

# Appunti del modulo di Geometria

Scienza e Ingegneria dei Materiali - A. A. 2004-2005

Dott. A. De Paris

## 1 Premessa

*Obiettivo formativo* del modulo di Geometria è acquisire le conoscenze di base della geometria analitica e dell'algebra lineare. Quali siano per noi queste conoscenze di base, è specificato nei *contenuti* del corso:

Algebra lineare: spazi vettoriali, matrici, determinanti, sistemi lineari, trasformazioni lineari, autovettori, autovalori, forme quadratiche.  
Geometria analitica in due e tre dimensioni.

Tra le domande d'esame ci potrà dunque essere ad esempio

- Che cos'è uno spazio vettoriale?
- Che cos'è una matrice?

O simili.

La risposta alle domande del tipo

“che cos'è...?”

è contenuta nelle *definizioni*.

Non basta però conoscere gli oggetti matematici: bisogna sapere anche alcuni fatti (affermazioni) che riguardano tali oggetti. Ad esempio, per conoscere il teorema di Pitagora, non basta conoscere che cosa siano un cateto, l'ipotenusa, il quadrato costruito su di essi, ecc., ma bisogna soprattutto sapere l'affermazione riguardante questi oggetti: il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente all'unione dei due quadrati costruiti sui cateti.

I fatti (affermazioni) da conoscere sono contenuti nelle *proposizioni*.

Infine, cosa forse più importante, bisogna sapere *perché* sono vere le proposizioni enunciate. Bisogna quindi fare dei ragionamenti.

La risposta alle domande del tipo

“perché è vera la Proposizione ...?”

è contenuta nelle *dimostrazioni*.

In buona sostanza, la preparazione “tecnica” di un esame di Matematica consiste nello studio di definizioni, proposizioni e dimostrazioni. In effetti lo

studente troverà in questi appunti anche qualcos'altro: ad esempio *prerequisiti*, *assiomi*, *notazioni*, *osservazioni*, *corollari*, *esempi*, *esercizi*. Ora spiegheremo brevemente in cosa consistono, ma anticipiamo subito che tutte queste cose possono essere viste come particolari tipi di definizioni, proposizioni o dimostrazioni. Cominciamo ad esporre brevemente cosa intendiamo per *prerequisito*.

Quando si spiega che cos'è un certo oggetto (cioè si dà una definizione), lo si fa in termini di oggetti più semplici. Ad esempio, per definire “cateto” c'è bisogno (tra l'altro) di aver prima definito “lato”; per definire “lato” c'è bisogno della definizione di “segmento”; per definire “segmento” c'è bisogno di “insieme” e “punto” . . . Non si può però andare indietro all'infinito: c'è bisogno di assumere qualcosa come punto di partenza. Ad esempio per noi “insieme” e “punto” saranno “nozioni primitive”, non saranno cioè spiegate in termini di altre nozioni più semplici. In questi casi scriveremo **Prerequisito** invece di **Definizione**.

Dunque per noi un prerequisito è una “definizione iniziale”, è qualcosa che noi assumiamo non abbia bisogno di ulteriore spiegazione. Usiamo la parola “prerequisito” perché tra questi includeremo anche qualche nozione che assumiamo nota non per la sua semplicità, ma perché è nota dai corsi di studio precedenti, dal precorso o dal modulo di Analisi. Questi prerequisiti però saranno davvero pochi: il pericolo di non capire qualcosa per “carezza di basi” sarà molto molto basso. In pratica è come se ricominciassimo tutto da zero (o, al Massimo, da tre).

Un discorso analogo può essere fatto per le proposizioni. Quando dimostriamo una proposizione, cioè spieghiamo perché una proposizione è vera, lo facciamo usando il fatto che sono vere altre proposizioni più semplici. C'è bisogno dunque di assumere qualche proposizione “di partenza”. Ad esempio per noi il fatto che *comunque si prendano due punti distinti, esiste una ed una sola retta che li contiene entrambi* sarà una “verità evidente”, non sarà cioè dimostrata a partire da altre verità più semplici da comprendere. In questi casi scriveremo **Assioma** invece di **Proposizione**. Dunque per noi un assioma è una “proposizione iniziale”, è qualcosa che noi assumiamo non abbia bisogno di ulteriore dimostrazione.<sup>1</sup>

Per limiti di tempo, inoltre, dovremo rinunciare a riportare le dimostrazioni di alcune proposizioni. Questo però non significa che per noi tali proposizioni sono assiomi (anche se poi agli effetti pratici è come se lo fossero).

Il discorso riguardante *notazioni*, *osservazioni*, *corollari*, *esempi* ed *esercizi* è più semplice:

---

<sup>1</sup>Avvertiamo che, rispetto agli standard di rigore matematici attuali, siamo un po' indietro. Inquadrando la matematica nella moderna logica formale, gli assiomi possono venire “assorbiti” nelle definizioni (la parola “assioma” assume quindi un nuovo significato) e le nozioni primitive ridotte ad una sola: quella di insieme. Rimangono solo definizioni, proposizioni e dimostrazioni. Anzi, la logica formale consente anche di prescindere da qualsiasi aspetto semantico, riducendo quindi la matematica alle sole dimostrazioni (e la parola “dimostrazione” assume quindi un nuovo significato). Non possiamo però illustrare qui in dettaglio questi aspetti, per limiti di tempo.

- **Notazione:** è in effetti una definizione; per noi la differenza è che mentre introducendo una definizione spieghiamo il significato di una certa parola nuova, introducendo una notazione spieghiamo il significato di un certo simbolo nuovo <sup>2</sup>.
- **Osservazione:** in genere contiene alcune semplici affermazioni e deduzioni, che sarebbe pesante presentare in proposizioni e dimostrazioni separate.
- **Corollario:** segue subito una proposizione, ed è una nuova proposizione la cui dimostrazione si ottiene sulla base della proposizione precedente con poche rapide deduzioni.

Il significato di “esempi” e di “esercizi” dovrebbe essere abbastanza chiaro, quindi non ci soffermiamo.

Dunque la preparazione dell’esame tecnicamente consiste nell’apprendimento delle Definizioni, Proposizioni e Dimostrazioni (e delle loro “varianti”). Questi appunti contengono un’esposizione rapida, ma sufficientemente dettagliata, di questi elementi. Sono pensati soprattutto come supporto per poter ripassare rapidamente gli argomenti in vista dell’esame. D’altra parte, dovrebbero essere utili anche in fase di studio durante il corso. Per questo motivo, al di fuori degli elementi definizione-proposizione-dimostrazione, abbiamo inserito qualche piccolo commento illustrativo o di raccordo.

Un’illustrazione più ampia verrà fatta durante le lezioni. Ma ci teniamo a precisare che quello che si dice “in più” a lezione non è strettamente materia d’esame: serve solo come facilitazione all’apprendimento, e per rendere meno pesante l’esposizione. Sconsigliamo vivamente gli studenti di conservare gli appunti di tutto ciò che si dice a lezione: appesantirebbe troppo il ripasso finale.

Naturalmente, lo studio di questi argomenti non è fine a sé stesso: serve come strumento per la risoluzione di problemi di vario tipo. Per questo, l’effettivo apprendimento delle definizioni e dei risultati trattati si controlla soprattutto risolvendo esercizi. La parte principale dell’esame di Geometria consisterà dunque in esercizi scritti da risolvere. Alla fine degli appunti riporteremo alcuni esempi di prove d’esame.

## 2 Richiami

### 2.1 Insiemi

**Prerequisito 1** *Assumiamo come note la nozione di insieme e di elemento di un insieme.*

Ovviamente, per dire che  $x$  è un elemento di un insieme  $X$ , useremo anche altre espressioni, come ad esempio: “ $x$  appartiene a  $X$ ”, “ $x$  sta in  $X$ ”, “ $X$  ha  $x$  come elemento”, ecc.

---

<sup>2</sup>Nella pratica corrente, le notazioni vengono incluse nelle definizioni. Qualche volta faremo anche noi così.

**Assioma 1** Siano  $A$  e  $B$  insiemi. Allora  $A$  e  $B$  sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi.

**Notazione 1** Un insieme sarà generalmente determinato scrivendo tra parentesi graffe  $\{\}$  chi sono i suoi elementi.

**Esempio 1** L'insieme  $\{a, b, t\}$  è l'insieme che ha per elementi  $a$ ,  $b$  e  $t$  (e nessun altro). L'insieme

$\{\text{capoluoghi di provincia campani nel 2003}\}$

è l'insieme che ha per elementi *Avellino, Benevento, Caserta, Napoli e Salerno*.<sup>3</sup>

L'insieme  $\{b, t, a\}$  è uguale all'insieme  $\{a, b, t\}$ . L'insieme  $\{a, b, b, t, t, t\}$  è sempre uguale all'insieme  $\{a, b, t\}$  (il fatto che si ripetano più volte  $b$  e  $t$  non aggiunge nulla all'informazione che  $b$  e  $t$  sono elementi dell'insieme).

**Definizione 1** Siano  $A$  e  $B$  insiemi. L'intersezione di  $A$  e  $B$  è l'insieme degli elementi che appartengono sia ad  $A$  che a  $B$ . L'unione di  $A$  e  $B$  è l'insieme i cui elementi sono tutti gli elementi di  $A$ , tutti gli elementi di  $B$ , e nessun altro. La differenza di  $A$  e  $B$  è l'insieme i cui elementi sono gli elementi di  $A$  che non appartengono a  $B$ .

L'insieme  $A$  si dice *incluso* (o *contenuto*) in  $B$  se tutti gli elementi di  $A$  appartengono anche a  $B$ . In tal caso si dice anche che  $A$  è un *sottoinsieme* di  $B$ . Se  $A$  è incluso in  $B$  ma non è uguale a  $B$ , allora si dice che  $A$  è *incluso strettamente* in  $B$ . In tal caso si dice che anche che  $A$  è un *sottoinsieme proprio* di  $B$ .

Infine, l'insieme privo di elementi si chiama *insieme vuoto*.

**Notazione 2** Riportiamo qui alcune notazioni abbreviative molto usate (non è necessario preoccuparsi di impararle a memoria):

$=$  uguale a

$\forall$  per ogni

$\exists$  esiste

$:$  tale che

$\Rightarrow$  implica che

---

<sup>3</sup>Un lettore particolarmente pignolo potrebbe obiettare che, prima di parlare di “capoluogo”, “provincia”, “2003”, “Avellino”, eccetera, avremmo dovuto definirli o stabilirli come prerequisiti. Se vuole, il lettore pignolo può cancellare questa parte dell'esempio.

$\Leftrightarrow$	<i>equivale a</i>
$\in$	<i>appartiene a, appartenente a</i>
$\emptyset$	<i>insieme vuoto</i>
$\subseteq$	<i>contenuto in</i>
$\subset$	<i>contenuto strettamente in</i>
$\supseteq$	<i>contenente</i>
$\supset$	<i>contenente strettamente</i>
$\cup$	<i>unito con</i>
$\cap$	<i>intersecato con</i>

*In particolare,  $X \cap Y$  denota l'intersezione degli insiemi  $X$  e  $Y$  ed  $X \cup Y$  la loro unione. La differenza di  $X$  e  $Y$  verrà denotata con  $X - Y$ .*

## 2.2 Funzioni

**Prerequisito 2** *Assumiamo come note le nozioni di funzione (o applicazione), di dominio di una funzione e di insieme di arrivo di una funzione.*

**Notazione 3** *Una funzione  $f$  con dominio  $X$  e insieme d'arrivo  $Y$  sarà in genere denotata con*

$$f : X \rightarrow Y .$$

**Assioma 2** *Il dominio e l'insieme d'arrivo di una funzione sono insiemi.*

**Prerequisito 3** *Assumiamo nota la nozione di corrispondente (o immagine, o valore) tramite una funzione  $f$  di un elemento del dominio di  $f$ .*

**Assioma 3** *Data una funzione  $f : X \rightarrow Y$ , ogni elemento  $x$  del dominio ha uno ed uno solo corrispondente, e questo è un elemento di  $Y$ . Una funzione  $g$*

è uguale ad  $f$  se e solo se ha lo stesso dominio di  $f$ , lo stesso insieme d'arrivo di  $f$  e per ogni elemento  $x$  del dominio il corrispondente di  $x$  tramite  $g$  è uguale al corrispondente di  $x$  tramite  $f$ .

**Notazione 4** Il corrispondente di un elemento  $x$  tramite una funzione  $f$  si denota con

$$f(x).$$

**Definizione 2** Sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione. L'insieme

$$\{f(x) : x \in X\},$$

cioè l'insieme di tutte le immagini degli elementi di  $X$  non verrà chiamato "codominio" di  $f$ , ma insieme immagine di  $f$ , o anche immagine di  $X$  tramite  $f$ , e sarà denotato con

$$f(X).$$

**Definizione 3** Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  si dirà suriettiva se l'insieme immagine coincide con l'insieme d'arrivo, cioè se

$$f(X) = Y.$$

Una funzione  $f$  si dirà iniettiva se elementi distinti hanno sempre immagini distinte, cioè se vale l'implicazione

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Una funzione  $f$  si dirà biettiva se è sia iniettiva che suriettiva.

**Osservazione 1** Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è suriettiva se e solo se

$$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y.$$

**Definizione 4** Siano  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  funzioni. Allora la funzione  $X \rightarrow Z$  che ad ogni  $x \in X$  associa  $g(f(x))$  si dice funzione composta di  $g$  ed  $f$ , e si indica con

$$g \circ f.$$

**Definizione 5** Sia  $X$  un insieme. L'applicazione  $X \rightarrow X$  che ad ogni elemento di  $X$  associa sé stesso, si dice applicazione identica di  $X$ , e si denota con  $\text{id}_X$ .

**Osservazione 2** Se  $f : X \rightarrow Y$  è una qualunque applicazione, si ha

$$\text{id}_Y \circ f = f, \quad f \circ \text{id}_X = f.$$

**Osservazione 3** Se  $f : X \rightarrow Y$  è una funzione biettiva, per ogni  $y \in Y$  esiste un unico  $x \in X$  tale che  $f(x) = y$ . Se definiamo una funzione  $g : Y \rightarrow X$  che ad ogni  $y \in Y$  associa l'unico  $x \in X$  tale che  $f(x) = y$ , allora abbiamo

$$g \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ g = \text{id}_Y.$$

**Definizione 6** Nella situazione dell'osservazione precedente, l'applicazione  $g$  sarà detta inversa di  $f$  e sarà denotata con  $f^{-1}$ .

**Definizione 7** Sia  $f : X \rightarrow Y$  un'applicazione qualunque (non necessariamente biettiva). Se  $y \in Y$ , l'insieme

$$\{x \in X : f(x) = y\}$$

si dice controimmagine di  $y$  tramite  $f$ , e si indica in genere con  $f^{-1}(y)$ .

Se  $f$  è una funzione biettiva e se, preso  $x \in X$ , poniamo  $y = f(x)$ , le due precedenti definizioni danno luogo ad una piccola ambiguità. Infatti

$$f^{-1}(y)$$

indica sia  $x$  (se interpretiamo  $f^{-1}$  come la funzione inversa), sia  $\{x\}$  se interpretiamo  $f^{-1}(y)$  come controimmagine di  $y$ . Sarà chiaro di volta in volta dal contesto quale interpretazione assumere.

## 2.3 Coppie ordinate

**Prerequisito 4** Siano  $a, b$  elementi di un insieme. Assumiamo che sia noto cos'è la coppia ordinata  $(a, b)$ .

**Assioma 4** Se  $(a, b)$  e  $(c, d)$  sono coppie ordinate, si ha:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ e } b = d.$$

**Definizione 8** Siano  $A$  e  $B$  insiemi. Il prodotto cartesiano di  $A$  e  $B$  è l'insieme di tutte le coppie ordinate  $(a, b)$  tali che  $a \in A$  e  $b \in B$ . Tale insieme sarà denotato con  $A \times B$ .

## 2.4 Relazioni

La nozione di *relazione* in un insieme  $S$  può ben essere assunta come nozione primitiva (ad esempio il testo di riferimento per il modulo di Analisi si regola così).

Noi proponiamo qui una definizione di tale nozione, data sulla base delle nozioni stabilite in precedenza. In sostanza, essa si fonda sull'idea che assegnare una relazione in un insieme  $S$  equivale ad assegnare un insieme di coppie di elementi di  $S$ , cioè un sottoinsieme  $X$  di  $S \times S$ . Dunque si potrebbe assumere, per definizione, che  $X$  è una relazione in  $S$ . L'unico (piccolo) problema è che se  $T$  è un insieme che contiene  $S$ , allora ogni relazione in  $S$  sarebbe anche una relazione in  $T$ . Analogamente a quanto avviene per le funzioni, per evitare confusioni in certe situazioni, conviene distinguere relazioni definite in insiemi diversi. Dunque la definizione che proponiamo è la seguente.

**Definizione 9** Una relazione  $\mathcal{R}$  in un insieme  $S$  è una coppia  $(S, X)$  tale che  $X$  sia un sottoinsieme di  $S \times S$ . Se  $s, t$  sono elementi di  $S$  tali che  $(s, t) \in X$ , allora scriveremo

$$s \mathcal{R} t .$$

Se invece  $(s, t) \notin X$ , allora scriveremo

$$s \not\mathcal{R} t .$$

**Esempio 2** La relazione “è più a nord di” nell’insieme

$$S = \{\text{Milano, Roma, Napoli}\}$$

può essere formalmente definita come la coppia  $(S, X)$ , dove

$$X = \{(\text{Milano, Roma}), (\text{Milano, Napoli}), (\text{Roma, Napoli})\}.$$

**Definizione 10** Una relazione di equivalenza in un insieme  $S$  è una relazione  $\mathcal{R}$  in  $S$  per cui valgono le seguenti proprietà:

- $\forall s \in S, s \mathcal{R} s$  (proprietà riflessiva)
- $s \mathcal{R} t \Rightarrow t \mathcal{R} s$  (proprietà simmetrica)
- $x \mathcal{R} y$  e  $y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$  (proprietà transitiva)

La relazione di uguaglianza in un fissato insieme è una relazione di equivalenza. La relazione “è coetaneo di” è una relazione di equivalenza nell’insieme delle persone. La relazione “è nato lo stesso giorno dell’anno di” è una relazione di equivalenza nell’insieme delle persone.

Possiamo dire, in maniera un po’ informale, che tutte le relazioni del tipo “avere in comune una certa proprietà” sono relazioni di equivalenza.

**Definizione 11** Sia  $\mathcal{R}$  una relazione di equivalenza in un insieme  $S$  e sia  $s \in S$ . L’insieme

$$\{t \in S : t \mathcal{R} s\}$$

si dice classe di equivalenza di  $s$  (rispetto ad  $\mathcal{R}$ ) e si denota con

$$[s]_{\mathcal{R}}$$

o semplicemente con

$$[s]$$

(sottintendendo  $\mathcal{R}$ ).

**Definizione 12** Una relazione d’ordine stretto in un insieme  $S$  è una relazione  $\mathcal{R}$  in  $S$  per cui valgono le seguenti proprietà:

- $s \mathcal{R} t \Rightarrow t \not\mathcal{R} s$
- $s \mathcal{R} t$  e  $t \mathcal{R} r \Rightarrow s \mathcal{R} r$

Una relazione d’ordine stretto si dice totale se per ogni coppia di elementi distinti  $s, t$  si ha che  $s \mathcal{R} t$  oppure  $t \mathcal{R} s$ .

## 2.5 Operazioni

**Definizione 13** Sia  $S$  un insieme. Un'operazione (binaria, interna) in  $S$  è un'applicazione

$$S \times S \rightarrow S.$$

**Notazione 5** Se denotiamo un'operazione interna con un simbolo, ad esempio

$$\bullet,$$

allora l'immagine di una coppia  $(s, s')$  si denota in genere con

$$s \bullet s'$$

(invece che con  $\bullet((s, s'))$ ).

**Definizione 14** Un gruppo è una coppia  $(G, \bullet)$  tale che  $G$  è un insieme e  $\bullet$  è un'operazione in  $G$  tale che:

$$1. \forall x, y, z \in G, \quad (x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$$

$$2. \exists n \in G :$$

$$(a) \forall x \in G, \quad x \bullet n = n \bullet x = x$$

$$(b) \forall x \in G \exists x' \in G : x \bullet x' = x' \bullet x = n$$

Se inoltre vale che

$$\forall x, y \in G, \quad x \bullet y = y \bullet x,$$

allora il gruppo  $(G, \bullet)$  si dirà commutativo, o anche abeliano.

**Esempio 3** Sia  $X$  un insieme. L'insieme di tutte le funzioni biettive  $X \rightarrow X$ , con l'operazione di composizione, è un gruppo.

**Osservazione 4** Sia  $(G, \bullet)$  un gruppo e supponiamo che  $n_1 \in G$  ed  $n_2 \in G$  soddisfino entrambi la proprietà (2a) richiesta per  $n$  nella Definizione 14. Allora si deve avere

$$n_1 \bullet n_2 = n_2$$

(perché  $n_1$  ha la proprietà (2a)) e anche

$$n_1 \bullet n_2 = n_1$$

(perché  $n_2$  ha la proprietà (2a)). Quindi  $n_1 = n_2$ . Concludiamo che in  $G$  esiste un unico elemento  $n$  con la proprietà (2a).

**Definizione 15** Sia  $(G, \bullet)$  un gruppo. L'unico elemento  $n \in G$  che ha la proprietà (2a) viene detto elemento neutro del gruppo.

**Esercizio 1** (facoltativo). Sia  $(G, \bullet)$  un gruppo e sia  $n$  il suo elemento neutro. Dimostrare che per ogni  $x \in G$  c'è un solo elemento  $x' \in G$  tale che  $x \bullet x' = x' \bullet x = n$  (cfr. (2b) nella Definizione 14).

**Definizione 16** Sia  $(G, \bullet)$  un gruppo, sia  $n$  il suo elemento neutro e sia  $x \in G$ . L'unico elemento  $x' \in G$  tale che  $x \bullet x' = x' \bullet x = n$  viene detto simmetrico di  $x$  in  $G$ .

## 2.6 Numeri

**Prerequisito 5** *Assumiamo noto cosa sia un numero reale e cosa siano l'addizione  $+$  e la moltiplicazione  $\times$  nell'insieme dei numeri reali.*

**Proposizione 1** *L'addizione e la moltiplicazione sono operazioni nell'insieme dei numeri reali.*

**Notazione 6** *L'insieme dei numeri reali sarà denotato con  $\mathbb{R}$ . Se  $a, b \in \mathbb{R}$  il numero  $a \times b$  sarà quasi sempre denotato semplicemente con  $ab$ , e solo talvolta con  $a \cdot b$  (quasi mai con  $a \times b$ ).*

Riportiamo (senza dimostrazione) le proposizioni basilari riguardo i numeri reali.

