} di dimensione 2, esiste un unico piano che contiene P e ha spazio direttore \mathcal{W} . Tale piano è costituito da tutti i punti del tipo*

$$P + \mathbf{w}$$

con $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$.

44 Introduzione ai riferimenti

Sia r una retta. La definizione “classica” di riferimento su r consiste nell’assegnare un punto $O \in r$, detto *origine*, un segmento u (unità di misura), e un verso su r . Se P è un punto di r , si dice *ascissa* di P rispetto al riferimento dato, il numero x che ha per valore assoluto la misura di \overline{OP} (rispetto ad u), e per segno $+$ o $-$ a seconda che P segua o preceda O nel verso prescelto.

Consideriamo il vettore libero \mathbf{i} che è parallelo ad r , ha modulo uno (rispetto ad u) e verso concorde con il verso scelto su r . Poiché il vettore \mathbf{i} è un vettore non nullo parallelo ad r , costituisce un riferimento vettoriale (cioè una base) dello spazio direttore di r .

Poiché l’ascissa x del punto P è il numero che ha per valore assoluto $|\overline{OP}|$, e per segno $+$ o $-$ a seconda che OP sia o no concorde con \mathbf{i} , in base alla definizione 50 (tenendo presente che $|\mathbf{i}| = 1$) otteniamo che

$$P - O = x\mathbf{i}.$$

Quindi l’ascissa di P è la componente del vettore $P - O$ rispetto al riferimento vettoriale (\mathbf{i}) .

Notiamo inoltre che una qualsiasi base (\mathbf{i}) di \mathcal{V}_r determina un verso su r (quello concorde al verso di \mathbf{i}) ed una unità di misura (un qualsiasi segmento che rappresenta \mathbf{i}).

Per questi motivi, nei testi moderni si preferisce prendere come *definizione* di riferimento su r , una coppia costituita da un’origine $O \in r$ e da un riferimento vettoriale (\mathbf{i}) dello spazio direttore di r .

Consideriamo ora un piano π , e richiamiamo la definizione “classica” di un riferimento su π .

Innanzitutto si fissano due rette non parallele, dette “asse x ” e “asse y ” e si considera la loro intersezione O , che viene detta *origine* del riferimento. Poi, di solito, si fissa una unità di misura; tuttavia, in certi casi può essere utile fissare due unità di misura diverse per gli assi x e y . Quindi, in generale, una volta fissati gli assi si possono assegnare poi due riferimenti, rispettivamente sull’asse x e sull’asse y , aventi entrambi origine in O .

Sia P un punto di π . Detta r_P la retta passante per P e parallela all’asse y , chiamiamo P_x l’intersezione di r_P con l’asse x (P_x viene detta proiezione di P sull’asse x secondo la direzione dell’asse y). Analogamente, detta s_P la retta passante per P e parallela all’asse x , chiamiamo P_y l’intersezione di s_P con l’asse y (che viene detta proiezione di P sull’asse y secondo la direzione dell’asse x). L’ascissa di P_x nel riferimento fissato sull’asse x si dice *ascissa* di P ; l’ascissa di P_y nel riferimento fissato sull’asse y si dice *ordinata* di P . La coppia costituita dall’ascissa e dall’ordinata si chiama la coppia delle *coordinate* di P rispetto al riferimento fissato.

Come abbiamo visto poco fa, assegnare un riferimento sull’asse x di origine O , equivale ad assegnare una coppia (O, \mathbf{i}) , tale che \mathbf{i} è un vettore non nullo parallelo all’asse x . Analogamente, un riferimento sull’asse y corrisponde ad una coppia (O, \mathbf{j}) tale che \mathbf{j} è un vettore non nullo parallelo all’asse y .

Chiamiamo (x, y) le coordinate di P . Per quanto detto finora, abbiamo

$$P_x - O = x\mathbf{i}, \quad P_y - O = y\mathbf{j}.$$

Ma per la regola del parallelogramma, abbiamo anche che

$$P - O = (P_x - O) + (P_y - O).$$

In definitiva:

$$P - O = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

Dunque le coordinate di P sono proprio le componenti del vettore $P - O$ rispetto al riferimento (\mathbf{i}, \mathbf{j}) dello spazio direttore di π .