**Proposizione 2**  $(\mathbb{R}, +)$  è un gruppo abeliano.

**Definizione 17** *L'elemento neutro del gruppo  $(\mathbb{R}, +)$  si chiama zero e si denota con  $0$ . Il simmetrico di un  $x \in \mathbb{R}$  nel gruppo  $(\mathbb{R}, +)$  viene detto l'opposto di  $x$ , e si denota con  $-x$ . Se  $x, y \in \mathbb{R}$ , il numero  $x + (-y)$  si chiama differenza di  $x$  e  $y$ , e si denota con  $x - y$ .*

**Proposizione 3** *(legge di annullamento del prodotto). Siano  $a, b \in \mathbb{R}$ . Allora si ha*

$$ab = 0 \iff a = 0 \text{ oppure } b = 0 .$$

**Osservazione 5** *Dalla legge di annullamento del prodotto segue subito che*

$$\forall a, b \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad ab \in \mathbb{R} - \{0\} .$$

**Proposizione 4** *Denotiamo con  $\overline{\times}$  l'operazione in  $\mathbb{R} - \{0\}$  tale che per ogni  $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$  si abbia  $a \overline{\times} b = ab$ . Allora  $(\mathbb{R} - \{0\}, \overline{\times})$  è un gruppo abeliano.*

**Definizione 18** *L'elemento neutro del gruppo  $(\mathbb{R} - \{0\}, \overline{\times})$  si chiama uno e si denota con  $1$ . Il simmetrico di un  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$  nel gruppo  $(\mathbb{R} - \{0\}, \overline{\times})$  viene detto il reciproco (o a volte l'inverso) di  $x$ , e si denota con  $\frac{1}{x}$  o con  $x^{-1}$ . Se  $x \in \mathbb{R}$  e  $y \in \mathbb{R} - \{0\}$ , il numero  $x \cdot \frac{1}{y}$  si dice rapporto di  $x$  e  $y$  e si denota con  $\frac{x}{y}$ .*

**Proposizione 5** *(proprietà distributiva). Siano  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Si ha*

$$a(b + c) = ab + ac .$$

**Prerequisito 6** *Assumiamo noto cosa sia la relazione in  $\mathbb{R}$  denotata con  $<$  ("minore").*

**Proposizione 6** *La relazione  $<$  è una relazione d'ordine stretto totale in  $\mathbb{R}$ .*

**Definizione 19** Se  $a, b$  sono numeri reali tali che  $a < b$ , si dirà che  $a$  è minore di  $b$ , o anche che  $b$  è maggiore di  $a$ ; si potrà anche scrivere  $b > a$ . I simboli  $\leq$  e  $\geq$ , si leggono rispettivamente minore o uguale e maggiore o uguale, per cui:

$$a \leq b \stackrel{\text{def}}{\iff} a < b \text{ oppure } a = b ;$$

$$a \geq b \stackrel{\text{def}}{\iff} a > b \text{ oppure } a = b .$$

**Proposizione 7** (compatibilità della relazione d'ordine con le operazioni). Sia  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Si ha

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c ;$$

$$a > 0 \text{ e } b > 0 \Rightarrow ab > 0 .$$

**Proposizione 8** (completezza). Sia  $S \subset \mathbb{R}$  non vuoto e sia

$$M_S \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : \forall s \in S, s \leq x\} .$$

Se  $M_S \neq \emptyset$  allora esiste  $e \in M_S$  tale che

$$\forall x \in M_S, \quad e \leq x . \tag{1}$$

**Osservazione 6** Nella situazione della proposizione di sopra, l'elemento  $e$  è ovviamente l'unico con la proprietà (1).

**Definizione 20** Nella situazione della Proposizione 8, il numero  $e$  si dirà estremo superiore di  $S$ .

**Osservazione 7** Affinché un insieme non vuoto  $S \subset \mathbb{R}$  abbia estremo superiore occorre e basta che l'insieme

$$M_S \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : \forall s \in S, s \leq x\}$$

sia anch'esso non vuoto. Dunque occorre e basta che esista almeno un  $x$  tale che  $\forall s \in S, s \leq x$  (un tale  $x$  si dice un maggiorante di  $S$ ).

**Definizione 21** Sia  $\mathcal{S}$  l'insieme i cui elementi sono i sottoinsiemi  $A \subseteq \mathbb{R}$  tali che

- $1 \in A$ ;
- $a \in A \Rightarrow a + 1 \in A$ .

L'intersezione di tutti gli elementi di  $\mathcal{S}$ , cioè l'insieme

$$\{x : \forall A \in \mathcal{S}, x \in A\}$$

si denota con  $\mathbb{N}$  e i suoi elementi si dicono numeri naturali. L'insieme  $\mathbb{N} \cup \{0\}$  si denota con  $\mathbb{N}_0$ .

Un  $x \in \mathbb{R}$  si dice intero se  $x \in \mathbb{N}_0$  oppure  $-x \in \mathbb{N}_0$ . L'insieme degli interi si denota con  $\mathbb{Z}$ .

Un  $x \in \mathbb{R}$  si dice razionale se esistono due interi  $a$  e  $b$  tali che

$$x = \frac{a}{b}$$

(ovviamente, è necessario che sia  $b \neq 0$ ). L'insieme dei razionali si denota con  $\mathbb{Q}$ .

**Notazione 7** Siano  $a, b \in \mathbb{N}_0$ . La notazione

$$\{a, \dots, b\}$$

starà ad indicare (come ci si può facilmente aspettare) l'insieme

$$\{x \in \mathbb{N}_0 : a \leq x \leq b\}.$$

**Prerequisito 7** Assumiamo nota la rappresentazione decimale dei numeri reali.

Terminiamo qui il paragrafo dedicato ai richiami. Per la dimostrazione delle proposizioni di questo paragrafo, rimandiamo al testo di riferimento del modulo di Analisi (non fanno comunque parte del programma d'esame del modulo di Geometria).

Tutte le proposizioni che enunceremo in seguito potranno essere dimostrate senza nessun riferimento ad altri testi.

### 3 $n$ -uple

**Definizione 22** Una  $n$ -upla (ordinata) di oggetti è un'applicazione suriettiva il cui dominio è  $\{1, \dots, n\}$ . Le  $n$ -uple sono spesso indicate con una lettera in grassetto, ad esempio

**a**

Il corrispondente di un  $i \in \{1, \dots, n\}$  viene detto  $i$ -esima componente di **a**, e in genere si indica con la stessa lettera, non in grassetto, affetta dal pedice  $i$ :

$a_i$

Una  $n$ -upla può essere denotata, ed in effetti determinata, elencando nell'ordine, tra parentesi e separate da virgole, le sue componenti:

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$$

Le 3-uple sono anche dette terne.

In base alle definizioni appena date, ad esempio la terna

$$(8, 5, 5)$$

è formalmente definita come la funzione

$$\{1, 2, 3\} \rightarrow \{5, 8\}$$

che ad 1 associa 8, a 2 associa 5 e a 3 associa 5.

**Osservazione 8** Siano  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$   $n$ -uple. Allora  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  se e solo se tutte le componenti  $a_i$  sono rispettivamente uguali alle componenti  $b_i$ . In particolare, due 2-uple

$$(a_1, a_2) \quad e \quad (b_1, b_2)$$

sono uguali se e solo se

$$a_1 = b_1 \quad e \quad a_2 = b_2 .$$

Dunque le 2-uple si comportano esattamente come le coppie ordinate (cfr. Pre-requisito 4 e Assioma 4). Questo assicura che l'abuso di notazione di indicare una 2-upla come una coppia, non crea problemi di nessun genere.

**Definizione 23** Sia  $(A_1, \dots, A_n)$  una  $n$ -upla di insiemi. Definiamo prodotto cartesiano di  $A_1, \dots, A_n$  l'insieme

$$\{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in A_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Tale insieme sarà denotato elencando nell'ordine gli insiemi  $A_1, \dots, A_n$ , separati dal segno  $\times$ :

$$A_1 \times \dots \times A_n .$$

Nel caso  $A_1, \dots, A_n$  siano tutti uguali ad un certo insieme  $A$ , il loro prodotto cartesiano sarà anche denotato con

$$A^n .$$

**Esempio 4**

$$\{a, b\} \times \{3, 5\} = \{(a, 3), (a, 5), (b, 3), (b, 5)\}$$

$$\{1, 2, 3\} \times \{\alpha\} \times \{x, y\} = \{(1, \alpha, x), (1, \alpha, y), (2, \alpha, x), (2, \alpha, y), (3, \alpha, x), (3, \alpha, y)\}$$

**Osservazione 9** Per l'Osservazione 8, l'abuso di linguaggio per cui usiamo lo stesso nome e lo stesso simbolo per l'insieme delle coppie e l'insieme delle 2-uple (cfr. Definizioni 8 e 23), non crea problemi di nessun genere.

**Esercizio 2** (facoltativo). Siano  $A, B, C$  insiemi non vuoti. I tre insiemi

$$A \times (B \times C), \quad A \times B \times C, \quad (A \times B) \times C$$

sono uguali? Perché?

Molto spesso, per abuso di notazione si considerano uguali elementi del tipo

$$(a, b, c), \quad ((a, b), c), \quad (a, (b, c)) ,$$

in modo da “far finta” che il prodotto cartesiano sia associativo.

## 4 Successioni

**Definizione 24** Se  $S$  è un insieme qualunque, una funzione

$$s : \mathbb{N} \rightarrow S$$

viene detta una *successione di elementi di  $S$* . L'immagine  $s(n)$  di ciascun  $n \in \mathbb{N}$  viene allora denotata con  $s_n$ , e la successione con

$$s_1 \quad s_2 \quad \dots \quad s_n \quad \dots$$

## 5 Matrici

**Definizione 25** Siano  $m, n \in \mathbb{N}_0$ . Una matrice di tipo  $m \times n$  è un'applicazione suriettiva con dominio

$$\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}.$$

Le matrici sono spesso indicate con una lettera maiuscola, ad esempio

$$A$$

Il corrispondente di una coppia  $(i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$  viene detto termine, o entrata, di posto  $i, j$  e viene generalmente indicato con la stessa lettera, stavolta in minuscolo, affetta dal doppio pedice  $ij$ :

$$a_{ij}$$

Una matrice di tipo  $m \times n$  viene anche denotata (e anzi determinata) scrivendo una tabella rettangolare, con  $m$  righe ed  $n$  colonne, in cui ogni elemento  $a_{ij}$  occupa il posto all'incrocio della  $i$ -esima riga con la  $j$ -esima colonna; generalmente, tale tabella viene inclusa tra parentesi tonde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Se  $m = n$ , la matrice si dice *quadrata di ordine  $n$* .

**Esempio 5** In base alle definizioni appena date, la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

è formalmente definita come la funzione

$$\{1, 2\} \times \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 4, 2, -1, 6\}$$

data da

$$(1, 1) \mapsto 2, \quad (1, 2) \mapsto 4 \quad (1, 3) \mapsto 6 \quad (2, 1) \mapsto -1 \quad (2, 2) \mapsto 0 \quad (2, 3) \mapsto 2$$

(la notazione  $x \mapsto y$  indica che ad  $x$  viene associato  $y$ ).

**Definizione 26** Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

una matrice di tipo  $m \times n$ . Se  $i \in \{1, \dots, m\}$ , diremo  $i$ -esima riga di  $A$  la matrice di tipo  $1 \times n$  data da

$$(a_{i1} \cdots a_{in}).$$

Tale matrice si indica generalmente con

$$\mathbf{a}_i$$

Sebbene formalmente  $\mathbf{a}_i$  sia cosa diversa dalla  $n$ -upla  $(a_{i1}, \dots, a_{in})$ , spesso conviene identificarle per abuso di linguaggio.

Se  $j \in \{1, \dots, n\}$ , diremo  $j$ -esima colonna di  $A$  la matrice di tipo  $m \times 1$  data da

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Tale matrice si indica generalmente con

$$\mathbf{a}^j$$

ed è talvolta conveniente identificarla, per abuso di linguaggio, con la  $m$ -upla  $(a_{1j}, \dots, a_{mj})$ .

A partire da una matrice  $A$ , possiamo costruire un'altra matrice "scambiando le righe con le colonne". Per esempio, dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice così costruita si chiama la *trasposta* di  $A$ .

Una definizione rigorosa può essere data come segue.

**Definizione 27** Sia  $A$  una matrice di tipo  $m \times n$ . La matrice  $B$  di tipo  $n \times m$  data da

$$b_{ij} = a_{ji} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m\}$$

si dice matrice trasposta di  $A$ , e viene generalmente denotata con

$$A^t.$$

Alcune matrici non cambiano quando vengono trasposte. Tali matrici si dicono *simmetriche*. Stabiliamo quindi la seguente definizione.

**Definizione 28** Una matrice  $A$  si dice simmetrica se

$$A = A^t .$$

**Osservazione 10** Una matrice simmetrica deve essere per forza quadrata. Una matrice quadrata  $A$  di ordine  $n$  è simmetrica se e solo se si ha

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

## 6 Spazio, rette e piani

**Prerequisito 8** Assumiamo noto che cosa sia un punto.

**Definizione 29** Lo spazio (ordinario) è l'insieme di tutti i punti. Una figura è un sottoinsieme dello spazio, cioè un insieme di punti.

**Prerequisito 9** Assumiamo come noto cosa sia una retta e cosa sia un piano.

**Assioma 5** Esiste almeno un piano.

**Assioma 6** Le rette ed i piani sono figure.

**Assioma 7** Ogni retta contiene almeno due punti distinti.

**Assioma 8** Presi due punti distinti, esiste una e una sola retta che li contiene entrambi.

Quest'ultima asserzione si può anche esprimere (in maniera più geometricamente intuitiva, ma meno precisa) dicendo “per due punti distinti passa una sola retta”, oppure “esiste una sola retta che congiunge due punti distinti”.

**Notazione 8** Siano  $P$  e  $Q$  punti distinti. L'unica retta che contiene  $P$  e  $Q$  sarà indicata con  $r_{PQ}$ .

**Definizione 30** Sia  $S$  un insieme di punti. I punti di  $S$  si dicono allineati (tra loro) se esiste una retta che contiene  $S$ .

**Assioma 9** Ogni piano contiene almeno tre punti non allineati tra loro.

**Proposizione 9** Nessun piano è una retta.

*Dimostrazione.* Sia  $\pi$  un piano. Per l'Assioma 9,  $\pi$  contiene tre punti  $P, Q, R$  non allineati tra loro. Se  $\pi$  fosse anche una retta,  $P, Q, R$ , essendo contenuti in  $\pi$ , sarebbero allineati, il che non è. Dunque  $\pi$  non può essere una retta.  $\square$

**Assioma 10** Siano  $P, Q, R$  punti distinti non allineati. Allora esiste uno ed un solo piano che contiene  $P, Q, R$ .

**Definizione 31** Sia  $S$  un insieme di punti. I punti di  $S$  si dicono complanari (tra loro) se esiste un piano che contiene  $S$ .

**Assioma 11** Sia  $\pi$  un piano e siano  $P$  e  $Q$  due punti distinti appartenenti a  $\pi$ . Allora  $\pi$  contiene  $r_{PQ}$ .

Dunque, parlando in maniera meno formale, “se un piano contiene due punti distinti, allora contiene la retta che li congiunge”.

**Assioma 12** Nessun piano coincide con tutto lo spazio (in altre parole: lo spazio non è un piano).

**Proposizione 10** Nessuna retta coincide con tutto lo spazio (in altre parole: lo spazio non è una retta).

*Dimostrazione.* Per l’Assioma 5, esiste almeno un piano  $\pi$ . Per l’Assioma 9,  $\pi$  contiene tre punti  $P, Q, R$  non allineati tra loro. Se lo spazio fosse una retta,  $P, Q, R$ , essendo contenuti nello spazio, sarebbero allineati, il che non è. Dunque lo spazio non può essere una retta.  $\square$

**Esercizio 3** Dimostrare che ogni retta è contenuta in qualche piano.

**Assioma 13** Se l’intersezione di due piani non è vuota, allora contiene almeno due punti distinti.

**Proposizione 11** Se l’intersezione di due piani distinti non è vuota, allora è una retta.

*Dimostrazione.* Siano  $\alpha$  e  $\beta$  due piani distinti tali che

$$\alpha \cap \beta \neq \emptyset.$$

Per l’Assioma 13 si ha che

$$\exists P, Q \in \alpha \cap \beta : P \neq Q.$$

Abbiamo allora

$$P, Q \in \alpha \cap \beta \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} P, Q \in \alpha & \text{Assioma 11} \\ P, Q \in \beta & \text{Assioma 11} \end{array} \right. \Rightarrow \left. \begin{array}{l} r_{PQ} \subseteq \alpha \\ r_{PQ} \subseteq \beta \end{array} \right\} \Rightarrow r_{PQ} \subseteq \alpha \cap \beta$$

Dunque

$$r_{PQ} \subseteq \alpha \cap \beta. \tag{2}$$

Sia poi  $R \in \alpha \cap \beta$ . Siccome i punti  $P, Q, R$  sono contenuti nei due piani distinti  $\alpha$  e  $\beta$ , devono essere per forza allineati, altrimenti andremmo contro l’Assioma 10.

Esiste dunque una retta  $r$  che contiene  $P, Q, R$ . Ma siccome  $r_{PQ}$  è l'unica retta che contiene  $P$  e  $Q$ , deve essere per forza  $r = r_{PQ}$ . Quindi  $R \in r_{PQ}$ . Abbiamo così dimostrato che ogni punto  $R$  che appartenga ad  $\alpha \cap \beta$  deve per forza appartenere a  $r_{PQ}$ , cioè

$$\alpha \cap \beta \subseteq r_{PQ} . \quad (3)$$

Le due inclusioni (2) e (3) dimostrano che

$$\alpha \cap \beta = r_{PQ} .$$

Dunque l'intersezione dei due piani distinti  $\alpha$  e  $\beta$  è una retta, come volevamo.

□

## 7 Rette parallele

**Definizione 32** *Siano  $r$  ed  $s$  rette.*

*Le rette  $r$  ed  $s$  si dicono complanari se sono contenute in uno stesso piano, altrimenti si dicono sghembe.*

*Le rette  $r$  ed  $s$  si dicono incidenti se la loro intersezione è non vuota; si dicono propriamente parallele se sono complanari ma non incidenti; si dicono impropriamente parallele se coincidono.*

*Le rette  $r$  ed  $s$  si dicono parallele, se lo sono propriamente o impropriamente.*

**Proposizione 12** *Due rette sghembe non possono essere incidenti.*

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che esista un punto  $P$  appartenente sia ad  $r$  che ad  $s$ . Per l'Assioma 7 esiste un punto  $Q \neq P$  appartenente ad  $r$  ed un punto  $R \neq P$  appartenente ad  $s$ . Per l'Assioma 8 abbiamo allora

$$r_{PQ} = r, \quad r_{PR} = s .$$

Distinguiamo due casi:

- $P, Q, R$  sono allineati
- $P, Q, R$  non sono allineati

Nel primo caso, esiste una retta  $t$  che contiene  $P, Q, R$ . Poiché  $t$  contiene i due punti distinti  $P, Q$ , per l'Assioma 8 dobbiamo avere  $t = r_{PQ} = r$ . Poiché  $t$  contiene i due punti distinti  $P, R$ , per l'Assioma 8 dobbiamo avere  $t = r_{PR} = s$ . Quindi

$$r = s .$$

Siccome, per l'Esercizio 3,  $r$  è contenuta in qualche piano  $\pi$ ,  $r$  ed  $s$  (essendo uguali) sarebbero contenute nello stesso piano  $\pi$ , il che è assurdo perché per ipotesi  $r$  ed  $s$  sono sghembe.

Nel secondo caso, per l'Assioma 10 esiste un unico piano  $\pi$  che contiene  $P, Q, R$ . Poiché allora  $\pi$  contiene i due punti distinti  $P, Q$ , per l'Assioma 11, contiene  $r_{PQ} = r$ ; e poiché  $\pi$  contiene i due punti distinti  $P, R$ , ancora per l'Assioma 11, contiene  $r_{PR} = s$ . Quindi  $r$  ed  $s$  sarebbero contenute nello stesso piano  $\pi$ , il che è di nuovo assurdo perché per ipotesi  $r$  ed  $s$  sono sghembe.

In ogni caso perveniamo ad un assurdo, quindi non può esistere un punto  $P$  appartenente sia ad  $r$  che ad  $s$ , cioè  $r$  ed  $s$  non possono essere incidenti.

□

La proposizione ora dimostrata completa il quadro delle proprietà “essere sghembe”, “essere incidenti” ed “essere parallele”. Possiamo sintetizzare tale quadro come segue:

- Due rette non si incontrano se e solo se sono propriamente parallele oppure sghembe.
- Due rette sono complanari se e solo se sono incidenti oppure parallele.
- Due rette sono sia incidenti che parallele se e solo se sono impropriamente parallele.

**Assioma 14** *Dati una retta  $r$  e un punto  $P$ , esiste un'unica retta contenente  $P$  e parallela ad  $r$ .*

Tale assioma viene detto *assioma delle parallele*, e ha avuto grande importanza nella storia della Matematica.

**Osservazione 11** *Supponiamo che  $r, s, t$  siano rette in un piano  $\pi$ , e supponiamo che  $r$  sia parallela ad  $s$  e che  $s$  sia parallela a  $t$ . Distinguiamo due casi:*

- *$r$  e  $t$  sono incidenti*
- *$r$  e  $t$  non sono incidenti*

*Nel primo caso, esiste allora un punto  $P \in r \cap t$ . Ma allora  $r$  e  $t$  sono entrambe parallele ad  $s$  e contengono entrambe  $P$ . Per l'Assioma 14, deve essere per forza  $r = t$ . Quindi  $r$  e  $t$  sono impropriamente parallele.*

*Nel secondo caso  $r$  e  $t$ , essendo contenute in  $\pi$ , sono propriamente parallele. Dunque, in ogni caso,  $r$  e  $t$  devono essere parallele.*

L'osservazione ora fatta ci dice che la relazione “essere parallele” nell'insieme delle rette contenute in un piano  $\pi$  ha la proprietà transitiva.

E se consideriamo l'insieme di *tutte* le rette? La cosa continua a valere, ma la dimostrazione è un pochino più lunga: la lasciamo come esercizio per gli appassionati.

**Esercizio 4** (facoltativo). Nell'insieme di tutte le rette, consideriamo la relazione di parallelismo, cioè la relazione  $\mathcal{P}$  definita da

$$r\mathcal{P}s \Leftrightarrow r \text{ è parallela ad } s.$$

Allora  $\mathcal{P}$  è una relazione di equivalenza.

**Definizione 33** Una classe di equivalenza rispetto alla relazione di parallelismo tra rette viene detta una direzione.

La direzione di una retta  $r$  è la sua classe di equivalenza  $[r]_{\mathcal{P}}$ . Se  $d$  è una direzione ed  $r$  è una retta, dire che “ $r$  ha direzione  $d$ ” formalmente equivale a dire che  $r \in d$ .

## 8 Parallelismo per i piani

**Definizione 34** Due piani si dicono propriamente paralleli se la loro intersezione è vuota; si dicono impropriamente paralleli se coincidono.

Una retta e un piano si dicono propriamente paralleli se la loro intersezione è vuota; si dicono impropriamente paralleli se la retta è contenuta nel piano.

Anche per i piani è possibile dimostrare che la relazione di parallelismo è una relazione di equivalenza. Una classe di equivalenza di piani paralleli si chiama una *giacitura*.

**Proposizione 13** Se  $r$  ed  $s$  sono rette parallele e  $\pi$  è un piano qualunque, si ha:

$$r \text{ è parallela a } \pi \iff s \text{ è parallela a } \pi .$$

**Esercizio 5** (facoltativo). Dimostrare la proposizione di sopra.

**Osservazione 12** Per la Proposizione 11 (pag. 17), l'intersezione di due piani non paralleli è sempre una retta.

Finora le dimostrazioni sono state organizzate in maniera da “spezzare il ragionamento in elementi estremamente semplici”. È stato fatto risaltare come ogni affermazione fosse fatta sulla base dei soli assiomi e di deduzioni puramente logiche. Agendo in questo modo, una volta stabiliti gli assiomi, addirittura possibile evitare ogni riferimento all'intuizione geometrica, facendo affidamento sulla sola teoria degli insiemi.

Lo svantaggio è che le dimostrazioni ottenute sono più lunghe e pesanti (tanto è vero che alcune proposizioni, altrettanto intuitivamente evidenti quanto gli assiomi, hanno richiesto alcune righe di dimostrazione). Dunque, nella pratica matematica corrente, e nel seguito di questi appunti, si adotta uno stile un po' più “leggero”. Ma questo non significa che le dimostrazioni si baseranno su

qualcos'altro oltre gli assiomi e le deduzioni logiche, significa solo che si “salterà qualche passaggio”. In caso di dubbi o perplessità su qualche dimostrazione sarà sempre possibile entrare in maggiori dettagli sui punti oscuri, fino a ridurli, se necessario, ad una lunga lista di considerazioni elementari puramente “logico-insiemistiche”.

L'intuizione geometrica, apparentemente tagliata fuori da questo processo, svolge in realtà un fondamentale ruolo guida, sia nella ricerca delle dimostrazioni, sia nella scelta dei risultati da dimostrare.

## 9 Versi su una retta

Con la nostra definizione di direzione, non c'è differenza tra “la direzione Napoli-Roma” e la “la direzione Roma-Napoli”. Per distinguere le due cose, useremo la parola “verso”. Ad esempio la direzione “verticale” ammetterà i due versi “su” e “giù”.

Assumeremo come primitiva la nozione di “verso su una retta”. In verità questo concetto si può esprimere in termini di concetti che abbiamo già introdotto: esso è infatti una *relazione d'ordine stretto totale* definita tra i punti della retta. Fissare un verso infatti, significa poter dire, per ogni coppia di punti distinti, che uno dei due precede l'altro (e non viceversa).

Purtroppo, non esistono solo due modi di ordinare i punti di una retta: i due versi però sono ordinamenti “naturali, così come le rette sono particolari tra tutti i sottoinsiemi dello spazio. D'altra parte, questa loro intuitiva “particolarità” non può essere definita sulla base dei prerequisiti e dei risultati precedentemente esposti in questi appunti. Ecco perché assumiamo “verso” come nozione primitiva.

**Prerequisito 10** *Sia  $r$  una retta. Assumiamo nota la nozione di verso su  $r$ .*

**Assioma 15** *Un verso su una retta  $r$  è una relazione d'ordine totale in  $r$ .*

**Definizione 35** *Due relazioni  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{S}$  in uno stesso insieme  $A$  si dicono opposte (o inverse) tra loro, se per ogni  $a, b \in A$  si ha*

$$a \mathcal{R} b \iff b \mathcal{S} a .$$

**Assioma 16** *Su ogni retta esistono esattamente due versi, l'uno opposto all'altro.*

**Definizione 36** *Un verso su una retta  $r$  verrà generalmente indicato col simbolo  $\prec$ . Se  $P, Q \in r$ , la scrittura*

$$P \prec Q$$

*si leggerà “ $P$  precede  $Q$ ”. Scrivendo invece*

$$P \preceq Q$$

*intenderemo che  $P$  precede o è uguale a  $Q$ .*

**Definizione 37** Una retta orientata è una coppia

$$(r, \prec),$$

dove  $r$  è una retta e ' $\prec$ ' è un verso su  $r$ .

## 10 Segmenti

**Definizione 38** Dati due punti distinti  $A$  e  $B$ , sia  $r$  la retta che li contiene e fissiamo il verso ( $\prec$ ) secondo cui  $A \prec B$ . Si dice segmento (chiuso) di estremi  $A$  e  $B$ , e si indica con  $\overline{AB}$ , l'insieme

$$\overline{AB} = \{P \in r : A \preceq P \preceq B\}.$$

Un punto di  $\overline{AB}$  diverso dagli estremi  $A$  e  $B$  si dirà interno ad  $\overline{AB}$ .

L'insieme

$$\{P \in r : A \preceq P\}$$

si dice semiretta (chiusa) di origine  $A$ . Per indicare tale semiretta potremo usare la notazione  $r_A^+$ .

E' opportuno definire anche il "segmento nullo", che è un insieme del tipo  $\overline{AA} = \{P \in r : A \preceq P \preceq A\}$ : tale insieme è sempre uguale ad  $\{A\}$ , qualsiasi sia la retta  $r$  che contiene il punto  $A$ , e qualsiasi sia il verso  $\prec$  scelto su  $r$ . Riassumendo:

**Definizione 39** Sia  $A$  un punto. Si dice segmento nullo (chiuso) di estremo  $A$ , l'insieme  $\overline{AA} = \{A\}$ .

**Definizione 40** Sia  $s_1$  un segmento contenuto in una retta  $r_1$  ed  $s_2$  un segmento contenuto in una retta  $r_2$ . Se le rette  $r_1$  ed  $r_2$  sono parallele, allora anche  $s_1$  ed  $s_2$  saranno detti paralleli. Se  $r_1$  è parallela ad una retta  $t$ , allora anche  $s_1$  sarà detto parallelo a  $t$  (si dirà anche che  $t$  è parallela ad  $s_1$ ).

Analogamente si definisce il parallelismo tra segmenti e piani.

**Definizione 41** Un segmento si dice parallelo ad un piano  $\pi$ , se è contenuto in una retta parallela a  $\pi$ .

**Osservazione 13** Con queste definizioni, un segmento nullo è parallelo a qualsiasi segmento, a qualsiasi retta ed a qualsiasi piano.

**Definizione 42** Sia  $\mathcal{R}$  una relazione in un insieme  $S$  e sia  $T$  un sottoinsieme di  $S$ . La relazione  $\mathcal{S}$  in  $T$  tale che

$$a \mathcal{S} b \stackrel{\text{def}}{\iff} a \mathcal{R} b$$

è detta restrizione di  $\mathcal{R}$  a  $T$ .

**Definizione 43** Sia  $\overline{AB}$  un segmento e sia  $r$  una retta che lo contiene. Un verso su  $\overline{AB}$  è la restrizione ad  $\overline{AB}$  di un verso su  $r$ .

**Osservazione 14** Su un segmento nullo c'è un unico verso, coincidente col suo opposto.

**Definizione 44** Un segmento orientato è una coppia costituita da un segmento e da un verso su di esso. Un segmento orientato costituito da  $\overline{AB}$ , con il verso rispetto al quale  $A \preceq B$ , verrà indicato con  $AB$ , e il segmento orientato  $BA$  (cioè quello dato sempre da  $\overline{AB}$ , ma con il verso opposto) viene detto opposto ad  $AB$ .

## 11 Semipiani

**Definizione 45** Due insiemi si dicono disgiunti se la loro intersezione è vuota.

**Assioma 17** Sia  $r$  una retta contenuta in un piano  $\pi$ . Allora  $\pi - r$  è unione di due sottoinsiemi non vuoti e disgiunti  $\pi_+$  e  $\pi_-$  tali che per ogni  $A, B \in \pi - r$  si ha

$$A, B \in \pi_+ \text{ oppure } A, B \in \pi_- \iff \overline{AB} \cap r = \emptyset.$$

**Definizione 46** Sia  $r$  una retta contenuta in un piano  $\pi$ . I due sottoinsiemi di  $\pi - r$  soddisfacenti la condizione dell'Assioma 17 si dicono semipiani di  $\pi$  individuati da  $r$ .

Quindi due punti non appartenenti ad  $r$  stanno in uno stesso semipiano individuato da  $r$  se e solo se il segmento che li congiunge non interseca  $r$ .

**Proposizione 14** Siano  $r$  ed  $s$  due rette non parallele contenute in un piano  $\pi$ , sia  $A$  il loro punto d'intersezione e si fissi un verso  $\prec$  su  $r$ . Allora i punti che seguono  $A$  stanno tutti in uno stesso semipiano di  $\pi$  individuato da  $s$ .

*Dimostrazione.* Fissiamo un punto  $P \in r$  che segue  $A$ , e sia  $\pi_+$  il semipiano che contiene  $P$ . Se  $Q$  è un qualsiasi punto che segue  $A$ , il segmento  $\overline{PQ}$  non contiene  $A$  (altrimenti  $P \preceq A$  o  $Q \preceq A$ ). Ma l'unico punto di  $r$  che appartiene ad  $s$  è  $A$ . Dunque

$$\overline{PQ} \cap s = \emptyset.$$

Per definizione di semipiano, poiché  $P \in \pi_+$ , anche  $Q \in \pi_+$ . Dunque un qualsiasi punto che segue  $A$  è contenuto in  $\pi_+$ .  $\square$

**Osservazione 15** Ovviamente la tesi della Proposizione 14 vale anche per i punti che precedono  $A$ .

**Esercizio 6** Siano  $r$  ed  $s$  rette non parallele contenute in un piano  $\pi$ , sia  $A$  il loro punto d'intersezione e si fissi un verso  $\prec$  su  $r$ . Dimostrare che un punto che segue  $A$  deve appartenere ad un semipiano diverso da quello a cui appartiene un punto che precede  $A$ .

**Osservazione 16** Siano  $r$  ed  $s$  rette non parallele contenute in un piano  $\pi$ , sia  $A$  il loro punto d'intersezione e si fissi un verso  $\prec$  su  $r$ . Dai risultati precedenti si deduce subito che l'intersezione di  $r$  con un semipiano individuato da  $s$  in  $\pi$  è una semiretta privata dell'origine.

## 12 Angoli

**Definizione 47** Siano  $r$  ed  $s$  due rette non parallele in un piano  $\pi$ , sia  $\sigma$  uno dei semipiani individuati da  $r$  e sia  $\tau$  uno dei semipiani individuati da  $s$ . L'intersezione

$$\alpha = \sigma \cap \tau$$

verrà detta angolo convesso proprio.

Il punto d'intersezione  $O$  di  $r$  ed  $s$  viene detto vertice dell'angolo  $\alpha$ . Le due semirette date da  $\sigma \cap s$  e  $\tau \cap r$  con l'aggiunta dell'origine  $O$  (cfr. Osservazione 16) si dicono lati dell'angolo.

Se  $A$  è un punto di  $\sigma \cap s$  e  $B$  è un punto di  $\tau \cap r$ , allora l'angolo  $\alpha$  potrà essere denotato con  $A\hat{O}B$ .

Infine, se denotiamo con  $\sigma'$  l'altro semipiano individuato da  $r$ , gli angoli convessi propri  $\sigma \cap \tau$  e  $\sigma' \cap \tau$  verranno detti supplementari tra loro.

**Osservazione 17** Con queste definizioni, i lati e il vertice di un angolo non sono contenuti nell'angolo.

Naturalmente, in altri testi si possono trovare definizioni diverse, ma comunque equivalenti (ad esempio si può definire un angolo in modo da comprendere anche i lati).

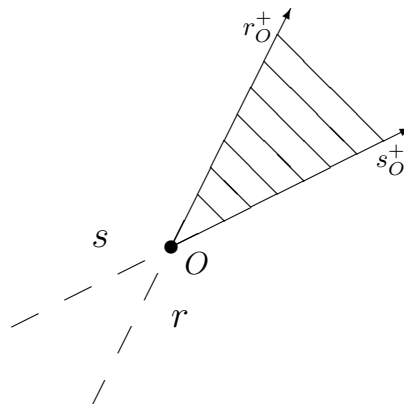
Abbiamo definito solo cosa sono gli angoli convessi propri. Gli studenti sanno bene che ci sono anche altri angoli, oltre a quelli convessi propri. Tuttavia, siccome ai fini del nostro corso possiamo fare a meno di usarli, non riporteremo in questi appunti una definizione generale di "angolo" (anche se così, a malincuore, non possiamo parlare dell'angolo piatto, dell'angolo nullo, e di molti altri).

Due rette non parallele in un piano individuano quattro angoli: diamo ora una definizione che risulta comoda per fissare uno dei quattro.

**Definizione 48** Siano  $\vec{r}$  ed  $\vec{s}$  rette orientate non parallele contenute in un piano  $\pi$ . Detto  $O$  il punto di intersezione, sia  $\sigma$  il semipiano di  $\pi$  individuato da  $r$  che contiene i punti di  $s$  che seguono  $O$  ma non quelli che lo precedono, e sia  $\tau$  il semipiano di  $\pi$  individuato da  $s$  che contiene i punti di  $r$  che seguono  $O$  ma non quelli che lo precedono. Allora l'angolo (convesso proprio)

$$\sigma \cap \tau$$

sarà chiamato angolo individuato da  $\vec{r}$  ed  $\vec{s}$ , o anche angolo convesso individuato dalle semirette  $r_O^+$  ed  $s_O^+$ .



### 13 Congruenza tra segmenti. Lunghezze.

Dati due segmenti nello spazio, sappiamo confrontarli: il procedimento consiste nel trasportarli l'uno sull'altro (pensiamo a due bastoncini o a due fili). Se i due bastoncini possono essere portati a coincidere, allora si dice che i segmenti di partenza sono *congruenti*, o che hanno la stessa *lunghezza*. A partire da questa idea, si può anche definire il concetto di *misura*, che si fonda sulla possibilità di riportare consecutivamente dei segmenti di fissata lunghezza. Tutto questo discorso può essere formalizzato insiemisticamente in varie maniere. Una è quella di richiedere per assioma (postulare) l'esistenza di particolari funzioni dello spazio in sé, detti movimenti rigidi (il che traduce il trasporto dei bastoncini). Un'altra è quella di postulare l'esistenza di una relazione di equivalenza tra segmenti (la congruenza, cioè l'aver la stessa lunghezza), con particolari proprietà di trasporto. Seguiamo questa seconda strada.

**Prerequisito 11** *Assumiamo come nozione primitiva la congruenza tra segmenti.*

**Assioma 18** *La congruenza tra segmenti è una relazione di equivalenza nell'insieme dei segmenti.*

**Notazione 9** *La relazione di congruenza tra segmenti sarà indicata col simbolo*

≡

**Definizione 49** *Una lunghezza è una classe di equivalenza di segmenti congruenti.*

Dunque la lunghezza di un segmento  $s$  è la sua classe di equivalenza  $[s]$  rispetto alla relazione di congruenza. Se  $l$  è una lunghezza ed  $s$  è un segmento, dire che “ $s$  ha lunghezza  $l$ ” formalmente equivale a dire che  $s \in l$ .

**Assioma 19** Fissati un segmento  $\overline{AB}$ , una retta  $r$ , un verso  $\prec$  su  $r$  e un punto  $C \in r$ , esiste uno ed un solo punto  $D \in r$  tale che  $C \preceq D$  e tale che  $\overline{CD}$  è congruente ad  $\overline{AB}$ .

L'assioma ora visto può anche essere enunciato in modo equivalente: fissati una lunghezza  $l$  e una semiretta  $s$ , e detta  $A$  l'origine di  $s$ , esiste uno ed un solo punto  $B \in s$  tale che  $\overline{AB}$  abbia lunghezza  $l$ .

**Assioma 20** Siano  $r$  ed  $r'$  rette e, fissato un verso su ciascuna di esse, siano  $A, B, C \in r$  e  $A', B', C' \in r'$  tali che:

- $A \preceq B \preceq C$  e  $A' \preceq B' \preceq C'$
- $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$  e  $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$

Allora si ha

$$\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$$

Questi assiomi permettono il confronto di segmenti e il “riporto consecutivo”, che apre la strada alla definizione di somma di due segmenti (o meglio di due lunghezze) e quindi alla definizione di *misura* di un segmento rispetto ad un altro.

Purtroppo però, per avere a disposizione tutte le proprietà usuali della misura avremo bisogno anche di altri assiomi, anche (un po' sorprendentemente) di assiomi che riguardano la congruenza degli angoli (di cui non abbiamo ancora parlato).

Inoltre, sebbene il lavoro richiesto per “ricostruire da zero” la definizione e le proprietà della misura di lunghezze sia interessante e non troppo oneroso, per limiti di spazio non possiamo includerlo nel programma d'esame: lo riportiamo in questi appunti come materiale facoltativo per coloro che fossero particolarmente curiosi.

**Osservazione 18** (facoltativa). Tenendo presente l'Assioma 19, l'Assioma 20 può essere enunciato nel seguente modo equivalente.

Siano  $l$  ed  $l'$  due lunghezze. Siano  $r$  ed  $s$  rette, si fissi un verso su ciascuna e siano  $A \in r$  e  $B \in s$ . Sia  $A'$  l'unico punto  $\succeq A$  tale che  $\overline{AA'}$  abbia lunghezza  $l$  e sia  $A''$  l'unico punto  $\succeq A'$  tale che  $\overline{A'A''}$  abbia lunghezza  $l'$ . Similmente, sia  $B'$  l'unico punto  $\succeq B$  tale che  $\overline{BB'}$  abbia lunghezza  $l$  e sia  $B''$  l'unico punto  $\succeq B'$  tale che  $\overline{B'B''}$  abbia lunghezza  $l'$ . Allora  $\overline{AA''}$  e  $\overline{BB''}$  hanno la stessa lunghezza.

**Proposizione 15** (facoltativa). Siano  $l$  ed  $l'$  lunghezze. Esiste un'unica lunghezza  $l''$  tale che esistano punti  $A \preceq A' \preceq A''$  (appartenenti a qualche retta orientata) con  $\overline{AA'}$  di lunghezza  $l$ ,  $\overline{A'A''}$  di lunghezza  $l'$  e  $\overline{AA''}$  di lunghezza  $l''$ .

*Dimostrazione.* (facoltativa). Si deduce subito dall'osservazione precedente.  $\square$

**Definizione 50** (facoltativa). Siano  $l$  ed  $l'$  lunghezze. L'unica lunghezza  $l''$  soddisfacente la condizione della proposizione precedente si dice *somma* di  $l$  ed  $l'$  e si indica con  $l + l'$ . L'operazione nell'insieme delle lunghezze che ad ogni coppia di lunghezze associa la loro somma si dice *addizione tra lunghezze*, e si denota con  $+$ .

**Esercizio 7** (facoltativo). Dimostrare che l'addizione tra lunghezze ha la proprietà commutativa (cioè, se  $l$  ed  $l'$  sono lunghezze qualsiasi, si ha  $l + l' = l' + l$ ).

Suggerimento. Prendere tre punti  $A \preceq A' \preceq A''$  (appartenenti a qualche retta orientata) con  $\overline{AA'}$  di lunghezza  $l$ ,  $\overline{A'A''}$  di lunghezza  $l'$ , e considerare il verso opposto.

**Esercizio 8** (facoltativo). Dimostrare che l'addizione tra lunghezze ha la proprietà associativa (cioè se  $l$ ,  $l'$  ed  $l''$  sono lunghezze qualsiasi, si ha  $(l + l') + l'' = l + (l' + l'')$ ).

**Esercizio 9** (facoltativo). Dimostrare che la lunghezza  $l_0$  di un segmento nullo è tale che per ogni lunghezza  $l$  si abbia

$$l_0 + l = l.$$

Suggerimento. Se  $\overline{AA}$  è un segmento nullo, si fissi una retta  $r$  contenente  $A$ , un verso su di essa e data una qualunque lunghezza  $l$  si consideri l'unico punto  $B \succeq A$  tale che  $\overline{AB}$  abbia lunghezza  $l$ .

**Esercizio 10** (facoltativo). Si dimostri che non può esistere più di una lunghezza che abbia la proprietà che ha  $l_0$  nell'enunciato dell'esercizio precedente.

Suggerimento. Ricordare quanto fatto per l'elemento neutro di un gruppo.

**Osservazione 19** (facoltativa). Dai due esercizi precedenti si deduce subito che i segmenti nulli sono tutti congruenti tra loro, e che un segmento congruente ad un segmento nullo è per forza nullo.

**Definizione 51** (facoltativa). La lunghezza dei segmenti nulli sarà detta lunghezza nulla. Se  $l$  ed  $l'$  sono lunghezze qualsiasi, allora si dirà che  $l$  è minore di  $l'$  quando esiste una lunghezza non nulla  $l''$  tale che

$$l' = l + l''.$$

Si viene così ad avere una relazione nell'insieme delle lunghezze, che si indicherà, per abuso di notazione, col simbolo

$$<$$

La notazione

$$l \leq l'$$

indicherà che  $l$  è minore oppure è uguale ad  $l'$ .

**Esercizio 11** (facoltativo). Dimostrare che la relazione  $<$  nell'insieme delle lunghezze è una relazione d'ordine stretto totale.

Suggerimento. Date due lunghezze,  $l$  ed  $l'$ , si fissi una retta orientata ed un suo punto  $O$ ; se  $A$  è l'unico punto  $\succeq O$  tale che  $\overline{OA}$  ha lunghezza  $l$  e  $A'$  è l'unico punto  $\succeq O$  tale che  $\overline{OA'}$  ha lunghezza  $l'$ , si osservi che

$$l < l' \iff A \prec A'$$

e si usi l'Assioma 15 (pag. 21).

**Definizione 52** (facoltativa). Sia  $n \in \mathbb{N}_0$  e sia  $l$  una lunghezza. La lunghezza pari alla somma di  $n$  lunghezze uguali ad  $l$ , assumendo questa uguale alla lunghezza nulla nel caso  $n = 0$ , si dirà prodotto di  $n$  per  $l$ , e si indicherà con  $nl$ .