Notiamo inoltre che una volta assegnati l'origine O e un qualsiasi riferimento (\mathbf{i}, \mathbf{j}) dello spazio direttore di π , sono automaticamente determinati sia i due assi (le rette passanti per O e rispettivamente parallele ad \mathbf{i} e \mathbf{j}) che i due riferimenti su di essi.

Per questi motivi, nei testi moderni si preferisce prendere come *definizione* di riferimento su π , una coppia costituita da un'origine $O \in \pi$ e da un riferimento vettoriale (\mathbf{i}, \mathbf{j}) dello spazio direttore di r .

Nella prossima sezione stabiliremo quindi queste definizioni “moderne” dei riferimenti.

Notiamo infine che quanto detto qui a proposito del piano π , ci dà anche un'indicazione su come si dimostra la parte relativa ai piani della proposizione 162, cioè il fatto che i vettori paralleli ad un piano sono un sottospazio di dimensione 2.

45 Riferimenti

Definizione 167 *Sia r una retta. Un riferimento (cartesiano) su r è una coppia $(O, (\mathbf{i}))$, dove O è un punto di r , detto origine, e (\mathbf{i}) è un riferimento vettoriale dello spazio direttore di r . Se P è un qualunque punto di r , si dice ascissa di P rispetto al riferimento $(O, (\mathbf{i}))$ la componente del vettore $P - O$ rispetto alla base (\mathbf{i}) .*

Per definizione di componente, si ha

$$x \text{ ascissa di } P \iff P - O = x\mathbf{i}.$$

Osservazione 168 *Per fissare un riferimento vettoriale dello spazio direttore di una retta, basta scegliere un vettore \mathbf{i} non nullo parallelo alla retta. Una volta fissato un riferimento $(O, (\mathbf{i}))$ su una retta, spesso conviene assumere come unità di misura per i segmenti un segmento rappresentante \mathbf{i} . Con questa scelta dell'unità di misura, si ha*

$$|\mathbf{i}| = 1.$$

Siccome i vettori di modulo 1 vengono detti versori, spesso \mathbf{i} viene detto versore del riferimento.

Definizione 169 Sia π un piano. Un riferimento (cartesiano) su π è una coppia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$, dove O è un punto di π , detto origine, e (\mathbf{i}, \mathbf{j}) è un riferimento vettoriale dello spazio direttore di π . Se P è un qualunque punto di π , le componenti (x, y) del vettore $P - O$ rispetto alla base (\mathbf{i}, \mathbf{j}) vengono dette coordinate di P rispetto al riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$. La coordinata x viene detta ascissa e y ordinata. L'unica retta contenente O e parallela ad \mathbf{i} viene detta asse delle ascisse (o asse x) del riferimento. L'unica retta contenente O e parallela a \mathbf{j} viene detta asse delle ordinate (o asse y) del riferimento. Tali rette sono spesso considerate come rette orientate, fissando i versi concordi rispettivamente ad \mathbf{i} e a \mathbf{j} . Se i vettori \mathbf{i} e \mathbf{j} sono rappresentati da segmenti congruenti, il riferimento viene detto monometrico.

Per definizione di componenti si ha

$$(x, y) \text{ coordinate di } P \iff P - O = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

Osservazione 170 Per fissare un riferimento vettoriale dello spazio direttore di un piano, basta scegliere due vettori \mathbf{i} e \mathbf{j} paralleli al piano, non nulli e non paralleli tra loro. Se il riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ è monometrico, spesso conviene assumere come unità di misura un segmento congruente ai rappresentanti di \mathbf{i} e \mathbf{j} . Con questa scelta dell'unità di misura, i vettori \mathbf{i} e \mathbf{j} sono dunque versori, detti versori degli assi.