La definizione di sopra è un po' informale perché presuppone che si sappia cosa vuol dire “ $n$  lunghezze”. Non sarebbe difficile formalizzarla un po' meglio, usando la definizione di  $\mathbb{N}_0$  (cfr. Definizione 21 a pag. 11), ma non lo facciamo per limiti di tempo.

**Definizione 53** (facoltativa). *Sia  $u$  una lunghezza non nulla, sia  $l$  una lunghezza qualsiasi e si consideri l'insieme*

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : \exists m, n \in \mathbb{N}_0 : x = \frac{m}{n} \text{ e } mu \leq nl\}$$

(tale insieme è sicuramente non vuoto). L'estremo superiore di  $A$  in  $\mathbb{R}$  (ammesso che esista: cfr. Osservazione 7) si dice *misura di  $l$  rispetto ad  $u$* .

Per misura di un segmento  $\overline{PQ}$  rispetto ad  $u$  intenderemo la misura della sua lunghezza.

Vedremo più avanti che la misura di  $l$  rispetto ad  $u$  esiste sempre, e stabiliremo le sue proprietà. Per il momento proponiamo il seguente esercizio.

**Esercizio 12** (facoltativo). *Siano  $u, l$  ed  $A$  come nella Definizione 53 e siano  $m, n \in \mathbb{N}_0$ . Dimostrare che*

$$mu > nl \iff \forall x \in A, \quad x < \frac{m}{n}.$$

## 14 Congruenza tra angoli

**Prerequisito 12** *Assumiamo come nozione primitiva la congruenza tra angoli convessi propri.*

**Assioma 21** *La congruenza tra angoli convessi propri è una relazione di equivalenza nell'insieme degli angoli convessi propri.*

**Notazione 10** *La relazione di congruenza tra angoli convessi propri sarà indicata, per abuso di notazione, con lo stesso simbolo usato per la congruenza tra segmenti:*

$$\equiv$$

**Definizione 54** *Un'ampiezza è una classe di equivalenza di angoli congruenti.*

Dunque l'ampiezza di un angolo  $\alpha$  è la sua classe di equivalenza  $[\alpha]$  rispetto alla relazione di congruenza. Se  $a$  è un'ampiezza ed  $\alpha$  è un angolo, dire che “ $\alpha$  ha ampiezza  $a$ ” formalmente equivale a dire che  $\alpha \in a$ .

**Assioma 22** *Sia  $\alpha$  un angolo convesso proprio, sia  $r$  una retta, sia  $r^+$  una semiretta contenuta in  $r$  e sia  $\sigma$  un semipiano individuato da  $r$ . Allora esiste un unico angolo convesso proprio congruente ad  $\alpha$ , contenuto in  $\sigma$  e che abbia  $r^+$  come lato.*

**Assioma 23** Se  $\hat{A}OB$  e  $\hat{A}'O'B'$  sono angoli convessi propri, e se si ha

$$\hat{A}OB \equiv \hat{A}'O'B', \quad \overline{OA} \equiv \overline{O'A'}, \quad \overline{OB} \equiv \overline{O'B'},$$

allora si ha anche

$$\hat{O}BA \equiv \hat{O}'B'A' \quad e \quad \hat{O}AB \equiv \hat{O}'A'B'.$$

Includiamo ora, come materiale facoltativo, qualche risultato di geometria elementare che si deduce dagli assiomi ora introdotti.

**Esercizio 13** (facoltativo). Siano  $\hat{A}OB$  e  $\hat{A}'O'B'$  sono angoli convessi propri tali che:

$$\hat{A}OB \equiv \hat{A}'O'B', \quad \overline{OA} \equiv \overline{O'A'}, \quad \overline{OB} \equiv \overline{O'B'}.$$

Dimostrare che

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}.$$

Attenzione: si possono usare solo i risultati finora riportati, non i risultati studiati in altri corsi. In particolare, *non* si può usare il “primo teorema di congruenza dei triangoli” (anzi, l’esercizio consiste proprio nel dimostrare questo teorema).

Suggerimento. Fissato sulla retta  $r_{OA}$  il verso tale che  $O \prec A$ , sia  $C$  l’unico punto  $\preceq O$  tale che  $\overline{CO} \equiv \overline{OA}$ . Si definisca in maniera analoga  $C' \in r_{O'A'}$ . Fissato sulla retta  $r_{A'B'}$  il verso secondo cui  $A' \prec B'$ , sia  $D'$  l’unico punto  $\succeq A'$  tale che  $\overline{A'D'} \equiv \overline{AB}$ . Osservare che  $\hat{C}AB \equiv \hat{C}'A'D'$  e  $\overline{CA} \equiv \overline{C'A'}$  e dedurre che  $\hat{A}CB \equiv \hat{A}'C'D'$ . Questo implica che  $D' = B'$ , e quindi la tesi.

**Esercizio 14** (facoltativo). Siano  $\alpha$  ed  $\alpha'$  angoli (convessi propri) congruenti, sia  $\beta$  un angolo supplementare ad  $\alpha$  e sia  $\beta'$  un angolo supplementare ad  $\alpha'$ . Dimostrare che  $\beta$  e  $\beta'$  sono congruenti.

Suggerimento. Prendere dei punti  $A, O, B, C, A', O', B', C'$  tali che

$$\hat{A}OB = \alpha, \quad \hat{A}'O'B' = \alpha', \quad \hat{A}OC = \beta, \quad \hat{A}'O'C' = \beta',$$

$$\overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC} \equiv \overline{O'A'} \equiv \overline{O'B'} \equiv \overline{O'C'}$$

e tali che  $C, O, B$  siano allineati, e così pure  $C', O', B'$ . Usare quindi (più volte) l’esercizio precedente e l’Assioma 23.

**Esercizio 15** (facoltativo). Siano  $r, r'$  ed  $s$  rette contenute in un piano  $\pi$ , tali che  $s$  non sia parallela né ad  $r$  né ad  $r'$ , e supponiamo che i punti d’intersezione  $A$  e  $A'$  di  $s$  rispettivamente con  $r$  ed  $r'$  siano distinti. Detti poi  $\sigma_+$  e  $\sigma_-$  i semipiani di  $\pi$  individuati da  $s$ , sia  $B \in \sigma_+ \cap r$  e  $B' \in \sigma_- \cap r'$ . Dimostrare che

$$B'\hat{A}'A \equiv B\hat{A}A' \quad \Rightarrow \quad r \text{ ed } r' \text{ parallele}.$$

Suggerimento. Supporre per assurdo che esista un punto d’intersezione  $P$  di  $r$  ed  $r'$ . Per fissare le idee, mettersi nel caso in cui  $P \in \sigma_+$  (il caso  $P \in \sigma_-$  si tratta in maniera analoga). Considerare il punto  $P' \in r' \cap \sigma_-$  tale che  $\overline{A'P'} \equiv \overline{AP}$ . Poi usare l’Assioma 23 e l’Esercizio 14 per trovare una contraddizione con l’Assioma 22.

**Esercizio 16** (facoltativo). Nella situazione del precedente esercizio, dimostrare che vale anche l'implicazione inversa

$$r \text{ ed } r' \text{ parallele} \Rightarrow B'\hat{A}A \equiv B\hat{A}A'.$$

Suggerimento. Usare l'implicazione già dimostrata, l'Assioma 22 (pag. 28) e l'Assioma 14 (pag. 19).

L'esercizio seguente consiste in pratica nel dimostrare il "secondo criterio di congruenza dei triangoli".

**Esercizio 17** (facoltativo). Siano  $A, B, C$  punti non allineati. Siano  $A', B', C'$  punti non allineati. Se si ha

$$C\hat{A}B \equiv C'\hat{A}'B', \quad C\hat{B}A \equiv C'\hat{B}'A', \quad \overline{AB} \equiv \overline{A'B'},$$

allora si ha anche

$$A\hat{C}B \equiv A'\hat{C}'B', \quad \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}, \quad \overline{BC} \equiv \overline{B'C'}.$$

Suggerimento. Fissato su  $r_{A'C'}$  il verso secondo cui  $A' \prec C'$ , considerare l'unico punto  $D'$  che segue  $A'$  e tale che  $\overline{AC} \equiv \overline{A'D'}$ . Usare quindi l'Assioma 23, l'Assioma 22 e l'Esercizio 13.

**Esercizio 18** (facoltativo). Sia  $r$  una retta contenuta in un piano  $\pi$ , sia  $s$  una retta non parallela ad  $r$  contenuta in  $\pi$  e sia  $A$  il loro punto d'intersezione. Sia  $r'$  una retta parallela ad  $r$  contenuta in  $\pi$  e sia  $A'$  il suo punto d'intersezione con  $s$ . Sia infine  $s'$  una retta parallela ad  $s$  e siano  $B$  e  $B'$  i suoi punti d'intersezione rispettivamente con  $r$  ed  $r'$ . Dimostrare che

$$\overline{AA'} \equiv \overline{BB'} \quad \text{e} \quad \overline{AB} \equiv \overline{A'B'}.$$

**Esercizio 19** (facoltativo). Siano  $r, r'$  ed  $r''$  rette parallele contenute in un piano  $\pi$ , e siano  $s$  e  $t$  rette contenute in  $\pi$  non parallele alle precedenti. Siano  $A, A', A''$  i punti d'intersezione di  $s$  rispettivamente con  $r, r', r''$ , e siano  $B, B', B''$  i punti d'intersezione di  $t$  rispettivamente con  $r, r', r''$ . Dimostrare che

$$\overline{AA'} \equiv \overline{A'A''} \Rightarrow \overline{BB'} \equiv \overline{B'B''}.$$

Suggerimento. Considerare le parallele a  $t$  passanti per  $A$  e  $A'$ , e le loro rispettive intersezioni con  $r'$  ed  $r''$ , ed usare poi varie volte alcuni dei risultati esposti finora.

**Esercizio 20** (facoltativo). Sia  $\overline{AB}$  un segmento. Dimostrare che esiste un punto  $M$  tale che

$$\overline{AM} \equiv \overline{MB}.$$

Suggerimento. Considerare una retta  $r$  che contiene  $\overline{AB}$ , un piano  $\pi$  che contiene  $r$  ed una retta  $s \neq r$  in  $\pi$  passante per  $A$ . Prendere un punto  $M' \in s$  distinto da  $A$  e osservare che esiste un punto  $B' \neq A$  in  $s$  tale che  $\overline{AM'} \equiv \overline{M'B'}$ . Dimostrare poi (usando l'Esercizio 19) che il voluto punto  $M$  si può ottenere come intersezione di  $r$  con l'unica retta passante per  $M'$  e parallela ad  $r_{BB'}$ .

## 15 Misura di lunghezze

Alla fine del Paragrafo 13 abbiamo stabilito, come facoltativa, la definizione di *misura* di una lunghezza (o di un segmento) rispetto ad una lunghezza non nulla  $u$ . La conoscenza di tale definizione non è dunque obbligatoria. In alternativa si può assumere la nozione di misura come primitiva (prerequisito).

Le dimostrazioni dei risultati di questo paragrafo saranno facoltative (perché faranno uso di precedenti risultati facoltativi). Si devono però studiare gli enunciati (considerandoli come se fossero assiomi).

I due assiomi geometrici (che per noi sono assiomi a tutti gli effetti) che consentono di stabilire i risultati necessari sono i seguenti.

**Assioma 24** *Se  $\overline{AB}$  è un segmento ed  $u$  è una lunghezza non nulla, allora esiste sempre la misura di  $\overline{AB}$  rispetto ad  $u$ .*

**Osservazione 20** (facoltativa). *Tenendo presenti la Definizione 53 (pag. 28), l'Esercizio 12 (pag. 28) e l'Osservazione 7 (pag. 11), abbiamo che l'assioma ora enunciato equivale alla seguente affermazione:*

- *Se  $l$  è una lunghezza qualunque ed  $u$  è una lunghezza non nulla, allora esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $nu > l$ .*

*In questa forma (che è quella “classica”) l'assioma prende il nome di assioma di Archimede.*

**Assioma 25** *Sia*

$$s_1 \quad s_2 \quad \dots \quad s_n \quad \dots$$

*una successione di segmenti tale che se  $i, j \in \mathbb{N}$  sono tali che  $i < j$ , allora il segmento  $s_i$  contiene il segmento  $s_j$ . Allora esiste almeno un punto contenuto in tutti i segmenti  $s_n$ , cioè:*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} s_n \neq \emptyset.$$

**Proposizione 16** *Sia  $\overline{AB}$  un segmento ed  $u$  una lunghezza non nulla. La misura di  $\overline{AB}$  rispetto ad  $u$  è un numero reale non negativo (cioè  $\geq 0$ ).*

*Dimostrazione.* (facoltativa). Si deduce subito dalla Definizione 53 (pag. 28) e dall'Assioma 24.  $\square$

**Definizione 55** *Spesso si sottintende di aver fissato una lunghezza non nulla  $u$  (detta unità di misura) e, parlando di misura di  $\overline{AB}$ , si sottintende “rispetto ad  $u$ ”. Tale misura viene anche chiamata modulo di  $\overline{AB}$  e viene indicata con  $|\overline{AB}|$ .*

*Se  $AB$  è un segmento orientato, per modulo di  $AB$  intendiamo il modulo di  $\overline{AB}$ .*

Più in generale, quando riferiamo ad un segmento orientato  $AB$  un termine che abbiamo definito solo per i segmenti (non orientati), intenderemo riferirci ad  $\overline{AB}$ .

**Proposizione 17** *Sia  $u$  una lunghezza non nulla e sia  $x$  un numero reale  $\geq 0$ . Allora esiste un'unica lunghezza  $l$  tale che la misura di  $l$  rispetto ad  $u$  sia  $x$ .*

La dimostrazione della proposizione ora enunciata è facoltativa, e la riportiamo qui sotto dopo alcuni esercizi preparatori (sempre facoltativi).

**Esercizio 21** (facoltativo). *Dimostrare che per qualunque numero reale  $x$  si ha*

$$x + 1 > x .$$

Naturalmente la cosa sembra ovvia, ma l'esercizio consiste nel dimostrarla solo sulla base di quanto abbiamo stabilito nei paragrafi precedenti. Le conoscenze acquisite nel corso di Analisi o nella scuola superiore possono servire come guida, ma non usate direttamente.

Suggerimento. Osservare che  $1 \cdot 1 = 1$  e usare il secondo punto della Proposizione 7 (pag. 11). Poi usare il primo punto di detta proposizione.

**Esercizio 22** — *proprietà di Archimede per i numeri reali (facoltativo). Siano  $x, y \in \mathbb{R}$  con  $y > 0$ . Allora esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $ny > x$ .*

Suggerimento. Considerare l'insieme

$$S = \{ny : n \in \mathbb{N}\} ,$$

supporre per assurdo che  $x$  sia maggiore di tutti gli elementi di  $S$  e considerare di conseguenza l'estremo superiore di  $S$ . Poi sfruttare l'esercizio precedente e la proprietà distributiva.

Dimostriamo ora la Proposizione 17.

*Dimostrazione.* (facoltativa). Si fissi una semiretta  $s$ , sia  $O$  la sua origine e sia  $U_1$  l'unico punto di  $s$  tale che  $\overline{OU_1}$  abbia lunghezza  $u$ . Grazie all'Esercizio 20 (pag. 30), possiamo costruire una successione

$$U_1, \quad U_2, \quad \dots, \quad U_n, \quad \dots$$

di punti di  $s$  tale che per ogni numero naturale  $n$  si abbia  $\overline{OU_{n+1}} \equiv \overline{U_{n+1}U_n}$ . Indicando con  $u_n$  la lunghezza di  $\overline{OU_n}$  (quindi  $2^{n-1}u_n = u$ ), sia  $x_n$  il più grande numero in  $\mathbb{N}_0$  tale che  $\frac{x_n}{2^{n-1}} \leq x$  (tale numero esiste per la proprietà di Archimede per i numeri reali). Indichiamo poi con  $A_n$  l'unico punto di  $s$  tale che  $\overline{OA_n}$  abbia lunghezza  $x_n u_n$  e con  $B_n$  l'unico punto di  $s$  tale che  $\overline{OB_n}$  abbia lunghezza  $(x_n + 1)u_n$ . Lasciamo come esercizio facoltativo di dimostrare che la successione di segmenti

$$\overline{A_1B_1}, \quad \overline{A_2B_2}, \quad \dots, \quad \overline{A_nB_n}, \quad \dots$$

soddisfa l'ipotesi dell'Assioma 25, che non possono esistere due punti distinti contenuti in tutti i segmenti della successione e che, detto  $X$  l'unico punto appartenente a tutti i segmenti della successione, la lunghezza di  $\overline{OX}$  soddisfa le condizioni richieste.  $\square$

**Proposizione 18** Sia  $\vec{r}$  una retta orientata e siano  $A \preceq A' \preceq A''$  punti su  $r$ . Allora si ha

$$|\overline{AA''}| = |\overline{AA'}| + |\overline{A'A''}|.$$

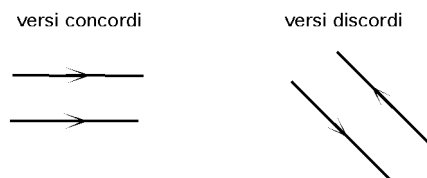
**Esercizio 23** (facoltativo). Dimostrare la Proposizione 18.

**Proposizione 19** Un segmento è nullo se e solo se ha modulo nullo.

**Esercizio 24** (facoltativo). Dimostrare la Proposizione 19.

## 16 Versi concordi

Siano  $r$  ed  $s$  rette parallele. Fissato un verso su  $r$ , è abbastanza intuitivo (vedi figura qui sotto) che uno dei versi di  $s$  è *concorde* con il verso scelto, mentre l'altro è *discorde*.



Dunque, si può tranquillamente assumere la nozione di “versi concordi” come prerequisito, considerando come assiomi le sue proprietà fondamentali.

Tuttavia, per chi è molto curioso, riportiamo qui come materiale facoltativo una definizione di “versi concordi” stabilita in termini delle nozioni già definite, e alcuni risultati preparatori. Ai fini dell’esame, si può tranquillamente passare alla parte finale di questo paragrafo, dove enunciamo le proprietà fondamentali della “concordanza”.

**Esercizio 25** (facoltativo). Sia  $r$  una retta, si fissi un verso su  $r$  e siano  $A, B$  punti su  $r$  tali che  $A \prec B$ . Allora esiste almeno un punto  $C$  tale che

$$A \prec C \prec B$$

e almeno un punto  $D$  che segue  $B$ .

Suggerimento. Usare l’Assioma 19 (pag. 26) e l’Esercizio 20 (pag. 30).

**Proposizione 20** (facoltativa). Siano  $r$  ed  $s$  due rette propriamente parallele, sia  $\pi$  il piano che le contiene, sia  $P$  un punto di  $s$  e sia  $\pi_+$  il semipiano di  $\pi$  individuato da  $r$  che contiene  $P$ . Allora  $s$  è tutta contenuta in  $\pi_+$ .

*Dimostrazione.* (facoltativa). Sia  $Q$  un qualsiasi punto di  $s$ . Poiché  $r$  ed  $s$  sono propriamente parallele, e poiché il segmento  $\overline{PQ}$  è contenuto in  $s$ , si ha

$$\overline{PQ} \cap r = \emptyset .$$

Per definizione di semipiano, siccome  $P \in \pi_+$ , si deve avere  $Q \in \pi_+$ . Abbiamo così dimostrato che qualsiasi punto di  $s$  è contenuto in  $\pi_+$ , come volevamo.  $\square$

**Definizione 56** (facoltativa). Siano  $r$  ed  $r'$  due rette propriamente parallele e sia  $\pi$  il piano che le contiene. L'intersezione del semipiano individuato da  $r$  che contiene  $r'$  e del semipiano individuato da  $r'$  che contiene  $r$  sarà detta striscia di  $\pi$  individuata da  $r, r'$ .

**Proposizione 21** (facoltativa). Siano  $r$  ed  $r'$  due rette propriamente parallele, sia  $\pi$  il piano che le contiene, sia  $A$  un punto di  $r$  ed  $A'$  un punto di  $r'$ . Allora l'intersezione di  $r_{AA'}$  con la striscia di  $\pi$  individuata da  $r, r'$  è uguale all'insieme dei punti interni al segmento  $\overline{AA'}$ .

*Dimostrazione.* (facoltativa). Fissiamo su  $r_{AA'}$  il verso tale che  $A \prec A'$ . Sia  $\pi_+$  il semipiano individuato da  $r$  che contiene  $r'$  e sia  $\pi_+'$  il semipiano individuato da  $r'$  che contiene  $r$ .

Per l'Osservazione 16 (pag. 23), l'insieme dei punti che seguono  $A$  è l'intersezione di  $r_{AA'}$  con uno dei semipiani individuati da  $r$ . Poiché  $A'$  è tra questi punti, il semipiano in questione è  $\pi_+$ . Dunque l'insieme dei punti che seguono  $A$  è uguale a

$$\pi_+ \cap r_{AA'} .$$

Allo stesso modo si vede che l'insieme dei punti che precedono  $A'$  è uguale a

$$\pi_+' \cap r_{AA'} .$$

Dunque l'insieme dei punti interni al segmento  $\overline{AA'}$  è

$$(\pi_+ \cap r_{AA'}) \cap (\pi_+' \cap r_{AA'}) .$$

Ma

$$(\pi_+ \cap r_{AA'}) \cap (\pi_+' \cap r_{AA'}) = (\pi_+ \cap \pi_+') \cap r_{AA'} ,$$

e  $\pi_+ \cap \pi_+'$  è per definizione la striscia di  $\pi$  individuata da  $r, r'$ . Questo prova che l'insieme dei punti interni al segmento  $\overline{AA'}$  è uguale a detta striscia, come volevamo.  $\square$

**Definizione 57** (facoltativa). Siano  $r$  ed  $r'$  due rette propriamente parallele, sia  $\pi$  il piano che le contiene, sia  $A$  un punto di  $r$  ed  $A'$  un punto di  $r'$ . Un verso su  $r$  ed un verso su  $r'$  saranno detti concordi rispetto ad  $A, A'$  se i punti che seguono  $A$  e i punti che seguono  $A'$  stanno tutti su uno stesso semipiano di  $\pi$  individuato da  $r_{AA'}$ .

**Proposizione 22** (facoltativa). Siano  $r$  ed  $r'$  due rette propriamente parallele, si fissi su ciascuna un verso e siano  $A$  un punto su  $r$  e  $A'$  un punto su  $r'$ . Se esiste un punto  $B \in r$  che segue  $A$  ed un punto  $B' \in r'$  che segue  $A'$  tali che

$$\overline{AA'} \cap \overline{BB'} = \emptyset$$

allora i versi fissati sono concordi rispetto ad  $A, A'$ .