Definizione 171 Un riferimento (cartesiano) dello spazio è definito come una coppia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$, dove O è un punto, detto origine, e $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ è un riferimento vettoriale dello spazio dei vettori liberi. Se P è un qualunque punto di π , le componenti (x, y, z) del vettore $P - O$ rispetto alla base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ vengono dette coordinate di P rispetto al riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$. In particolare x viene detta ascissa, y ordinata e z quota. L'unica retta contenente O e parallela ad \mathbf{i} viene detta asse delle ascisse (o asse x) del riferimento. L'unica retta contenente O e parallela a \mathbf{j} viene detta asse delle ordinate (o asse y) del riferimento. L'unica retta contenente O e parallela a \mathbf{k} viene detta asse delle quote (o asse z) del riferimento. Tali rette sono spesso considerate come rette orientate, fissando i versi concordi rispettivamente ad \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} . Se i vettori \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} sono rappresentati da segmenti congruenti, il riferimento viene detto monometrico.

Osservazione 172 Per fissare un riferimento vettoriale dello spazio dei vettori liberi, basta scegliere tre vettori \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} non nulli e non paralleli ad uno stesso piano. Se il riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ è monometrico, spesso conviene assumere come unità di misura un segmento congruente ai rappresentanti di \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} . Con questa scelta dell'unità di misura, i vettori \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} sono dunque versori, detti versori degli assi.

Proposizione 173 Sia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ un riferimento su un piano π , sia P un punto di coordinate (x, y) e sia \mathbf{v} un vettore di componenti (l, m) (rispetto al riferimento vettoriale (\mathbf{i}, \mathbf{j})). Allora le coordinate del punto $P + \mathbf{v}$ sono $(x + l, y + m)$.

Dimostrazione. Per definizione $P + \mathbf{v}$ è l'unico punto Q tale che PQ sia un rappresentante di \mathbf{v} . Dunque

$$Q - O = (P - O) + (Q - P) = (P - O) + \mathbf{v}.$$

Siccome le componenti di $P - O$ sono (x, y) e le componenti di \mathbf{v} sono (l, m) le componenti di $Q - O$ sono $(x + l, y + m)$. Quindi le coordinate di $Q = P + \mathbf{v}$ sono $(x + l, y + m)$, come volevamo dimostrare.

Esercizio 174 (facoltativo). Sia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ un riferimento su un piano π e siano P, P' punti di π , di coordinate rispettivamente (x, y) e (x', y') . Dimostrare che le componenti del vettore $P' - P$ (rispetto al riferimento vettoriale (\mathbf{i}, \mathbf{j})) sono $(x' - x, y' - y)$.

46 Rappresentazioni di una retta nel piano

Definizione 175 Sia r una retta. Un vettore non nullo parallelo ad r viene anche detto un vettore direzionale di r .

Definizione 176 Sia r una retta contenuta in un piano π , e si fissi un riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ di π . Le componenti (l, m) di un vettore direzionale di r vengono dette una coppia di numeri direttori di r .

Osservazione 177 Una coppia di numeri direttori non può mai essere $(0, 0)$, perché i vettori direzionali sono non nulli. Poiché i vettori non nulli paralleli ad r sono tutti multipli l'uno dell'altro, ogni retta ha infinite coppie di numeri direttori, tutte proporzionali tra loro. Questo fatto può anche essere espresso dicendo che una coppia di numeri direttori è definita a meno di un fattore (non nullo) di proporzionalità.

Proposizione 178 Sia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ un riferimento di un piano π , sia P_0 un punto di coordinate (x_0, y_0) , sia \mathbf{v} un vettore non nullo di componenti (l, m) e sia r la retta contenente P_0 e parallela a \mathbf{v} . Se P è un qualunque punto di π e (x, y) sono le sue coordinate, si ha

$$P \in r \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

Dimostrazione. Si ha

$$P \in r \iff P - P_0 \text{ è parallelo a } \mathbf{v} \iff \exists t \in \mathbb{R} : P - P_0 = t\mathbf{v}.$$

Siccome

$$P - P_0 = t\mathbf{v} \iff P = P_0 + t\mathbf{v} \iff (x, y) = (x_0 + tl, y_0 + tm)$$

concludiamo

$$P \in r \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

come volevamo dimostrare.

Definizione 179 Nella situazione della proposizione ora dimostrata, l'affermazione

$$P \in r \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

viene sinteticamente espressa dicendo che

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

sono le equazioni parametriche della retta r .