*Dimostrazione.* (facoltativa). Consideriamo la retta  $r_{AA'}$  e il segmento  $\overline{BB'}$ . La retta  $r_{AA'}$  non può contenere  $B$ , altrimenti, contenendo i due punti distinti  $A$  e  $B$  di  $r$ , sarebbe uguale ad  $r$ , il che è impossibile perché  $A' \in r'$  (propriamente parallela ad  $r$ ). Allo stesso modo si vede che  $r_{AA'}$  non può contenere  $B'$ .

La retta  $r_{AA'}$  non può nemmeno contenere un punto interno al segmento  $\overline{BB'}$ , perché per la Proposizione 21 tali punti sono contenuti nella striscia individuata da  $r, r'$ , e (sempre per la stessa proposizione) dovrebbero appartenere al segmento  $\overline{AA'}$ , mentre per ipotesi  $\overline{AA'} \cap \overline{BB'} = \emptyset$ .

Concludiamo che

$$r_{AA'} \cap \overline{BB'} = \emptyset.$$

Quindi  $B$  e  $B'$  stanno sullo stesso semipiano individuato da  $r_{AA'}$  (nel piano che contiene  $r$  ed  $r'$ ), il che prova che i versi fissati sono concordi rispetto ad  $A, A'$ .  $\square$

**Proposizione 23** (facoltativa). *Siano  $r$  ed  $r'$  due rette propriamente parallele, si fissi su ciascuna un verso e siano  $A$  un punto su  $r$  e  $A'$  un punto su  $r'$ . Se esiste un punto  $B \in r$  che segue  $A$  ed un punto  $B' \in r'$  che segue  $A'$  tali che*

$$\overline{AA'} \cap \overline{BB'} \neq \emptyset$$

*allora i versi fissati non sono concordi rispetto ad  $A, A'$ .*

*Dimostrazione.* (facoltativa). Siccome  $\overline{AA'}$  è contenuto in  $r_{AA'}$  si ha a maggior ragione

$$r_{AA'} \cap \overline{BB'} \neq \emptyset.$$

Dunque  $B$  e  $B'$  non stanno su uno stesso semipiano individuato da  $r_{AA'}$ . Questo prova che i versi fissati non sono concordi rispetto ad  $A, A'$ .  $\square$

**Osservazione 21** (facoltativa). *Le Proposizioni 22 e 23 continuano ovviamente a valere anche se, invece di supporre che  $B$  e  $B'$  seguano rispettivamente  $A$  e  $A'$ , si suppone che precedano.*

**Proposizione 24** (facoltativa). *Siano  $r$  ed  $r'$  due rette propriamente parallele, si fissi su ciascuna un verso e siano  $A, B \in r$  e  $A', B' \in r'$ . Se i versi fissati sono concordi rispetto ad  $A, A'$  allora sono concordi anche rispetto a  $B, B'$ .*

*Dimostrazione.* (facoltativa). Per l'Esercizio 25, e per la proprietà transitiva dei versi, possiamo trovare un punto  $C \in r$  che segue sia  $A$  che  $B$  e un punto  $C' \in r'$  che segue sia  $A'$  che  $B'$ . Siccome i versi sono concordi rispetto ad  $A, A'$ , per la Proposizione 23 si ha

$$\overline{AA'} \cap \overline{CC'} = \emptyset.$$

Per l'Osservazione 21, visto che  $A$  e  $A'$  precedono entrambi  $C$  e  $C'$ , si ha che i versi sono concordi anche rispetto a  $C$  e  $C'$ .

In maniera analoga si prova che, essendo i versi concordi rispetto a  $C$  e  $C'$ , essi sono concordi anche rispetto a  $B$  e  $B'$ .  $\square$

La proposizione ora dimostrata, prova che se due versi su rette propriamente parallele sono concordi rispetto a una coppia di punti, allora sono concordi rispetto a qualsiasi altra coppia di punti. Quindi ha senso dare la seguente definizione.

**Definizione 58** (facoltativa). Siano  $r$  ed  $r'$  rette parallele e fissiamo un verso su ciascuna. Se  $r$  ed  $r'$  sono impropriamente parallele, diremo che i versi fissati sono concordi se coincidono. Se  $r$  ed  $r'$  sono propriamente parallele, diremo che i versi fissati sono concordi se sono concordi rispetto a qualsiasi coppia di punti  $A \in r$ ,  $A' \in r'$ .

*I due versi saranno detti discordi se non sono concordi.*

La conoscenza della definizione di sopra è facoltativa. Chi non intende studiarla dovrà però considerare la nozione di “versi concordi” come primitiva.

**Proposizione 25** Sia  $d$  una direzione (vedi Definizione 33, pag. 20), sia  $\mathcal{V}$  l'insieme di tutti i versi definiti su rette di direzione  $d$ , e sia  $\mathcal{R}$  la relazione di “concordanza” in  $\mathcal{V}$ , cioè la relazione definita da

$$v \mathcal{R} v' \iff v \text{ e } v' \text{ concordi}.$$

Allora si ha:

- $\mathcal{R}$  è una relazione di equivalenza.
- $v' \mathcal{R} v \text{ e } v'' \mathcal{R} v \implies v' \mathcal{R} v''$ .
- I due versi opposti di ciascuna retta sono discordi (cioè non concordi).

Se si vuole assumere la nozione di “versi concordi” come primitiva, si può considerare la proposizione di sopra come un assioma.

**Esercizio 26** (facoltativo). Dimostrare la Proposizione 25.

Suggerimento. Nel caso di rette tutte contenute in uno stesso piano, la cosa è abbastanza immediata sulla base dei risultati precedenti. La vera difficoltà consiste nelle dimostrazioni dei fatti che riguardano tre rette non contenute in uno stesso piano, per le quali può essere utile inventarsi la definizione di *semispazio* (non c'è bisogno di nessun nuovo assioma).

**Definizione 59** Due segmenti orientati paralleli saranno detti concordi se i loro rispettivi versi sono restrizioni di versi concordi.

## 17 Vettori liberi ordinari

Diamo ora una definizione importante.

**Definizione 60** Due segmenti orientati si dicono equipollenti se sono congruenti, paralleli e concordi. Due coppie ordinate di punti  $(A, B)$  e  $(A', B')$  si dicono equipollenti se i segmenti orientati  $AB$  e  $A'B'$  sono equipollenti.

**Proposizione 26** L'equipollenza dà luogo ad una relazione di equivalenza nell'insieme delle coppie ordinate di punti (e nell'insieme dei segmenti orientati).

**Esercizio 27** (facoltativo). Dimostrare la Proposizione 26.

L'esercizio proposto sopra è comunque decisamente facile da risolvere, visto che sappiamo che la congruenza tra segmenti, il parallelismo tra rette e la concordanza tra versi su rette parallele sono tutte relazioni di equivalenza.

**Definizione 61** Una classe d'equivalenza di coppie ordinate di punti, rispetto alla relazione di equipollenza, si chiama vettore libero ordinario (o semplicemente vettore libero). Se  $(A, B)$  è una coppia ordinata di punti, il vettore da esso individuato (cioè l'insieme delle coppie ad essa equipollenti) sarà indicato con  $B - A$ . In tal caso si dirà che il segmento orientato  $AB$  è un rappresentante di  $B - A$ .

La definizione classica di vettore libero lo identifica con una classe di equipollenza di *segmenti orientati*. Tale definizione è sostanzialmente equivalente alla nostra. Abbiamo preferito usare le coppie ordinate, per "allontanare" il concetto di vettore da quello di segmento. È molto conveniente pensare che un vettore libero sia una differenza di punti (un po' come i numeri interi negativi sono differenze di numeri naturali).

**Proposizione 27** I segmenti orientati nulli costituiscono una classe di equivalenza rispetto alla relazione di equipollenza tra segmenti orientati.

*Dimostrazione.* (facoltativa). Basta tenere presente l'Osservazione 19 (pag. 27) e il fatto che, in base alle Definizioni 40 (pag. 22) e 59 (pag. 36), un segmento orientato nullo è parallelo e concorde a qualunque segmento.  $\square$

**Definizione 62** Il vettore rappresentato dai segmenti orientati nulli si dice vettore nullo e si indica con  $\mathbf{0}$ .

**Osservazione 22** Due segmenti orientati sono equipollenti se e solo se i loro opposti sono equipollenti.

**Definizione 63** Sia  $\mathbf{v}$  un vettore libero. Il vettore libero rappresentato dai segmenti opposti ai segmenti che rappresentano  $\mathbf{v}$  sarà detto opposto a  $\mathbf{v}$  e sarà indicato con  $-\mathbf{v}$ .

**Osservazione 23** Poiché segmenti equipollenti sono in particolare congruenti, essi hanno lo stesso modulo (rispetto ad una fissata unità di misura  $u$ ; cfr. Definizione 55, pag. 31).

**Definizione 64** Sia  $\mathbf{v}$  un vettore libero. Il modulo dei segmenti che rappresentano  $\mathbf{v}$  si dirà modulo di  $\mathbf{v}$ , e si indicherà con

$$|\mathbf{v}|$$

## 18 Parallelismo per i vettori

**Proposizione 28** *Siano  $s$  ed  $s'$  segmenti orientati equipollenti, sia  $r$  una retta,  $\pi$  un piano e sia  $t$  un qualunque segmento. Si ha:*

$$\begin{aligned} s \text{ parallelo ad } r &\iff s' \text{ parallelo ad } r, \\ s \text{ parallelo a } \pi &\iff s' \text{ parallelo a } \pi, \\ s \text{ parallelo a } t &\iff s' \text{ parallelo a } t. \end{aligned}$$

Tralasciamo la (facile) dimostrazione.

**Definizione 65** *Sia  $\mathbf{v}$  un vettore libero.*

*Il vettore  $\mathbf{v}$  si dice parallelo ad una retta  $r$  se i segmenti orientati che lo rappresentano sono paralleli ad  $r$  (cfr. la proposizione precedente).*

*Il vettore  $\mathbf{v}$  si dice parallelo ad un piano  $\pi$  se i segmenti orientati che lo rappresentano sono paralleli a  $\pi$  (cfr. la proposizione precedente).*

*Il vettore  $\mathbf{v}$  si dice parallelo ad un vettore libero  $\mathbf{w}$  se i segmenti orientati che rappresentano  $\mathbf{v}$  sono paralleli ai segmenti orientati che rappresentano  $\mathbf{w}$  (cfr. la proposizione precedente).*

**Osservazione 24** *Il vettore nullo è parallelo a qualsiasi retta, a qualsiasi piano e a qualsiasi vettore.*

**Esercizio 28** *Siano  $s, s', t, t'$  segmenti orientati paralleli tra loro e tali che  $s$  ed  $s'$  sono equipollenti e  $t$  e  $t'$  sono equipollenti. Dimostrare che*

$$s \text{ è concorde a } t \iff s' \text{ è concorde a } t'$$

**Definizione 66** *Due vettori paralleli  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  si dicono concordi se i segmenti orientati che rappresentano  $\mathbf{u}$  sono concordi ai segmenti orientati che rappresentano  $\mathbf{v}$ .*

## 19 Somma di un punto con un vettore libero

**Proposizione 29** *Dato un punto  $A$  ed un vettore libero  $\mathbf{v}$ , esiste uno e un solo punto  $B$  tale che  $\mathbf{v} = B - A$ .*

**Esercizio 29** *Dimostrare la proposizione di sopra.*

**Definizione 67** *Nella situazione della precedente proposizione, il punto  $B$  si dice somma di  $A$  e  $\mathbf{v}$ , e si denota con*

$$A + \mathbf{v}.$$

**Osservazione 25** *Per definizione di somma di  $A$  e  $\mathbf{v}$ , si ha*

$$B = A + \mathbf{v} \iff \mathbf{v} = B - A$$

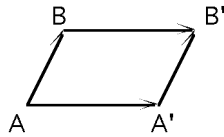
*Tali uguaglianze sono entrambe equivalenti all'affermazione che il segmento orientato  $AB$  rappresenta il vettore libero  $\mathbf{v}$ .*

**Osservazione 26** Ogni coppia  $(A, \mathbf{v})$  determina un segmento orientato  $AB$  (quello con  $B = A + \mathbf{v}$ ). Ogni segmento orientato  $AB$  proviene da un'unica coppia  $(A, \mathbf{v})$  (quella con  $\mathbf{v} = B - A$ ). Dunque c'è una naturale applicazione biettiva tra l'insieme delle coppie del tipo  $(A, \mathbf{v})$  e l'insieme dei segmenti orientati. Un vettore applicato può essere formalmente definito sia come una coppia  $(A, \mathbf{v})$ , sia come un segmento orientato  $AB$  (o addirittura come una coppia  $(A, B)$ ).

## 20 Addizione tra vettori liberi

**Proposizione 30** Siano  $A, A', B, B'$  punti. Si ha

$$B - A = B' - A' \iff A' - A = B' - B.$$



**Esercizio 30** (facoltativo). Dimostrare la Proposizione 30.

Suggerimento. Nel caso i punti  $A, A', B, B'$  non siano allineati, considerare gli angoli  $\widehat{ABA'}$  e  $\widehat{BA'B'}$ , e usare gli Esercizi 16 (pag. 30) e 13 (pag. 29). Nel caso i punti siano allineati, tenere presente l'Esercizio 7 (pag. 27).

**Proposizione 31** Siano  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  vettori liberi e siano  $A$  e  $A'$  punti. Si ha

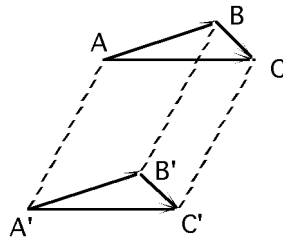
$$((A + \mathbf{u}) + \mathbf{v}) - A = ((A' + \mathbf{u}) + \mathbf{v}) - A'.$$

*Dimostrazione.* Ponendo

$$B = A + \mathbf{u}, \quad C = B + \mathbf{v}, \quad B' = A' + \mathbf{u}, \quad C' = B' + \mathbf{v}$$

il nostro obiettivo è dimostrare che

$$C - A = C' - A'.$$



Siccome  $B - A$  e  $B' - A'$  sono entrambi uguali a  $\mathbf{u}$  (cfr. Osservazione 25), la Proposizione 30 implica che

$$A' - A = B' - B .$$

Siccome  $C - B$  e  $C' - B'$  sono entrambi uguali a  $\mathbf{v}$ , la Proposizione 30 implica che

$$B' - B = C' - C .$$

Quindi

$$A' - A = C' - C .$$

Applicando ancora la Proposizione 30 abbiamo

$$C - A = C' - A' ,$$

come volevamo.  $\square$

**Definizione 68** Siano  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  vettori liberi. Il vettore

$$((A + \mathbf{u}) + \mathbf{v}) - A ,$$

dove  $A$  è un qualunque punto (cfr. Proposizione 31), si dice somma di  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , e si indica con  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ .

Detto  $V$  l'insieme dei vettori liberi, l'operazione in  $V$  che ad ogni coppia  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  associa la loro somma  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  si chiama addizione in  $V$ .

**Osservazione 27** Dalla definizione stessa di somma, ricaviamo che comunque prendiamo tre punti  $A, B, C$  si ha

$$(B - A) + (C - B) = C - A.$$

**Esercizio 31** Dimostrare che l'addizione tra vettori liberi ha la proprietà associativa; cioè, dati dei vettori liberi  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  si ha

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) .$$

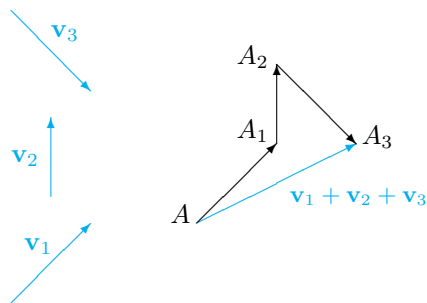
Dalla proprietà associativa segue che la somma di molti vettori

$$\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_n$$

non dipende da come si mettono le parentesi. Inoltre, se si fissa un punto  $A$  qualunque, e si pone  $A_1 = A + \mathbf{v}_1$ ,  $A_2 = A_1 + \mathbf{v}_2$ ,  $\dots$ ,  $A_n = A_{n-1} + \mathbf{v}_n$ , si ha

$$\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_n = A_n - A$$

(la figura qui sotto mostra un caso con  $n = 3$ ).



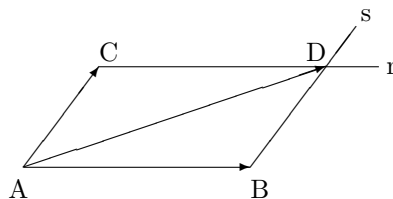
Questo modo di calcolare la somma di più vettori, in qualche testo viene informalmente chiamato “regola della poligonale”.

La somma di più vettori non dipende nemmeno dall’ordine in cui i vettori vengono scritti; vale cioè, come ora vediamo, la proprietà commutativa.

**Proposizione 32** *Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  sono vettori liberi qualsiasi, si ha*

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} .$$

*Dimostrazione.* (cenno). Supponiamo dapprima che i due vettori non siano paralleli. Rappresentiamo  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  tramite due segmenti orientati  $AB$  e  $AC$  aventi l’origine nello stesso punto  $A$ . Sia  $\pi$  il piano passante per  $A, B, C$ , sia  $r$  la retta passante per  $C$  e parallela ad  $r_{AB}$  e sia  $s$  la retta passante per  $B$  e parallela ad  $r_{AC}$ . Poiché  $r$  ed  $s$  sono contenute in  $\pi$ , e non sono parallele (perché stiamo supponendo  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  non paralleli), esse si intersecano in un punto  $D$ .



È abbastanza intuitivo, e non sarebbe difficile dimostrare (cfr. l’Esercizio facoltativo 18 a pag. 30) che il segmento orientato  $CD$  è equipollente ad  $AB$  e il segmento orientato  $BD$  è equipollente ad  $AC$ . Allora abbiamo

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (B - A) + (D - B) = D - A$$

e

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = (C - A) + (D - C) = D - A .$$

Quindi

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} ,$$

il che dimostra la proprietà commutativa nel caso di vettori non paralleli.

Tralasciamo il caso (più semplice) di vettori paralleli.  $\square$

Parlando informalmente, la figura “delimitata” dai quattro segmenti considerati qui sopra può essere chiamata *parallelogramma*. Dunque la somma  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  di due vettori non paralleli è rappresentata dalla diagonale (orientata)  $AD$  del parallelogramma che ha per lati i rappresentanti  $AB$  e  $AC$  di  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ . Questo fatto viene chiamato informalmente “regola del parallelogramma”, ed è utile quando si vogliono rappresentare i vettori con segmenti orientati aventi la stessa origine.

**Proposizione 33** *Sia  $V$  l'insieme dei vettori liberi e sia  $+$  l'operazione di addizione in  $V$ . Allora  $(V, +)$  è un gruppo abeliano. L'elemento neutro è  $\mathbf{0}$  e il simmetrico di un qualunque vettore è il suo opposto.*

**Esercizio 32** *Dimostrare la proposizione di sopra.*

## 21 Prodotto di un numero reale per un vettore libero

**Definizione 69** *Sia  $x \in \mathbb{R}$ . Il valore assoluto di  $x$  è il numero reale definito da:*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Si ha:

$$x \geq 0 \iff x = |x|$$

$$x \leq 0 \iff x = -|x|$$

**Proposizione 34** *Sia  $\mathbf{v}$  un vettore libero e  $x$  un numero reale  $\geq 0$ . Allora esiste un unico vettore  $\mathbf{w}$  parallelo e concorde a  $\mathbf{v}$  tale che*

$$|\mathbf{w}| = x \cdot |\mathbf{v}|.$$

**Esercizio 33** *Dimostrare la Proposizione 34.*

**Definizione 70** *Sia  $\mathbf{v}$  un vettore libero e sia  $k$  un numero reale.*

*Se  $k \geq 0$ , l'unico vettore parallelo e concorde a  $\mathbf{v}$  tale che*

$$|\mathbf{w}| = k \cdot |\mathbf{v}|$$

*(cfr. Proposizione 34) sarà detto prodotto di  $k$  per  $\mathbf{v}$  e sarà indicato con*

$$k\mathbf{v}.$$

*Se  $k < 0$  definiamo il prodotto  $k\mathbf{v}$  uguale a*

$$|k|(-\mathbf{v})$$

*(cfr. Definizione 63 a pag. 37).*

Enunciamo nella seguente proposizione le proprietà fondamentali del prodotto di un numero per un vettore libero.

**Proposizione 35** *Siano  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  vettori liberi e siano  $h$  e  $k$  numeri reali. Si ha*

1.  $h(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = h\mathbf{v} + h\mathbf{w}$
2.  $(h + k)\mathbf{v} = h\mathbf{v} + k\mathbf{v}$
3.  $(hk)\mathbf{v} = h(k\mathbf{v})$
4.  $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

Tralasciamo la dimostrazione. Diciamo solo qualche parola “facoltativa”. La dimostrazione non presenta particolari difficoltà. L’unico punto che richiede un po’ più di lavoro è (1). Per dimostrare questo punto è utile conoscere il seguente fatto, noto come Teorema di Talete.

—Date tre rette parallele  $r, r', r''$  contenute in un piano  $\pi$ , con  $r \neq r''$ , date due rette  $s$  e  $t$  contenute in  $\pi$  e non parallele alle precedenti, e detti  $A, A'$  e  $A''$  i punti di intersezione di  $s$  rispettivamente con  $r, r', r''$ , e analogamente  $B, B', B''$  le intersezioni di  $t$ , si ha

$$\frac{|AA'|}{|AA''|} = \frac{|BB'|}{|BB''|}.$$

Nella nostra impostazione questo teorema si può dimostrare senza particolari difficoltà (solo con un po’ di fatica) tenendo presenti la Definizione 53 e l’Esercizio 19.

Il lettore esuberante può provare a dimostrare la Proposizione 35 per conto suo (anche se questo è controproducente ai fini del proseguimento degli studi). Alcuni dettagli possono essere anche trovati negli appunti di un altro corso (file ElementiGA.pdf nella cartella pubblica del sito web docenti), tenendo però presente che l’impostazione è lievemente differente.

## 22 Ortogonalità

**Definizione 71** *Un angolo convesso proprio si dice retto se è congruente ad un suo supplementare.*

**Proposizione 36** *Esiste almeno un angolo retto.*

Tralasciamo la dimostrazione.

**Osservazione 28** *Non sarebbe difficile dimostrare (cfr. l’esercizio facoltativo 14) che se due rette in un piano individuano un angolo retto, allora tutti e quattro gli angoli da esse individuati sono retti.*

**Proposizione 37** *Due angoli retti sono congruenti. Se un angolo è congruente ad un angolo retto, allora è retto.*

Tralasciamo la dimostrazione.