Osservazione 180 Fissato un riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ di un piano π , ogni retta r in π può essere rappresentata con delle equazioni parametriche: basta scegliere un punto $P_0 \in r$ e un vettore direzionale di r .

Avendo a disposizione le coordinate (x_0, y_0) di un punto di r e i numeri direttori (l, m) , le equazioni parametriche si scrivono subito:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

Viceversa, delle equazioni di questo tipo rappresentano sempre una retta: quella passante per il punto di coordinate (x_0, y_0) e parallela al vettore di componenti (l, m) .

Proposizione 181 Sia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ un riferimento di un piano π e sia r una retta contenuta in π . Allora esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che, se P è un qualunque punto di π e (x, y) sono le sue coordinate, si ha

$$P \in r \iff ax + by + c = 0.$$

Inoltre $(-b, a)$ risulta essere una coppia di numeri direttori di r .

Dimostrazione. Sia P_0 un punto di r e sia \mathbf{v} un vettore direzionale. Diciamo (l, m) le componenti di \mathbf{v} e (x_0, y_0) le coordinate di P_0 . Si ha

$$\begin{aligned} P \in r &\iff P - P_0 \text{ è parallelo a } \mathbf{v} \iff \\ &\iff P - P_0 \text{ e } \mathbf{v} \text{ sono linearmente dipendenti} \iff \\ &\iff (x - x_0, y - y_0) \text{ e } (l, m) \text{ sono linearmente dipendenti} \iff \\ &\iff \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ l & m \end{vmatrix} = 0 \iff m(x - x_0) - l(y - y_0) = 0 \iff \\ &\iff mx - ly - mx_0 + ly_0 = 0 \end{aligned}$$

A questo punto basta porre

$$a = m, \quad b = -l, \quad c = -mx_0 + ly_0.$$

Siccome $(-b, a) = (l, m)$ sono le componenti del vettore direzionale \mathbf{v} , $(-b, a)$ è una coppia di numeri direttori di r .

Definizione 182 Nella situazione della proposizione ora dimostrata, l'affermazione

$$P \in r \iff ax + by + c = 0.$$

viene sinteticamente espressa dicendo che

$$ax + by + c = 0$$

è l'equazione cartesiana ordinaria della retta r .

Siccome $ax + by + c = 0$ può essere visto come un altro modo di scrivere l'equazione lineare $ax + by = -c$, possiamo dire che le rette nel piano sono rappresentate da equazioni lineari. Se $b \neq 0$, un altro modo equivalente di scrivere l'equazione è

$$y = mx + q,$$

con $m = -\frac{a}{b}$ e $q = -\frac{c}{b}$ (equazione esplicita). Se $b = 0$ allora $a \neq 0$, e l'equazione può essere messa nella forma

$$x = my + q$$

con $m = -\frac{b}{a}$ e $q = -\frac{c}{a}$.

Esercizio 183 (facoltativo). Dimostrare che una qualsiasi equazione del tipo $ax + by + c = 0$ con $(a, b) \neq (0, 0)$ rappresenta una retta, e che se due equazioni di questo tipo rappresentano la stessa retta allora sono l'una multiplo dell'altra.

47 Ortogonalità

Come si traduce l'idea di rette perpendicolari in termini puramente insiemistici? Naturalmente, c'è bisogno di assumere altri assiomi. Assumiamo come evidente il seguente fatto

- Sia r una retta contenuta in un piano π . Allora $\pi - r$ è unione di due sottoinsiemi disgiunti, detti *semipiani* individuati da r , tali che due punti di $\pi - r$ stanno nello stesso semipiano se e solo se il segmento che li congiunge non incontra r .

Definizione 184 Siano r ed s due rette non parallele in un piano π , sia σ uno dei semipiani individuati da r e sia τ uno dei semipiani individuati da s . L'intersezione $\sigma \cap \tau$ verrà detta angolo convesso proprio. Se σ' è l'altro semipiano individuato da r , gli angoli convessi propri $\sigma \cap \tau$ e $\sigma' \cap \tau$ verranno detti supplementari tra loro.

Così come per i segmenti, la possibilità di trasportare gli angoli può essere "tradotta" in un assioma:

- Esiste una particolare relazione d'equivalenza nell'insieme degli angoli convessi propri, detta *congruenza*

Non possiamo soffermarci ad illustrare gli assiomi riguardanti la relazione di congruenza tra angoli.

Definizione 185 *Un angolo convesso proprio si dice retto se è congruente ad un suo supplementare. Due rette non parallele in un piano si dicono ortogonali, o perpendicolari, se individuano un angolo retto. Due rette qualunque si dicono ortogonali se sono rispettivamente parallele a due rette perpendicolari contenute in un piano.*

È un fatto evidente (e che d'altra parte non sarebbe difficile dimostrare a partire dagli assiomi) che se due rette in un piano sono perpendicolari, allora tutti e quattro gli angoli da esse individuati sono retti.

Definizione 186 *Un riferimento, in un piano o nello spazio, si dice ortogonale se gli assi sono a due a due perpendicolari.*

Assumiamo come noto il teorema di Pitagora, che possiamo enunciare nella seguente forma.

Proposizione 187 *(teorema di Pitagora). Siano r ed s rette perpendicolari contenute in un piano, sia O il loro punto comune, sia A un punto su r e B un punto su s . Allora si ha*

$$|\overline{AB}|^2 = |\overline{OA}|^2 + |\overline{OB}|^2.$$

Corollario 188 *Sia π un piano e sia fissato in π un riferimento monometrico ortogonale $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$. Per ogni vettore \mathbf{v} parallelo a π , dette (l, m) le sue componenti, si ha*

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{l^2 + m^2}.$$

Dimostrazione. Per definizione di componenti, si ha

$$\mathbf{v} = l\mathbf{i} + m\mathbf{k}.$$

Sia AO un rappresentante di $l\mathbf{i}$ e OB un rappresentante di $m\mathbf{k}$. Dunque AB è un rappresentante di \mathbf{v} . Poiché il riferimento è ortogonale possiamo supporre che AO e OB stiano su rette perpendicolari; inoltre, poiché il riferimento è monometrico, possiamo assumere $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$. Dunque, tenendo presente il teorema di Pitagora, si ha:

$$|\mathbf{v}|^2 = |\overline{AB}|^2 = |\overline{OA}|^2 + |\overline{OB}|^2 = |l\mathbf{i}|^2 + |m\mathbf{j}|^2 = l^2 + m^2,$$

da cui

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{l^2 + m^2},$$

come volevamo dimostrare.

48 Distanza

Definizione 189 Si dice distanza tra due punti A e B il modulo del segmento \overline{AB} . Tale distanza sarà indicata con $d(A, B)$.

Proposizione 190 Sia π un piano e sia fissato in π un riferimento monometrico ortogonale. Se P e P' sono due punti, di coordinate rispettivamente (x, y) e (x', y') , allora si ha

$$d(P, P') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}.$$

Dimostrazione. Per l'esercizio 174, le componenti del vettore $P' - P$ sono

$$(x' - x, y' - y);$$

dunque si ha

$$d(P, P') = |\overline{PP'}| = |P' - P| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2},$$

come volevamo dimostrare.

49 Circonferenza

Definizione 191 Sia π un piano, sia $C \in \pi$ e sia r un numero reale positivo. L'insieme dei punti di π aventi distanza r da C si dice circonferenza in π di centro C e raggio r .

Se in π è fissato un riferimento monometrico ortogonale e se Γ è una circonferenza in π di centro C e raggio r , dette (x_0, y_0) le coordinate di C e (x, y) le coordinate di un qualunque punto $P \in \pi$, si ha

$$\begin{aligned} P \in \Gamma &\iff d(P, C) = r \iff \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \iff \\ &\iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \iff \\ &\iff x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0. \end{aligned}$$

Ponendo $a = -2x_0$, $b = -2y_0$, $c = x_0^2 + y_0^2 - r^2$, si ha

$$P \in \Gamma \iff x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Questo fatto viene espresso sinteticamente dicendo che

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

è l'equazione cartesiana ordinaria della circonferenza Γ . Non sarebbe difficile provare che ogni equazione di questo tipo, con $4c < a^2 + b^2$, rappresenta una circonferenza, e che due diverse equazioni di questo tipo rappresentano circonferenze diverse.