**Definizione 72** *Se due rette in un piano individuano quattro angoli retti, allora diremo che sono perpendicolari. Se due rette qualunque sono rispettivamente parallele a due rette perpendicolari, allora diremo che sono ortogonali.*

Dunque, per noi la parola “perpendicolari” è riservata per coppie di rette contenute in uno stesso piano, mentre “ortogonali” possono esserlo anche due rette sghembe. Qui c’è da dire che la terminologia non è unanime. Per alcuni testi, invece, “perpendicolari” e “ortogonali” sono sinonimi.

Con questa definizione di ortogonalità, sarebbe lecito il dubbio se in un piano ci possano essere rette ortogonali ma non perpendicolari. Per eliminare questo dubbio, è utile la seguente definizione.

**Definizione 73** *Siano  $\vec{r}, \vec{r}', \vec{s}, \vec{s}'$  rette orientate tali che:*

- $\vec{r}$  ed  $\vec{r}'$  sono parallele e concordi;
- $\vec{s}$  ed  $\vec{s}'$  sono parallele e concordi;
- $r$  ed  $s$  sono diverse ed incidenti.
- $r'$  ed  $s'$  sono diverse ed incidenti.

*Allora diremo che l'angolo individuato da  $\vec{r}$  ed  $\vec{s}$  e l'angolo individuato da  $\vec{r}'$  ed  $\vec{s}'$  sono corrispondenti.*

Enunciamo la seguente proposizione.

**Proposizione 38** *Angoli corrispondenti sono congruenti.*

Diciamo solo qualche parola “facoltativa” riguardo alla dimostrazione.

Nel caso le rette stiano tutte in uno stesso piano, basta tenere presenti gli Esercizi 16 (pag. 30) e 14 (pag. 29).

Nel caso generale, conviene dimostrare prima il “terzo criterio di congruenza dei triangoli”, e poi usare un trucco simile a quello della dimostrazione della Proposizione 31 a pag. 39.

Le Proposizioni 37 e 38 mostrano che due rette ortogonali contenute in un piano sono per forza perpendicolari.

Un'altra “lezione” che si ricava dalla Proposizione 38 è che l'ampiezza di un angolo, essendo invariante per sostituzione dei lati con lati paralleli, misura in sostanza la “distanza” tra due direzioni. Dunque, anche se due rette sono sghembe, esse danno luogo ad una ampiezza.

**Definizione 74** *Due segmenti si dicono ortogonali se sono rispettivamente contenuti in rette ortogonali.*

**Osservazione 29** *Le Proposizioni 37 e 38 implicano che se  $s$  e  $t$  sono segmenti non nulli ortogonali, ed  $s'$  e  $t'$  sono rispettivamente paralleli ad  $s$  e  $t$ , allora anche  $s'$  e  $t'$  sono ortogonali.*

Ha allora senso stabilire la seguente definizione.

**Definizione 75** Due vettori liberi  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  si dicono ortogonali se i segmenti che rappresentano  $\mathbf{v}$  sono ortogonali ai segmenti che rappresentano  $\mathbf{w}$ .

**Proposizione 39** Sia  $r$  una retta contenuta in un piano  $\pi$  e sia  $P$  un punto di  $\pi$ . Allora esiste una ed una sola retta contenuta in  $\pi$  che passi per  $P$  e sia perpendicolare ad  $r$ .

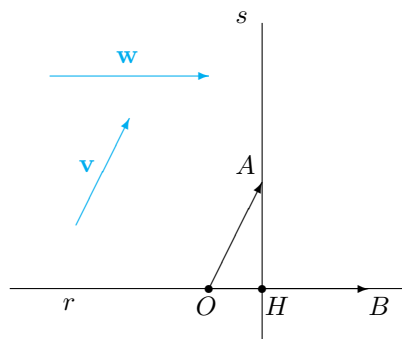
Tralasciamo i dettagli della dimostrazione, che peraltro è abbastanza immediata sulla base degli Assiomi 14 e 22 e delle Proposizioni 36, 37 e 38.

Se non ci vincoliamo a stare in un piano, allora possono esistere infinite perpendicolari ad una retta  $r$  passanti per un punto  $P$ : questo accade se e solo se  $P \in r$ . Le rette per  $P$  ortogonali ad  $r$  sono invece infinite, sia se  $P$  appartiene ad  $r$ , sia se non vi appartiene.

**Osservazione 30** Il vettore nullo è ortogonale a qualunque vettore.

## 23 Prodotto scalare tra vettori liberi

Siano  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  vettori liberi. Scelto un punto  $O$ , siano  $OA$  e  $OB$  i rispettivi rappresentanti di  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  aventi origine in  $O$ . Sia  $r$  una retta contenente  $O$  e  $B$  e sia  $\pi$  un piano contenente  $O$ ,  $A$  e  $B$ . Per la Proposizione 39, esiste un'unica retta  $s$  contenuta in  $\pi$ , ortogonale ad  $r$  e passante per  $A$ . Poiché  $r$  ed  $s$  sono ortogonali e contenute in  $\pi$ , esse si intersecano in un unico punto  $H$ .



Non sarebbe difficile dimostrare che il modulo  $|OH|$  non dipende dalla scelta di  $O$ ,  $r$  e  $\pi$ , cioè che vale la seguente proposizione.

**Proposizione 40** Siano  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$ ,  $O$ ,  $B$ ,  $H$  come sopra. Sia  $O'$  un qualunque punto, siano  $O'A'$  e  $O'B'$  i rispettivi rappresentanti di  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  aventi origine in  $O'$ , sia  $r'$  è una retta contenente  $O'$  e  $B'$ , sia  $\pi'$  un piano contenente  $O'$ ,  $A'$  e  $B'$ , sia  $s'$  la perpendicolare ad  $r'$  passante per  $A'$  e contenuta in  $\pi'$ , sia infine  $H'$  l'intersezione di  $r'$  ed  $s'$ . Allora si ha

$$|OH| = |O'H'|.$$

Inoltre si ha

$$OH \text{ concorde ad } OB \iff O'H' \text{ concorde ad } O'B' .$$

Tralasciamo la dimostrazione, che sarebbe peraltro immediata sulla base dei risultati stabiliti nella parte facoltativa.

**Definizione 76** Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w}, O, B, H$  come sopra. Fissata una unità di misura  $u$ , definiamo il prodotto scalare di  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  rispetto ad  $u$ , come il numero reale

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \begin{cases} |OB| \cdot |OH|, & \text{se } OB \text{ e } OH \text{ sono concordi;} \\ -|OB| \cdot |OH|, & \text{se } OB \text{ e } OH \text{ sono discordi;} \end{cases}$$

**Proposizione 41** I vettori liberi  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  sono ortogonali se e solo se  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ .

*Dimostrazione.* Nel caso  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$  si ha che le due condizioni sono entrambe vere (quindi equivalenti in questo caso).

Nel caso  $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$  basta osservare che, conservando le notazioni introdotte all'inizio, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ ortogonali} &\iff \overline{OA} \subseteq s \iff H = O \iff |\overline{OH}| = 0 \iff \\ &\iff \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 \end{aligned}$$

□

**Proposizione 42** Siano  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  vettori liberi e sia  $h \in \mathbb{R}$ . Si ha

1.  $\mathbf{v} \cdot (h\mathbf{w}) = h(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$
2.  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$

Tralasciamo i dettagli della (facilissima) dimostrazione.

**Osservazione 31** Dalla Proposizione 42, (2) si ricava subito:

- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$

**Proposizione 43** (proprietà commutativa del prodotto scalare). Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  vettori liberi. Allora si ha

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} .$$

Tralasciamo la dimostrazione, che sarebbe peraltro immediata sulla base dei risultati stabiliti nella parte facoltativa (in particolare del teorema di Talete).

**Osservazione 32** Dalla proprietà commutativa e dalla Proposizione 42, (1) segue subito che, dati due vettori liberi  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ , si ha

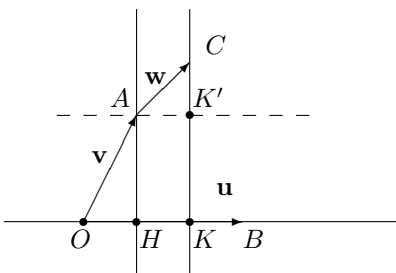
- $(h\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = h(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ .

**Proposizione 44** Siano  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  vettori liberi paralleli ad un piano  $\pi$  (vedremo più avanti che questa ipotesi di parallelismo si può eliminare). Allora si ha

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}.$$

Non entriamo nei dettagli della (facile) dimostrazione: la figura qui sotto dovrebbe essere abbastanza illuminante.

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$$



L'idea fornita da questa figura funziona anche nel caso di vettori non rappresentabili in uno stesso piano, solo che in questo caso la dimostrazione formale (fatta sulla base dei risultati precedenti) è più elaborata.

Facciamo vedere come il caso dei vettori complanari è già sufficiente per dimostrare immediatamente un importantissimo teorema (che, se si vuole, potrà essere usato per dimostrare il caso generale dei vettori non complanari).

**Proposizione 45** (teorema di Pitagora). Siano  $r$  ed  $s$  rette perpendicolari, sia  $O$  il loro punto comune, sia  $A$  un punto su  $r$  e  $B$  un punto su  $s$ . Allora si ha

$$|\overline{AB}|^2 = |\overline{OA}|^2 + |\overline{OB}|^2.$$

*Dimostrazione.* Poniamo  $\mathbf{v} = A - O$ ,  $\mathbf{w} = O - B$ . I vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  sono rappresentati dai segmenti orientati  $OA$  e  $BO$ , che giacciono su rette ortogonali. Dunque  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  sono ortogonali. Inoltre si ha

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = A - B.$$

Quindi

$$\begin{aligned} |\overline{AB}|^2 &\stackrel{\text{Prop. 42, (2)}}{=} (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \stackrel{\text{Prop. 44}}{=} \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \stackrel{\text{Prop. 41}}{=} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \stackrel{\text{Prop. 42, (2)}}{=} \\ &= |\overline{OA}|^2 + |\overline{OB}|^2, \end{aligned}$$

come volevamo dimostrare.  $\square$

**Proposizione 46** (proprietà “distributiva” del prodotto scalare rispetto alle addizioni). Siano  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  vettori liberi. Allora si ha

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}.$$

Tralasciamo la dimostrazione.

## 24 Misura di angoli

**Prerequisito 13** Assumiamo come nota la nozione di misura di un angolo convesso proprio rispetto ad un’ampiezza.

**Proposizione 47** Due angoli hanno la stessa misura rispetto ad una fissata ampiezza se e solo se sono congruenti.

Avendo assunto la nozione di misura di angoli come prerequisito (sebbene possa essere definita in maniera analoga alla misura di lunghezze), la proposizione di sopra si può considerare come se fosse un assioma (sebbene possa essere dimostrata).

**Definizione 77** Sia  $\pi$  un piano, sia  $O \in \pi$  e sia  $l$  una lunghezza. L’insieme dei punti  $P \in \pi$  tali che  $\overline{OP}$  abbia lunghezza  $l$  si dice circonferenza di centro  $O$  e raggio  $l$  in  $\pi$ .

**Proposizione 48** Sia  $\gamma$  una circonferenza di centro  $O$  e raggio non nullo  $l$  in un piano  $\pi$  e sia  $r$  una retta contenuta in  $\pi$  e passante per  $O$ . Siano poi  $s_1, \dots, s_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ )  $n$  semirette di origine  $O$ , tutte contenute in uno stesso semipiano di  $\pi$  individuato da  $r$  e tali che comunque scegliamo tre numeri  $i < j < k$  in  $\{1, \dots, n\}$  allora  $s_j - \{O\}$  è contenuto nell’angolo convesso individuato da  $s_i$  ed  $s_k$ . Detti  $P_1, \dots, P_n$  i punti d’intersezione di  $\gamma$  rispettivamente con  $s_1, \dots, s_n$ , indichiamo con  $m_{s_1, \dots, s_n}$  la somma delle misure dei segmenti  $\overline{P_1P_2}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}$  rispetto ad  $l$ . Infine indichiamo con  $S$  l’insieme di tutti i numeri reali  $m_{s_1, \dots, s_n}$  che possono essere ottenuti in questo modo.

Allora si ha:

- $S$  non dipende dalla scelta di  $\pi, O, l$  ed  $r$ .
- $S$  ammette estremo superiore.

Tralasciamo la dimostrazione.

**Definizione 78** L’estremo superiore dell’insieme  $S$  considerato nella precedente proposizione viene detto  $\pi$  greco, ed indicato con  $\pi$  (da non confondere col piano).

Al di là della forma un po’ pesante, abbiamo sostanzialmente definito  $\pi$  come la lunghezza di una semicirconferenza rispetto al raggio.

**Proposizione 49** *Esiste un'unica ampiezza tale che gli angoli retti misurino  $\frac{\pi}{2}$  rispetto ad essa.*

Tralasciamo la dimostrazione.

**Definizione 79** *L'ampiezza tale che gli angoli retti misurino  $\frac{\pi}{2}$  rispetto ad essa si dice radiante. La misura di un angolo  $\alpha$  rispetto a tale ampiezza si dice misura in radianti di  $\alpha$ .*

Non sarebbe difficile dimostrare (forse solo un po' noioso) che la misura in radianti di un angolo  $\alpha$  esprime la misura di un arco di circonferenza sotteso da  $\alpha$  rispetto al raggio (la quale può essere definita in maniera simile a quanto fatto per le semicirconferenze).

**Proposizione 50** *Un numero reale  $x$  è la misura in radianti di un angolo convesso proprio se e solo se*

$$0 < x < \pi .$$

Tralasciamo la dimostrazione.

**Definizione 80** *Siano  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$  due rette orientate. Se  $r$  ed  $s$  non sono parallele, allora definiamo angolo tra  $\vec{r}$  ed  $\vec{s}$  la misura in radianti dell'angolo individuato da due rette orientate incidenti  $\vec{r}'$  e  $\vec{s}'$ , rispettivamente parallele e concordi ad  $\vec{r}$  ed  $\vec{s}$ . Se  $r$  ed  $s$  sono parallele, definiamo angolo tra  $\vec{r}$  ed  $\vec{s}$  il numero 0 se  $\vec{r}$  ed  $\vec{s}$  sono concordi, o il numero  $\pi$  se sono discordi. L'angolo tra  $\vec{r}$  ed  $\vec{s}$  sarà a volte denotato con  $\widehat{r\vec{s}}$ .*

La Proposizione 38 a pag. 44 assicura che la definizione ora data non dipende dalla scelta di  $\vec{r}'$  e  $\vec{s}'$ .

Il termine “angolo” tra  $\vec{r}$  ed  $\vec{s}$  non è formalmente corretto, in quanto  $\vec{r}$  ed  $\vec{s}$  non danno luogo ad un angolo ma ad un'ampiezza, ed il numero da noi definito non è a stretto rigore un'ampiezza, ma la sua misura in radianti. Comunque questo abuso di linguaggio è comodo e non dà luogo a problemi particolari.

**Definizione 81** *Siano  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  due vettori liberi non nulli. Definiamo angolo tra  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  l'angolo tra due rette orientate rispettivamente parallele e concordi a  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ . L'angolo tra  $\mathbf{u}$  ed  $\mathbf{v}$  sarà a volte denotato con  $\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}}$ .*

## 25 Seno e coseno

**Proposizione 51** *Sia  $\alpha$  un angolo (convesso proprio) individuato da due rette orientate  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$ , e sia  $\alpha'$  un angolo individuato da due rette orientate  $\vec{r}'$  e  $\vec{s}'$ . Detti  $O$  ed  $O'$  i rispettivi vertici di  $\alpha$  e  $\alpha'$ , sia  $A$  un punto su  $s$  seguente  $O$  e  $A'$  un punto su  $s'$  seguente  $O'$ . Sia  $H$  l'intersezione di  $r$  con la perpendicolare ad  $r$  stessa passante per  $A$ , e sia  $H'$  l'intersezione di  $r'$  con la perpendicolare ad  $r'$  stessa passante per  $A'$ .*

*Se  $\alpha$  ed  $\alpha'$  sono congruenti allora si ha:*

- $\frac{|OH|}{|OA|} = \frac{|O'H'|}{|O'A'|}$
- $\frac{|AH|}{|OA|} = \frac{|A'H'|}{|O'A'|}$
- $H \succ O \iff H' \succ O$ .

Tralasciamo la dimostrazione, che sarebbe peraltro immediata sulla base dei risultati stabiliti nella parte facoltativa.

**Definizione 82** Siano  $\alpha$ ,  $O$ ,  $A$ ,  $H$ , come sopra.

Il numero reale dato da

$$\begin{cases} \frac{|OH|}{|OA|}, & \text{se } H \succeq O \\ -\frac{|OH|}{|OA|}, & \text{se } H \preceq O; \end{cases}$$

si dice coseno di  $\alpha$ , e si indica con  $\cos \alpha$ .

Il numero reale

$$\frac{|AH|}{|OA|}$$

si dice seno di  $\alpha$ , e si indica con  $\sin \alpha$ .

La Proposizione 51 assicura che la definizione è ben posta (non dipende dalla scelta di  $A$ ).

**Definizione 83** Se  $x$  è la misura in radianti di un angolo  $\alpha$ , definiamo il coseno di  $x$  (denotato con  $\cos x$ ) ponendolo uguale al coseno di  $\alpha$ . Definiamo il seno di  $x$  (denotato con  $\sin x$ ) ponendolo uguale al seno di  $\alpha$ .

Le Proposizioni 47 e 51 assicurano che la definizione è ben posta (il seno e il coseno di un numero  $x$  non dipendono dalla scelta di un  $\alpha$  che abbia misura  $x$ ). D'altra parte, la Proposizione 50 implica che la definizione ora data ci dà il seno e il coseno solo per i numeri  $x$  tali che  $0 < x < \pi$ .

**Definizione 84** Poniamo per definizione

$$\sin 0 = 0, \sin \pi = 0, \cos 0 = 1, \cos \pi = -1$$

Se poi  $x$  è un numero reale tale che

$$-\pi \leq x < 0$$

poniamo per definizione

$$\sin x = -\sin |x|, \cos x = \cos |x|.$$

Infine, se  $x$  è un numero reale non compreso tra  $-\pi$  e  $\pi$ , detto  $n$  il massimo numero intero tale che  $x - 2\pi n \geq -\pi$ , poniamo per definizione

$$\sin x = \sin(x - 2\pi n), \cos x = \cos(x - 2\pi n).$$

Le notazioni

$$\sin x \quad e \quad \cos x$$

si leggono rispettivamente seno di  $x$  e coseno di  $x$ .

**Proposizione 52** Siano  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  vettori non nulli. Si ha

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cdot \cos \widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}}.$$

*Dimostrazione.* Assumendo le notazioni introdotte all'inizio del Paragrafo 23 e tenendo presente che sono compatibili con quelle della Definizione 51, nel caso  $OH$  sia concorde ad  $OB$  si ha

$$|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cdot \cos \widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}} = |OA| \cdot |OB| \cdot \frac{|OH|}{|OA|} = |OB| \cdot |OH| = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w},$$

e nel caso  $OH$  sia discorde con  $OB$  si ha

$$|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cdot \cos \widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}} = |OA| \cdot |OB| \cdot \left(-\frac{|OH|}{|OA|}\right) = -|OB| \cdot |OH| = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}.$$

□

**Definizione 85** Un versore è un vettore di modulo 1.

Ovviamente la nozione di versore ha senso solo una volta che si sia fissata una un'unità di misura.

**Osservazione 33** Si ha

$$\mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ versori} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \cos \widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}}$$

## 26 Vettori numerici reali

In questo paragrafo concentreremo l'attenzione sull'insieme

$$\mathbb{R}^n$$

(cioè il prodotto cartesiano di  $n$  insiemi uguali ad  $\mathbb{R}$ ).

**Definizione 86** Sia  $n \in \mathbb{N}_0$ . Un elemento di  $\mathbb{R}^n$ , cioè una  $n$ -pla di numeri reali, viene anche detto vettore numerico (reale) di ordine  $n$ .

Il vettore numerico che ha tutte le componenti uguali a zero, viene detto vettore (numerico) nullo e viene denotato con  $\mathbf{0}$ :

$$\mathbf{0} = (0, \dots, 0).$$

Così come per i numeri reali e per i vettori geometrici, anche per i vettori numerici è possibile definire alcune utili operazioni.

**Definizione 87** Siano  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ . Definiamo la somma  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  come il vettore  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  dato da

$$c_i = a_i + b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

In altri termini, possiamo scrivere

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n).$$

**Definizione 88** Sia  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  e sia  $h$  un numero reale. Definiamo il prodotto  $h\mathbf{a}$  come il vettore  $\mathbf{b}$  dato da

$$b_i = ha_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

In altri termini, possiamo scrivere

$$h(a_1, \dots, a_n) = (ha_1, \dots, ha_n).$$

**Definizione 89** Sia  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ . Il vettore

$$(-1)\mathbf{a}$$

si chiama l'opposto di  $\mathbf{a}$  e viene denotato con

$$-\mathbf{a}.$$

In altri termini, abbiamo

$$-(a_1, \dots, a_n) = (-a_1, \dots, -a_n).$$

Molto spesso una somma

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

viene denotata semplicemente con

$$\mathbf{a} - \mathbf{b}$$

e viene chiamata differenza tra  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ .

## 27 Prodotto scalare standard

**Definizione 90** Siano  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  e  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  vettori numerici in  $\mathbb{R}^n$ . Definiamo il prodotto scalare standard di  $\mathbf{a}$  per  $\mathbf{b}$  come il numero reale

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \stackrel{\text{def.}}{=} a_1b_1 + \dots + a_nb_n.$$

**Esempio 6**

$$(1, 2, 3, 4) \cdot (5, 6, 7, 8) = 5 + 12 + 21 + 32 = 70.$$

**Proposizione 53** Siano  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vettori numerici dello stesso ordine, e sia  $h$  un numero reale. Si ha

1.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ ;
2.  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ ;
3.  $(h\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = h(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ ;
4.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$ ;
5.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$ .

Tralasciamo la (facile) dimostrazione.

## 28 Matrici sui reali

**Definizione 91** Una matrice sui reali è una matrice i cui termini sono tutti numeri reali. L'insieme delle matrici di tipo  $m \times n$  sui reali sarà denotato con

$$\mathbb{R}^{m \times n}.$$

Nei vari libri che trattano le matrici, sono anche usate differenti notazioni per l'insieme delle matrici di tipo  $m \times n$  sui reali, come ad esempio  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ,  $M(m, n; \mathbb{R})$  o simili.