50 Altri risultati sui sistemi lineari

Enunciamo il seguente teorema.

Proposizione 192 (teorema di Rouché-Capelli). *Siano A e A' la matrice dei coefficienti e la matrice completa di un sistema lineare. Allora il sistema è compatibile se e solo se A e A' hanno lo stesso rango.*

I seguenti due fatti forniscono un modo alternativo per calcolare il rango di una matrice.

Proposizione 193 *Se una matrice B è ottenuta da A tramite una sequenza di trasformazioni elementari, allora A e B hanno lo stesso rango.*

Proposizione 194 *Il rango di una matrice a scalini è uguale al numero di righe non nulle, e quindi al numero dei pivot.*

Dunque per calcolare il rango di una matrice qualunque, la si può ridurre a scalini e contare le righe non nulle ottenute.

Un'altra immediata conseguenza delle proposizioni precedenti è il seguente risultato.

Proposizione 195 *Se la matrice dei coefficienti e la matrice completa di un sistema lineare in n incognite hanno entrambe rango r , allora le variabili libere sono $n - r$, e quindi le soluzioni si ottengono in corrispondenza della scelta di $n - r$ valori arbitrari (in particolare, se $n = r$ c'è un'unica soluzione).*

Parlando informalmente, più il rango è basso rispetto al numero delle incognite, più soluzioni ci sono.

Riportiamo un'ultima informazione sui sistemi lineari, riguardante il metodo di Gauss. Una volta ridotta a scalini la matrice del sistema, invece di procedere con le sostituzioni, è possibile effettuare ulteriori semplificazioni, annullando anche gli elementi *al di sopra* dei pivot. Si ottiene un sistema risolvibile senza sostituzioni, semplicemente assegnando valori arbitrari alle variabili libere e ricavando da ciascuna equazione le incognite i cui coefficienti sono pivot. Questa variante del metodo prende il nome di *metodo di Gauss-Jordan*. Dovendo risolvere il sistema “a mano”, probabilmente Gauss-Jordan riduce la probabilità di commettere errori. Tuttavia, dal punto di vista computazionale è un metodo “più costoso”.

51 Esempi di prove d'esame

Esempio 196 *Rispondere ai seguenti quesiti entro un'ora e quaranta minuti.*

1. Siano $\mathbf{a} = (1, 2, 0, -1)$, $\mathbf{b} = (0, 1, -1, 3)$, $\mathbf{c} = (3, 0, 0, 2)$ vettori dello spazio \mathbb{R}^4 . Calcolare

$$3\mathbf{a} - \mathbf{c} + 2(\mathbf{c} - 3\mathbf{b})$$

[3 punti]

2. Siano

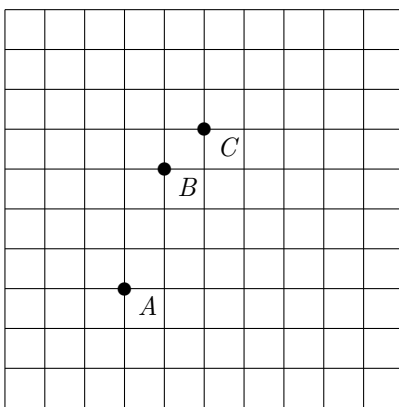
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calcolare

$$AB^t - C.$$

[4 punti]

3. Disegnare nella figura qui sotto il punto $D = A + 2(C - B)$ e il punto $E = B + (D - A)$



[3 punti]

4. Calcolare il seguente determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

[4 punti]

5. Trovare le componenti del vettore $(1, 1, 0)$ rispetto alla base

$$((1, 0, 0), (0, 2, 1), (0, 3, 2)).$$

[4 punti]

6. Trovare il seguente determinante, senza sviluppare il calcolo ma usando l'esercizio 4 e le proprietà dei determinanti:

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 10 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

[4 punti]

7. Una matrice quadrata si dice tridiagonale se

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i, j : |i - j| > 1.$$

Scrivere una matrice tridiagonale che non sia diagonale. [4 punti]

8. Fissato in un piano un riferimento, scrivere un'equazione cartesiana ordinaria della retta

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$$

[4 punti]

9. Dimostrare, a partire dagli assiomi riportati negli appunti, che la relazione di parallelismo tra rette dello spazio è una relazione di equivalenza. [3 punti]

Esempio 10 Rispondere ai seguenti quesiti entro un'ora e quaranta minuti.