**Definizione 92** Una matrice sui reali che ha tutti i termini uguali a zero viene detta matrice nulla e viene a volte denotata con  $O$ :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

**Definizione 93** Siano  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Definiamo la somma  $A + B$  come la matrice  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  data da

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

**Definizione 94** Sia  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e sia  $h$  un numero reale. Definiamo il prodotto (esterno)  $hA$  come la matrice  $B$  di tipo  $m \times n$  data da

$$b_{ij} = ha_{ij} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

**Definizione 95** Sia  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . La matrice

$$(-1)A$$

si chiama l'opposta di  $A$  e viene denotata con

$$-A.$$

Una somma

$$A + (-B)$$

viene spesso denotata semplicemente con

$$A - B$$

e viene chiamata differenza tra  $A$  e  $B$ .

**Definizione 96** Una matrice antisimmetrica è una matrice  $A$  sui reali tale che

$$A = -A^t$$

(ricordiamo che  $A^t$  è la matrice trasposta; vedi Definizione 27 a pag. 15).

**Osservazione 34** Una matrice antisimmetrica deve essere per forza quadrata. Una matrice quadrata è antisimmetrica se e solo se si ha

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

In particolare, per una matrice antisimmetrica dobbiamo avere che  $a_{ii} = -a_{ii}$ , quindi i termini del tipo  $a_{ii}$  devono essere tutti nulli.

**Esempio 7** La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 6 \\ -3 & -5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

è antisimmetrica.

## 29 Prodotto righe per colonne

**Definizione 97** Siano  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ . Definiamo il prodotto (righe per colonne) di  $A$  per  $B$  come la matrice  $C \in \mathbb{R}^{m \times p}$  data da

$$c_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}^j \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, p\}$$

(quindi  $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj}$ ). Tale prodotto sarà denotato con  $AB$ .

**Esempio 8**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 44 & 50 & 56 \\ 83 & 98 & 113 & 128 \end{pmatrix}.$$

**Esempio 9** *Siano*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

*Abbiamo*

$$AB = \begin{pmatrix} 14 & 15 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 22 \end{pmatrix}$$

*Quindi*

$$AB \neq BA.$$

Questo esempio mostra che il prodotto di matrici non ha la proprietà commutativa. D'altra parte, come ulteriore esempio, possiamo osservare che se  $A$  è una matrice di tipo  $3 \times 2$  e  $B$  è una matrice di tipo  $2 \times 4$ , allora il prodotto  $AB$  è definito, mentre il prodotto  $BA$  non è definito. Naturalmente, in casi particolari può succedere che un prodotto  $AB$  sia uguale a  $BA$ , ma questo avviene molto raramente.

Per fortuna il prodotto di matrici, anche se non è commutativo, ha comunque altre utili proprietà.

**Proposizione 54** *Siano  $A$  e  $A'$  matrici di tipo  $m \times n$ , siano  $B$  e  $B'$  matrici di tipo  $n \times p$ , sia  $C$  una matrice di tipo  $p \times q$  e sia  $h$  un numero reale. Si ha*

1.  $A(B + B') = AB + AB'$ ;
2.  $(A + A')B = AB + A'B$ ;
3.  $(AB)C = A(BC)$ ;
4.  $(hA)B = h(AB) = A(hB)$

## 30 Matrice identica

**Definizione 98** *Sia  $A$  la matrice quadrata di ordine  $n$  data da*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

*Tale matrice si dice matrice identica di ordine  $n$ , e si indica generalmente con  $I_n$  (o a volte anche solo con  $I$ ). I suoi termini si indicano spesso con  $\delta_{ij}$  (o  $\delta_i^j$ ), e vengono detti simboli di Kronecker.*

Quindi il simbolo di Kronecker  $\delta_{ij}$  indica semplicemente il numero 1 se  $i = j$ , o il numero 0 se  $i \neq j$ .

La matrice identica ha la seguente importante proprietà.

**Proposizione 55** *Si ha:*

- $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad AI_n = A$
- $\forall B \in \mathbb{R}^{n \times p}, \quad I_n B = B$

Tralasciamo la dimostrazione (che comunque consiste in una semplice verifica).

## 31 Determinante

**Definizione 99** Sia  $X$  un insieme. Una permutazione su  $X$  è un'applicazione biettiva

$$X \rightarrow X.$$

**Esempio 10** Sia  $X = \{1, 2, 3\}$  e consideriamo la terna ordinata  $(2, 1, 3)$ . In base alla nostra definizione di terna ordinata,  $(2, 1, 3)$  è l'applicazione  $X \rightarrow X$  tale che

$$1 \mapsto 2 \quad 2 \mapsto 1 \quad 3 \mapsto 3.$$

Quindi è una permutazione sull'insieme  $X = \{1, 2, 3\}$ .

In molti testi di algebra, una notazione del tipo  $(2, 1, 3)$  viene usata per denotare la permutazione (ciclo) tale che  $2 \mapsto 1$ ,  $1 \mapsto 3$ ,  $3 \mapsto 2$ . Noi non faremo uso di tale notazione: ci atterremo sempre a quanto detto nell'Esempio 10.

**Osservazione 35** Per definire una permutazione sull'insieme  $\{1, \dots, n\}$  basta assegnare una  $n$ -upla i cui termini sono tutti i numeri interi da 1 ad  $n$ , disposti in un ordine qualsiasi.

**Esempio 11** Tutte le possibili permutazioni dell'insieme  $\{1, 2, 3\}$  sono:

$$(1, 2, 3) \quad (1, 3, 2) \quad (2, 1, 3) \quad (2, 3, 1) \quad (3, 1, 2) \quad (3, 2, 1).$$

**Definizione 100** Sia  $\sigma$  una permutazione dell'insieme  $\{1, \dots, n\}$  e siano  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  indici tali che

$$i < j \quad \text{e} \quad \sigma(i) > \sigma(j).$$

Allora la coppia  $(i, j)$  sarà detta una *inversione* in  $\sigma$ . Definiamo poi il segno di  $\sigma$ , come il numero 1 oppure  $-1$ , a seconda che il numero delle inversioni in  $\sigma$  sia pari oppure dispari. Il segno di  $\sigma$  sarà denotato con  $\epsilon_\sigma$ .

**Esempio 12** Le inversioni della permutazione  $(2, 3, 1)$  sono  $(1, 3)$  e  $(2, 3)$ . Dunque il segno di  $(2, 3, 1)$  è 1.

La permutazione  $(2, 1, 3)$  ha solo l'inversione  $(1, 2)$ . Quindi il segno di  $(2, 1, 3)$  è  $-1$ .

Le inversioni della permutazione  $(2, 4, 3, 1)$  sono  $(1, 4)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(3, 4)$ . Dunque il segno di  $(2, 3, 1, 4)$  è 1.

**Definizione 101** Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$  sui reali. Indicato con  $S_n$  l'insieme di tutte le permutazioni su  $\{1, \dots, n\}$ , definiamo il determinante di  $A$  come il numero

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

cioè la somma di tutti i possibili prodotti  $\epsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ , con  $\sigma \in S_n$ .

Talvolta per indicare il determinante si usa anche la notazione  $\det A$ .

**Esempio 13** *L'insieme  $S_3$  è costituito dalle permutazioni descritte nell'esempio 11. Quindi il determinante della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

è dato da

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Nel caso  $n = 2$  abbiamo solo due permutazioni:  $(1, 2)$  e  $(2, 1)$ ; quindi il determinante di una matrice di ordine due è

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Il determinante di una matrice di ordine 1 è semplicemente uguale all'unico termine della matrice.

**Esempio 14** *Siano*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$|A| = 1, \quad |B| = 0, \quad |A + B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Quindi

$$|A + B| \neq |A| + |B|$$

Naturalmente, in alcuni casi il determinante di una somma può essere uguale alla somma dei determinanti, ma questo capita molto raramente.

Per fortuna il determinante, anche se non è “compatibile” con la somma, ha molte importanti proprietà. Prima di esporle, stabiliremo prima (nei prossimi paragrafi) un'utile formula per il calcolo del determinante.

## 32 Sottomatrici

**Definizione 102** *Sia  $A$  una matrice di tipo  $m \times n$ , sia  $I$  un sottoinsieme di  $\{1, \dots, m\}$  e sia  $J$  un sottoinsieme di  $\{1, \dots, n\}$ . Possiamo assumere*

$$I = \{i_1, \dots, i_r\}, \text{ con } i_1 < i_2 < \dots < i_r$$

e

$$J = \{j_1, \dots, j_s\}, \text{ con } j_1 < j_2 < \dots < j_s.$$

Definiamo la sottomatrice di  $A$  individuata dagli insiemi di indici  $I, J$  come la matrice  $B$  di tipo  $r \times s$  tale che

$$b_{hk} = a_{i_h, j_k} \quad \forall h \in \{1, \dots, r\}, \forall k \in \{1, \dots, s\}.$$

Tale matrice sarà denotata con

$$A_{I, J}.$$

**Esempio 15** Sia

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$I = \{2, 4\}$ ,  $J = \{2, 3, 5\}$ . La sottomatrice individuata da  $I$  e  $J$  è

$$A_{I, J} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

In maniera meno precisa ma più intuitiva, possiamo dire che la sottomatrice  $A_{I, J}$  si ottiene cancellando tutte le righe eccetto  $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}$  e tutte le colonne eccetto  $\mathbf{a}^{j_1}, \dots, \mathbf{a}^{j_s}$ . O anche, si può dire che  $A_{I, J}$  è formata dai quei termini che sono “all’incrocio” delle righe  $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}$  e delle colonne  $\mathbf{a}^{j_1}, \dots, \mathbf{a}^{j_s}$ .

### 33 Minori

**Definizione 103** Sia  $A$  una matrice sui reali. Un minore di  $A$  è il determinante di una qualunque sottomatrice quadrata di  $A$ .

Talvolta per abuso di linguaggio ci si riferisce al minore volendo parlare della sottomatrice; ad esempio, si dice “minore di ordine  $h$ ” per significare che il minore è il determinante di una sottomatrice di ordine  $h$ .

**Esempio 16** I minori di ordine 2 della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

sono

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12 \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15.$$

I minori di ordine 1 non sono altro che i termini della matrice.

**Definizione 104** Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$  sui reali, sia  $a_{ij}$  un suo termine e poniamo

$$I = \{1, \dots, n\} - \{i\}, \quad J = \{1, \dots, n\} - \{j\}.$$

La sottomatrice  $A_{I, J}$  è allora quadrata di ordine  $n - 1$ , e il suo determinante è un minore di  $A$  che prende il nome di minore complementare del termine  $a_{ij}$ . Il numero ottenuto moltiplicando tale minore complementare per  $(-1)^{i+j}$  si chiama complemento algebrico del termine  $a_{ij}$ , e si indica con  $A_{ij}$ :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{\{1, \dots, n\} - \{i\}, \{1, \dots, n\} - \{j\}}|.$$

## 34 Sviluppo di Laplace

La seguente proposizione presenta una formula che è utile per calcolare determinanti di ordine elevato.

**Proposizione 56** (Teorema di Laplace). *Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$  sui reali. Fissiamo un indice  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Allora si ha:*

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{in}A_{in}$$

e

$$|A| = a_{1i}A_{1i} + \dots + a_{ni}A_{ni}.$$

Le formule ora presentate sono facili da ricordare: nella prima sono presenti tutti i termini della riga  $\mathbf{a}_i$ , moltiplicati per i rispettivi complementi algebrici; nella seconda succede lo stesso per i termini della colonna  $\mathbf{a}^i$ . Per questo motivo l'espressione

$$a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{in}A_{in}$$

prende il nome di *sviluppo* (di Laplace) secondo la riga  $\mathbf{a}_i$ , mentre l'espressione

$$a_{1i}A_{1i} + \dots + a_{ni}A_{ni}.$$

prende il nome di *sviluppo* (di Laplace) secondo la colonna  $\mathbf{a}^i$ . La dimostrazione del teorema è concettualmente molto semplice: si tratta di mettere in evidenza nell'espressione del determinante i termini della riga o della colonna prescelta. Per esigenze di brevità, non possiamo entrare nei dettagli.

**Esempio 17** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Lo sviluppo del determinante secondo la prima riga è:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \\ & = (45 - 48) - 2 \cdot (36 - 42) + 3 \cdot (32 - 35) = -3 + 12 - 9 = 0. \end{aligned}$$

Lo sviluppo secondo la seconda colonna è:

$$\begin{aligned} & -2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = \\ & = -2 \cdot (36 - 42) + 5 \cdot (9 - 21) - 8 \cdot (6 - 12) = 12 - 60 + 48 = 0. \end{aligned}$$

**Esercizio 34** Calcolare, utilizzando uno sviluppo di Laplace, il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

(suggerimento: conviene usare la seconda riga, perché compaiono due zeri).

## 35 Proprietà del determinante

**Proposizione 57** Sia  $A$  una matrice quadrata sui reali e sia  $B$  la matrice ottenuta da  $A$  scambiando due righe  $\mathbf{a}_i$  e  $\mathbf{a}_j$  con  $i \neq j$ . Allora si ha

$$|B| = -|A|.$$

Rinunciamo a dimostrare questa proposizione.

Osserviamo che se le due righe scambiate sono uguali, cioè  $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j$ , allora  $B = A$ ; quindi si ha  $|A| = -|A|$ , e dunque  $|A| = 0$ . Questo dimostra il seguente risultato.

**Proposizione 58** Sia  $A$  una matrice quadrata sui reali che abbia due righe uguali (cioè ci sono due indici  $i \neq j$  tali che  $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j$ ). Allora si ha

$$|A| = 0.$$

**Proposizione 59** Sia  $A$  una matrice quadrata sui reali, e sia  $B$  una matrice ottenuta da  $A$  moltiplicando una riga per un numero  $h \in \mathbb{R}$ . Allora si ha

$$|B| = h|A|.$$

Anche qui rinunciamo ai dettagli dimostrativi, anche se consisterebbero in un semplice conto sulla definizione del determinante (o, se si vuole, sullo sviluppo di Laplace secondo la riga che viene moltiplicata). In maniera simile si potrebbe dimostrare anche la seguente proposizione.

**Proposizione 60** Siano  $A, B, C$  matrici quadrate di ordine  $n$  sui reali tali che per un indice  $i$  si abbia

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_h &= \mathbf{b}_h = \mathbf{c}_h \quad \forall h \neq i \\ \mathbf{a}_i &= \mathbf{b}_i + \mathbf{c}_i \end{aligned}$$

(quindi le matrici differiscono solo per la  $i$ -esima riga, e la  $i$ -esima riga di  $A$  è la somma della  $i$ -esima riga di  $B$  con la  $i$ -esima riga di  $C$ ). Allora si ha:

$$|A| = |B| + |C|.$$

**Esempio 18** Se consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

siamo nella situazione della proposizione 60, dunque si deve avere  $|A| = |B| + |C|$ . Ed infatti  $|A| = 52$ ,  $|B| = 48$ ,  $|C| = 4$ .

Un semplice (ma importante) fatto da tenere presente è il seguente.

**Proposizione 61** Tutte le proposizioni di questo paragrafo valgono anche per le colonne.

Questo fatto può anche essere dedotto dalla seguente proposizione.

**Proposizione 62** Per ogni matrice quadrata  $A$  sui reali si ha

$$|A^t| = |A|.$$

## 36 Matrice inversa

**Definizione 105** Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$  sui reali. La matrice  $A$  si dice invertibile se esiste una matrice  $B$  tale che

$$AB = I_n \quad e \quad BA = I_n .$$

Una tale matrice  $B$  si dice inversa di  $A$  e si indica con  $A^{-1}$ .

**Esempio 19** Una matrice nulla di ordine  $n > 0$  non è invertibile.

**Esempio 20** Se una matrice  $A$  ha due righe uguali (cioè esistono  $i \neq j$  tali che  $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j$ ), per come è definito il prodotto righe per colonne qualunque prodotto  $AB$  ha due righe uguali (se  $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j$  e  $C = AB$ , allora  $\mathbf{c}_i = \mathbf{c}_j$ ). Dunque  $A$  non può essere invertibile.

**Proposizione 63** Per ogni matrice invertibile esiste un'unica matrice inversa.

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $B$  e  $C$  siano inverse di  $A$ . Allora si ha:

$$B = I_n B = CAB = CI_n = C .$$

□

**Proposizione 64** Siano  $A$  e  $B$  matrici quadrate di ordine  $n$ . Si ha

$$|AB| = |A||B| .$$

Tralasciamo la dimostrazione.

**Proposizione 65** Se  $A$  è invertibile, allora  $|A| \neq 0$ .

*Dimostrazione.* È facile vedere che il determinante di  $I_n$  è uguale ad 1 (per ogni  $n$ ). Dunque, siccome  $AA^{-1} = I_n$  (con  $n$  uguale all'ordine della matrice quadrata  $A$ ), la proposizione precedente implica che

$$|A||A^{-1}| = 1 .$$

Dunque  $|A|$  non può essere uguale a 0. □

**Definizione 106** Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$  sui reali. Definiamo la matrice aggiunta di  $A$  come la matrice  $A^*$  data da

$$a_{ij}^* = A_{ji}$$

(ricordiamo che  $A_{ji}$  è il complemento algebrico di  $a_{ji}$ ).

**Proposizione 66** *Sia  $A$  una matrice quadrata sui reali. Se  $|A| \neq 0$  allora  $A$  è invertibile e l'inversa è data da*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*.$$

Tralasciamo la dimostrazione.

In sintesi, una matrice quadrata è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

**Esempio 21** *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Il determinante è*

$$|A| = 2(3 - 1) - 1(5 - 2) = 1.$$

*Siccome il determinante è diverso da 0, la matrice è invertibile. Calcoliamo l'inversa. I complementi algebrici sono:  $A_{11} = 2$ ,  $A_{12} = -3$ ,  $A_{13} = -1$ ,  $A_{21} = -1$ ,  $A_{22} = 2$ ,  $A_{23} = 0$ ,  $A_{31} = 1$ ,  $A_{32} = -2$ ,  $A_{33} = 1$ . Dunque l'aggiunta è*

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Quindi l'inversa è*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = 1 \cdot A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 37 Spazi vettoriali

Nei paragrafi precedenti abbiamo incontrato, oltre alle operazioni definite in un insieme, anche delle operazioni tra elementi di insiemi diversi (quelle date dal prodotto di un numero reale per una matrice, o per un vettore numerico o libero). Una tale operazione si chiama “operazione esterna”, perché interviene un elemento esterno all'insieme su cui effettuiamo l'operazione.

**Definizione 107** *Sia  $S$  un insieme. Un'operazione (binaria) esterna su  $S$  con operatori in un insieme  $\Gamma$  è un'applicazione*

$$\Gamma \times S \rightarrow S.$$

*Molto spesso, data una operazione esterna, l'immagine di una coppia  $(h, s)$  si denota semplicemente con  $hs$ .*

**Definizione 108** Uno spazio vettoriale sui reali è una terna

$$(V, +, \cdot),$$

tale che

- $(V, +)$  è un gruppo abeliano

e tale che  $\cdot$  è un'operazione esterna con operatori nell'insieme dei numeri reali tale che, comunque si prendano  $h, k \in \mathbb{R}$  ed  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ , si abbia

- $h(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = h\mathbf{u} + h\mathbf{v}$
- $(h + k)\mathbf{u} = h\mathbf{u} + k\mathbf{u}$
- $(hk)\mathbf{u} = h(k\mathbf{u})$
- $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Gli elementi di  $V$  saranno detti vettori e (in questo contesto) i numeri reali saranno spesso chiamati scalari.

Il termine “scalari” è dovuto a motivi legati alla Fisica (e al fatto che  $\mathbb{R}$  è totalmente ordinato).

Esiste una definizione più ampia di “spazio vettoriale”, che si ottiene sostituendo i numeri reali con un *campo* arbitrario. Un campo è dato da un insieme e da due operazioni, che soddisfano alcune (naturali) proprietà. Ad esempio l'insieme {vero, falso} ha una struttura di campo molto naturale (data dalle operazioni logiche “et” e “aut”). Purtroppo non abbiamo tempo per trattare questa nozione più generale.

**Definizione 109** Sia  $(V, +, \cdot)$  uno spazio vettoriale. L'elemento neutro del gruppo  $(V, +)$  sarà detto vettore nullo di  $V$  e sarà sempre indicato con  $\mathbf{0}$ . Il simmetrico di un vettore  $\mathbf{u}$  sarà detto opposto di  $\mathbf{u}$  e sarà indicato con  $-\mathbf{u}$ .

La somma di un vettore  $\mathbf{v}$  con l'opposto  $-\mathbf{w}$  di un vettore  $\mathbf{w}$  sarà detta differenza di  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ , e sarà indicata con

$$\mathbf{v} - \mathbf{w}.$$

Molto spesso, per brevità si usa parlare dello “spazio vettoriale  $V$ ”, lasciando sottintese le operazioni di addizione e di moltiplicazione per scalari. Quindi, invece di dire “sia  $(V, +, \cdot)$  uno spazio vettoriale”, spesso diremo semplicemente “sia  $V$  uno spazio vettoriale”.

**Esempio 22** Sia  $V$  l'insieme dei vettori liberi, sia  $+$  l'addizione in  $V$  (vedi Definizione 68, pag. 40) e sia  $\cdot$  l'operazione esterna data dal prodotto di numeri reali per vettori liberi (vedi Definizione 70, pag. 42). Per le Proposizioni 33 (pag. 42) e 35 (pag. 43),  $(V, +, \cdot)$  è uno spazio vettoriale.

**Esempio 23** Sia  $+$  l'operazione di addizione in  $\mathbb{R}^n$  (che associa a due vettori numerici la loro somma) e sia  $\cdot$  l'operazione esterna data dal prodotto di numeri reali per vettori numerici. Allora  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  è uno spazio vettoriale (tralasciamo i semplici dettagli dimostrativi).

**Esempio 24** Sia  $+$  l'operazione di addizione in  $\mathbb{R}^{m \times n}$  (che associa a due matrici sui reali la loro somma) e sia  $\cdot$  l'operazione esterna data dal prodotto di numeri reali per matrici sui reali. Allora  $(\mathbb{R}^{m \times n}, +, \cdot)$  è uno spazio vettoriale (tralasciamo i semplici dettagli dimostrativi).

**Definizione 110** Sia  $X$  un insieme, siano  $f$  e  $g$  due funzioni  $X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Definiamo la funzione somma  $f + g$  come la funzione  $X \rightarrow \mathbb{R}$  che associa ad ogni  $x \in X$  la somma  $f(x) + g(x) \in \mathbb{R}$ .

Definiamo la funzione prodotto  $fg$  come la funzione  $X \rightarrow \mathbb{R}$  che associa ad ogni  $x \in X$  il prodotto  $f(x) \cdot g(x) \in \mathbb{R}$ .