1. Siano $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (1, -1, -2)$, $\mathbf{c} = (1, 0, 2)$ vettori dello spazio \mathbb{R}^3 .
Calcolare

$$((\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}$$

[4 punti]

2. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calcolare

$$-(A + 2B) + C.$$

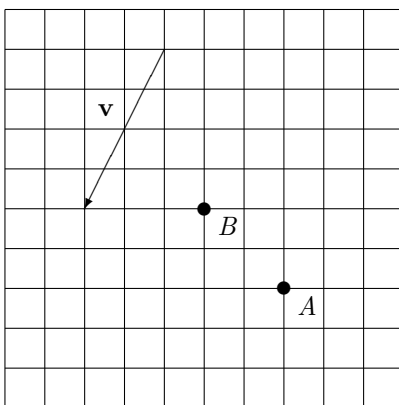
[3 punti]

3. Detto \mathbf{v} il vettore libero rappresentato dal segmento orientato disegnato nella figura qui sotto, disegnare un rappresentante del vettore

$$\mathbf{w} = (A - B) - \mathbf{v}$$

e il punto

$$C = B + \mathbf{v}$$



[3 punti]

4. Dire se il seguente sistema di vettori è linearmente dipendente o indipendente (suggerimento: considerando la matrice che ha per righe i vettori assegnati, si può usare il teorema degli orlati):

$$((1, 2, 0, 0), (0, 2, -1, 2), (-1, 2, -2, 4))$$

[4 punti]

5. Risolvere col metodo di Gauss il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ 3y - 5z = 3 \end{cases}$$

[4 punti]

6. Dedurre dall'esercizio precedente, senza effettuare calcoli, il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

[4 punti]

7. Lo spazio dei vettori liberi è finitamente generato? Perché? [4 punti]

8. Fissato in un piano un riferimento monometrico ortogonale, scrivere l'equazione cartesiana ordinaria della circonferenza di centro $P(1, 2)$ e raggio 3. [4 punti]

9. Sia V uno spazio vettoriale. Dimostrare che

$$0\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in V$$

[3 punti]

Contents

1	Richiami	1
2	n -uple	3
3	Prodotto cartesiano	3
4	Matrici	4
5	Spazi vettoriali numerici reali	6
6	Spazi vettoriali di matrici	9
7	Relazioni	10
8	Rette e piani	12
9	Versi su una retta	15
10	Segmenti	16
11	Congruenza, lunghezze, misura	16
12	Vettori liberi ordinari	18
13	Operazioni tra vettori liberi	18
14	Spazio vettoriale dei vettori liberi	20
15	Spazi vettoriali	21
16	Combinazioni lineari	22
17	Dipendenza e indipendenza lineare	23
18	Equazioni lineari	26
19	Sistemi lineari	28
20	Trasformazioni elementari	29
21	Matrici a scalini	34
22	Procedimento di riduzione a scalini	35
23	Risoluzione di un sistema con matrice completa a scalini	37
24	Metodo di Gauss	39

25	Lemma di Steinitz	41
26	Sistemi di generatori	42
27	Basi	43
28	Matrici particolari	45
29	Determinante	46
30	Sottomatrici	47
31	Minori	48
32	Sviluppo di Laplace	48
33	Proprietà del determinante	49
34	Sistemi massimi indipendenti	51
35	Teorema degli orlati	52
36	Rango	53
37	Prodotto di matrici	54
38	Forma matriciale dei sistemi lineari	55
39	Matrice identica	57
40	Matrici scalari	57
41	Matrice inversa	58
42	Sottospazi vettoriali	59
43	Spazi direttori	59
44	Introduzione ai riferimenti	61
45	Riferimenti	62
46	Rappresentazioni di una retta nel piano	64
47	Ortogonalità	66
48	Distanza	68
49	Circonferenza	68

50 Altri risultati sui sistemi lineari	69
51 Esempi di prove d'esame	69