Se  $h$  è un numero reale, identificandolo per abuso di notazione con la funzione (costante)  $X \rightarrow \mathbb{R}$  che ad ogni  $x \in X$  associa  $h$ , resta definita la funzione prodotto  $hf$  del numero  $h$  per  $f$ .

**Esempio 25** Sia  $X$  un insieme, sia  $\mathbb{R}^X$  l'insieme di tutte le funzioni  $X \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $+$  l'operazione di addizione in  $\mathbb{R}^X$  (che associa a due funzioni la loro somma) e sia  $\cdot$  l'operazione esterna data dal prodotto di numeri reali per funzioni. Allora  $(\mathbb{R}^X, +, \cdot)$  è uno spazio vettoriale (tralasciamo i semplici dettagli dimostrativi).

Gli esempi ora visti mostrano che le definizioni e i risultati validi per gli spazi vettoriali possono essere utilmente applicati a molte situazioni diverse. Vale quindi la pena di studiarli.

## 38 Proprietà elementari degli spazi vettoriali

**Proposizione 67** Sia  $V$  uno spazio vettoriale. Allora si ha

- $0\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{u} \in V$
- $h\mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \forall h \in \mathbb{R}$
- $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in V$

**Esercizio 35** (facoltativo). Dimostrare la Proposizione 67.

### 38.1 Combinazioni lineari

**Definizione 111** Sia  $V$  uno spazio vettoriale. Una  $n$ -upla  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  di vettori di  $V$  sarà a volte chiamata un sistema di vettori<sup>4</sup>. Il numero  $n$  sarà detto l'ordine del sistema.

<sup>4</sup>Avvertiamo che questa definizione di "sistema di vettori" differisce un po' da quella "classica". In realtà, quando si trattano i sistemi di vettori non è importante l'ordine in cui sono

**Definizione 112** Sia  $V$  uno spazio vettoriale, sia  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  un sistema di vettori e sia  $(h_1, \dots, h_n)$  una  $n$ -pla di scalari. Il vettore

$$\mathbf{w} = h_1 \mathbf{v}_1 + \dots + h_n \mathbf{v}_n$$

sarà detto combinazione lineare di  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  tramite  $h_1, \dots, h_n$ . In questa situazione diremo anche che il vettore  $\mathbf{w}$  dipende dal sistema  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ . Nel caso sia  $n = 0$  (quindi nessun vettore e nessuno scalare) assumiamo

$$\mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Una maniera sintetica per scrivere la combinazione  $h_1 \mathbf{v}_1 + \dots + h_n \mathbf{v}_n$  è

$$\sum_{i=1}^n h_i \mathbf{v}_i .$$

Similmente, se vogliamo esprimere sinteticamente una somma di numeri

$$a_1 + \dots + a_n ,$$

possiamo usare la notazione

$$\sum_{i=1}^n a_i .$$

**Esempio 26** Consideriamo lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^2$  e il sistema di vettori

$$( (1, 1), (3, -4) ).$$

Calcoliamo la combinazione lineare dei vettori del nostro sistema tramite gli scalari 2 e 7:

$$2(1, 1) + 7(3, -4) = (2, 2) + (21, -28) = (23, -26).$$

Dunque la combinazione lineare voluta è il vettore  $(23, -26)$ .

Calcoliamo poi la combinazione lineare tramite gli scalari 4 e 0:

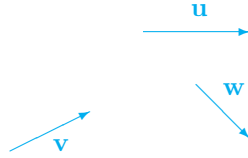
$$4(1, 1) + 0(3, -4) = (4, 4) + (0, 0) = (4, 4).$$

Dunque la nuova combinazione lineare è il vettore  $(4, 4)$ .

**Esercizio 36** Consideriamo i vettori  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  rappresentati dai segmenti orientati qui di seguito.

---

scritti; è importante però che si possano considerare dei vettori ripetuti. Parlando alla buona, la definizione classica di sistema di vettori consisteva sostanzialmente nell'introdurre il concetto di "insieme con ripetizioni" (era quindi qualcosa un po' a metà tra un insieme ed una  $n$ -upla). È inutile entrare nei dettagli: per i nostri scopi possiamo accettare di definire un sistema di vettori come una  $n$ -upla.



Il vettore  $\mathbf{w}$  dipende dal sistema  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ?

Soluzione. Sia  $O$  un qualunque punto sul piano del foglio e poniamo.

$$A = O + \mathbf{u}, \quad B = O + \mathbf{v}, \quad C = O + \mathbf{w},$$

Dette  $r$  ed  $s$  le rette passanti per  $C$  e rispettivamente parallele a  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , sia  $P$  il punto d'intersezione di  $s$  con  $r_{OA}$  e sia  $Q$  il punto d'intersezione di  $r$  con  $r_{OB}$ . Poiché  $P - O$  è parallelo a  $\mathbf{u}$  (e  $\mathbf{u}$  è non nullo), esiste uno scalare  $h$  tale che

$$P - O = h\mathbf{u}.$$

Analogamente, esiste  $k$  tale che

$$Q - O = k\mathbf{v}$$

Ricordando quanto detto per la Proposizione 32 (pag. 41), si ha

$$C - O = (P - O) + (Q - O)$$

e quindi

$$\mathbf{w} = h\mathbf{u} + k\mathbf{v}.$$

Dunque  $\mathbf{w}$  dipende da  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ .

## 38.2 Sistemi linearmente indipendenti

**Osservazione 36** *Il vettore nullo dipende da qualsiasi sistema di vettori. Infatti, dato un qualunque sistema  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ , basta considerare gli scalari tutti uguali a zero:*

$$0\mathbf{v}_1 + \dots + 0\mathbf{v}_n = \mathbf{0} + \dots + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

*Naturalmente non è detto che questo sia l'unico modo possibile per ottenere il vettore nullo. Ad esempio se consideriamo il sistema di vettori di  $\mathbb{R}^3$  dato da  $(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)$  anche la combinazione lineare tramite gli scalari  $1, -2$  e  $1$  ci dà il vettore nullo:*

$$\begin{aligned} 1(1, 2, 3) - 2(4, 5, 6) + 1(7, 8, 9) &= (1, 2, 3) - (8, 10, 12) + (7, 8, 9) = \\ &= (-7, -8, -9) + (7, 8, 9) = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Tuttavia per certi sistemi di vettori l'unico modo possibile di ottenere  $\mathbf{0}$  è quello di prendere gli scalari tutti uguali a zero. Ad esempio se prendiamo  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  (nello spazio  $\mathbb{R}^2$ ) e chiamiamo  $h$  e  $k$  due scalari qualsiasi, otteniamo che la combinazione lineare tramite  $h$  e  $k$  ci dà il vettore

$$h(1, 0) + k(0, 1) = (h, 0) + (0, k) = (h, k).$$

Questo vettore è nullo solo quando sia  $h$  che  $k$  sono nulli. Quindi, nel caso del particolare sistema  $(1, 0), (0, 1)$ , l'unico modo di ottenere il vettore nullo è quello di prendere gli scalari tutti nulli.

Ricapitolando, scegliendo gli scalari tutti nulli, una combinazione lineare dà sempre il vettore nullo. Però: per alcuni sistemi di vettori ci sono anche altri modi di ottenerlo, mentre per altri sistemi di vettori questo è l'unico modo.

**Definizione 113** Sia  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  un sistema di vettori di uno spazio vettoriale. Se esistono degli scalari  $h_1, \dots, h_n$  non tutti nulli tali che la combinazione lineare

$$h_1\mathbf{v}_1 + \dots + h_n\mathbf{v}_n$$

sia il vettore nullo, allora diremo che il sistema  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  è linearmente dipendente. In caso contrario (cioè se l'unico modo di ottenere il vettore nullo come combinazione lineare di  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  è quello di prendere gli scalari tutti uguali a zero) allora diremo che il sistema  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  è linearmente indipendente.

**Osservazione 37** Un sistema di vettori  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  è linearmente indipendente quando vale l'implicazione

$$h_1\mathbf{v}_1 + \dots + h_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Rightarrow h_1 = 0, \dots, h_n = 0.$$

**Proposizione 68** Sia  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  un sistema di vettori di uno spazio vettoriale e sia  $\mathbf{v}$  un vettore che dipende da  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ . Allora il sistema

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v})$$

(cioè il sistema ottenuto “aggiungendo”  $\mathbf{v}$ ) è linearmente dipendente.

*Dimostrazione.* Siccome  $\mathbf{v}$  dipende dal sistema  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ , allora esistono degli scalari  $h_1, \dots, h_n$  tali che

$$\mathbf{v} = h_1\mathbf{v}_1 + \dots + h_n\mathbf{v}_n.$$

Sommando l'opposto di  $\mathbf{v}$  ai due membri dell'uguaglianza di sopra, e tenendo conto che  $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ , otteniamo

$$\mathbf{0} = h_1\mathbf{v}_1 + \dots + h_n\mathbf{v}_n + (-1)\mathbf{v}.$$

Dunque la combinazione  $h_1\mathbf{v}_1 + \dots + h_n\mathbf{v}_n + (-1)\mathbf{v}$  è nulla ed ha lo scalare  $-1$  che è non nullo. Quindi il sistema  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v})$  è linearmente dipendente, come volevamo dimostrare.  $\square$

Se, viceversa, abbiamo un sistema linearmente dipendente  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v})$ , allora non sempre si ha che  $\mathbf{v}$  dipende da  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ .

**Esempio 27** Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^2$  consideriamo il sistema

$$((1, 1), (2, 2), (0, 1)).$$

Poiché abbiamo la combinazione

$$2(1, 1) + (-1)(2, 2) + 0(0, 1)$$

che è uguale al vettore nullo, allora il sistema è linearmente dipendente. Tuttavia l'ultimo vettore,  $(0, 1)$ , non dipende dai primi due. Infatti una qualunque combinazione

$$h(1, 1) + k(2, 2)$$

dà un vettore del tipo  $(h + 2k, h + 2k)$ , che ha le due componenti uguali tra loro. Quindi non può essere uguale ad  $(1, 0)$ , che ha le due componenti diverse tra loro.

**Proposizione 69** Sia  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  un sistema di vettori linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale. Allora c'è almeno uno dei vettori che dipende dai rimanenti.

*Dimostrazione.* Siccome il sistema  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  è linearmente dipendente, allora esistono degli scalari  $h_1, \dots, h_n$  non tutti nulli e tali che

$$h_1 \mathbf{v}_1 + \dots + h_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Dire che gli scalari sono non tutti nulli vuol dire che c'è almeno uno scalare  $h_i \neq 0$ . Sommando ad entrambi i membri l'opposto di  $h_i \mathbf{v}_i$  otteniamo

$$h_1 \mathbf{v}_1 + \dots + h_{i-1} \mathbf{v}_{i-1} + h_{i+1} \mathbf{v}_{i+1} + \dots + h_n \mathbf{v}_n = -h_i \mathbf{v}_i.$$

Moltiplicando entrambi i membri per  $-\frac{1}{h_i}$  otteniamo

$$-\frac{h_1}{h_i} \mathbf{v}_1 - \dots - \frac{h_{i-1}}{h_i} \mathbf{v}_{i-1} - \frac{h_{i+1}}{h_i} \mathbf{v}_{i+1} - \dots - \frac{h_n}{h_i} \mathbf{v}_n = \mathbf{v}_i.$$

Quindi il vettore  $\mathbf{v}_i$  dipende dai rimanenti vettori  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ .  $\square$

Dunque in un sistema linearmente dipendente si può sempre trovare un vettore che dipende dagli altri. Anzi, di solito sono molti i vettori con questa proprietà; spesso addirittura tutti i vettori del sistema. Tuttavia, come abbiamo visto nell'esempio di prima, preso un vettore di un sistema linearmente dipendente, non possiamo essere sicuri che dipenda dagli altri. Un caso in cui invece si può essere sicuri è quello trattato nella seguente proposizione.

**Proposizione 70** Sia  $V$  uno spazio vettoriale, sia  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  un sistema di vettori e sia  $\mathbf{v}$  un vettore di  $V$ . Supponiamo che si abbia:

- il sistema  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  è linearmente indipendente;

- il sistema  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v})$  è linearmente dipendente.

Allora il vettore  $\mathbf{v}$  dipende dal sistema  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ .

*Dimostrazione.* Siccome il sistema  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v})$  è linearmente dipendente, allora esistono degli scalari non tutti nulli  $h_1, \dots, h_n, h$  tali che

$$h_1 \mathbf{v}_1 + \dots + h_n \mathbf{v}_n + h \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Osserviamo per prima cosa che  $h$  deve essere diverso da zero. Infatti, supponiamo per assurdo  $h = 0$ . Poiché gli scalari  $h_1, \dots, h_n, h$  non possono essere tutti nulli abbiamo che gli scalari  $h_1, \dots, h_n$  non sono tutti nulli; d'altra parte se  $h = 0$  otteniamo anche che

$$h_1 \mathbf{v}_1 + \dots + h_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Ma siccome il sistema  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  è linearmente indipendente questo è impossibile. Dunque  $h \neq 0$ .

Quindi, con passaggi simili a quelli della proposizione precedente, otteniamo

$$\mathbf{v} = -\frac{h_1}{h} \mathbf{v}_1 - \dots - \frac{h_n}{h} \mathbf{v}_n,$$

cioè il vettore  $\mathbf{v}$  dipende dal sistema  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ .  $\square$

### 38.3 Lemma di Steinitz

**Proposizione 71** (*lemma di Steinitz*) Siano  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$  e  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$  due sistemi di vettori di uno spazio vettoriale. Supponiamo che il sistema  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$  sia linearmente indipendente e che ogni suo vettore dipenda dall'altro sistema  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ . Allora deve essere necessariamente  $m \leq n$ .

Tralasciamo la dimostrazione.

### 38.4 Basi

**Definizione 114** Sia  $V$  uno spazio vettoriale. Un sistema di generatori (finito) di  $V$  è un sistema di vettori  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  tale che ogni vettore di  $V$  dipenda da questo sistema.

**Esempio 28** Il sistema  $(1, 0), (0, 1)$  è un sistema di generatori di  $\mathbb{R}^2$ . Infatti se prendiamo un qualsiasi vettore  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  si ha:

$$x(1, 0) + y(0, 1) = (x, 0) + (0, y) = (x, y).$$

Quindi ogni vettore di  $\mathbb{R}^2$  dipende da  $(1, 0), (0, 1)$ .

**Definizione 115** Uno spazio vettoriale si dice finitamente generato se esiste un suo sistema di generatori finito  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ .

**Osservazione 38** Sia  $V$  uno spazio vettoriale, sia  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$  un sistema linearmente indipendente e sia  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$  un sistema di generatori. Allora ogni vettore di  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ , come tutti i vettori di  $V$ , dipende dall'altro sistema  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ . Quindi per il lemma di Steinitz si ha che  $m \leq n$ .

Dall'osservazione di sopra ricaviamo che in uno spazio vettoriale finitamente generato esiste un limite massimo per il numero di vettori di un sistema linearmente indipendente. Infatti, se lo spazio è finitamente generato, allora esiste un sistema di generatori  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ ; dunque un qualunque sistema linearmente indipendente non può avere più di  $n$  vettori.

**Definizione 116** Sia  $V$  uno spazio vettoriale. Una base di  $V$  è un sistema di generatori linearmente indipendente. Una base è detta anche un riferimento (vettoriale).

**Proposizione 72** In uno spazio vettoriale finitamente generato una base esiste sempre.

*Dimostrazione.* (cenno). Poiché  $V$  è finitamente generato, esiste un sistema di generatori  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ . Se questo sistema è linearmente indipendente, allora abbiamo trovato una base.

Se invece il sistema è linearmente dipendente, per la Proposizione 69 esiste un vettore  $\mathbf{u}_i$  che dipende dagli altri. Se “togliamo” tale vettore dal sistema, otteniamo ancora un sistema di generatori. Infatti poiché un qualunque vettore  $\mathbf{v} \in V$  è combinazione lineare dei vettori  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ , e poiché il vettore  $\mathbf{u}_i$  è a sua volta combinazione lineare dei rimanenti, sostituendo  $\mathbf{u}_i$  nell'espressione che dà  $\mathbf{v}$  è possibile ottenere  $\mathbf{v}$  come una combinazione degli  $\mathbf{u}$  che non coinvolge più  $\mathbf{u}_i$ .

Abbiamo ottenuto dunque un sistema di generatori “più piccolo”. Se questo sistema è linearmente indipendente abbiamo trovato una base. Altrimenti, possiamo ripetere il ragionamento e togliere un altro vettore. Così procedendo, ad un certo punto dobbiamo per forza ottenere un sistema linearmente indipendente (se riusciamo a togliere tutti i vettori arriviamo al sistema vuoto, che è indipendente; se non ci riusciamo vuol dire che ci siamo dovuti fermare prima, cioè che abbiamo incontrato un sistema indipendente). Abbiamo dunque trovato un sistema di generatori linearmente indipendente, cioè una base, come volevamo dimostrare.  $\square$

Per gli spazi che non sono finitamente generati, esiste un risultato analogo. Per enunciarlo avremmo però bisogno di trattare i sistemi infiniti di vettori. La cosa non è affatto difficile, però dobbiamo rinunciarvi per brevità.

Abbiamo visto che in uno spazio finitamente generato una base esiste sempre. In realtà, escluso casi molto particolari, di basi ce ne sono infinite. Il fatto sorprendente è che tutte le basi devono avere lo stesso numero di vettori. Vediamo perché.

**Proposizione 73** Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno lo stesso ordine.

*Dimostrazione.* Consideriamo due basi qualsiasi,  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$  e  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ . Poiché  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$  è linearmente indipendente e  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$  è un sistema di generatori, in base all'Osservazione 38 otteniamo che  $m \leq n$ . Allo stesso modo, poiché  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$  è linearmente indipendente e  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$  è un sistema di generatori, otteniamo che  $n \leq m$ . Dunque  $m = n$ .  $\square$

### 38.5 Dimensione

**Definizione 117** Sia  $V$  uno spazio vettoriale finitamente generato. Si definisce dimensione di  $V$  l'ordine di una qualunque sua base. La dimensione di  $V$  si indica con

$$\dim V .$$

Bisogna fare un po' di attenzione a non confondere la dimensione di  $V$  con il numero di vettori di  $V$ . A parte casi molto particolari, uno spazio vettoriale finitamente generato (sui reali) ha infiniti vettori, mentre la dimensione è il numero (finito) di vettori di una sua base.

### 38.6 Componenti

**Osservazione 39** Sia  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  una base di uno spazio vettoriale  $V$  e sia  $\mathbf{v}$  un vettore di  $V$ . Poiché  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  è un sistema di generatori, esistono scalari  $x_1, \dots, x_n$  tali che

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_n \mathbf{v}_n .$$

Il fatto che  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  sia anche linearmente indipendente implica che la  $n$ -pla di scalari  $(x_1, \dots, x_n)$  è univocamente determinata, cioè è l'unica possibile che dia  $\mathbf{v}$ . Infatti, supponiamo che si abbia anche

$$\mathbf{v} = y_1 \mathbf{v}_1 + \dots + y_n \mathbf{v}_n$$

per certi scalari  $y_1, \dots, y_n$ . Allora abbiamo

$$\mathbf{v} - \mathbf{v} = (x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_n \mathbf{v}_n) - (y_1 \mathbf{v}_1 + \dots + y_n \mathbf{v}_n) .$$

Ma  $\mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , e con un po' di semplici passaggi otteniamo che  $(x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_n \mathbf{v}_n) - (y_1 \mathbf{v}_1 + \dots + y_n \mathbf{v}_n)$  è uguale a  $(x_1 - y_1) \mathbf{v}_1 + \dots + (x_n - y_n) \mathbf{v}_n$ . Dunque abbiamo

$$(x_1 - y_1) \mathbf{v}_1 + \dots + (x_n - y_n) \mathbf{v}_n = \mathbf{0} .$$

Questa è una combinazione lineare nulla di  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  con scalari

$$(x_1 - y_1), \dots, (x_n - y_n) .$$

Siccome  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  è linearmente indipendente, questi scalari sono nulli, cioè si deve avere

$$x_1 = y_1 , \dots , x_n = y_n .$$

Quindi qualsiasi combinazione di  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  che dia  $\mathbf{v}$  deve essere fatta con gli scalari uguali a  $(x_1, \dots, x_n)$ .

**Definizione 118** Sia  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  una base di uno spazio vettoriale  $V$  e sia  $\mathbf{v}$  un vettore di  $V$ . L'unica  $n$ -pla di scalari  $(x_1, \dots, x_n)$  tale che

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_n \mathbf{v}_n$$

si dice  $n$ -pla delle componenti di  $\mathbf{v}$  rispetto alla base  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ .

Bisogna stare un po' attenti quando  $V$  è uguale allo spazio  $\mathbb{R}^n$ . Se infatti  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{B}$  è una base, allora le componenti di  $(a_1, \dots, a_n)$  rispetto a  $\mathcal{B}$  sono in generale diverse dalle componenti di  $(a_1, \dots, a_n)$  intese nel senso della Definizione 22 a pag. 12 (cioè i numeri  $a_1, \dots, a_n$ ).

### 38.7 Base standard

Consideriamo i vettori numerici di  $\mathbb{R}^n$  dati dalle righe della matrice identica  $I_n$ :

$$(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1) .$$

Se  $n = 2$ , il sistema è quello incontrato nell'Esempio 28, e abbiamo visto che è un sistema di generatori di  $\mathbb{R}^2$ . Allo stesso modo, in generale il sistema

$$(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)$$

è un sistema di generatori di  $\mathbb{R}^n$ . Poiché è anche linearmente indipendente, esso costituisce una base di  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 119** Il sistema costituito dai vettori numerici di  $\mathbb{R}^n$  dati dalle righe della matrice identica  $I_n$  si dice base standard di  $\mathbb{R}^n$ .

**Osservazione 40** Dato che la base standard di  $\mathbb{R}^n$  ha ordine  $n$ , la dimensione di  $\mathbb{R}^n$  è  $n$  (come ci si aspetterebbe).

Notiamo inoltre che le componenti di un vettore  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  rispetto alla base standard sono proprio le componenti intese nel senso della Definizione 22 a pag. 12, cioè  $a_1, \dots, a_n$ .

## 39 Sottospazi

**Definizione 120** Sia  $V$  uno spazio vettoriale. Un sottoinsieme non vuoto  $W$  di  $V$  sarà detto sottospazio vettoriale se sono verificati i seguenti fatti:

- $\forall \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W$ ;
- $\forall h \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{w} \in W, h\mathbf{w} \in W$ .

**Osservazione 41** Se  $W$  è un sottospazio di  $V$ , utilizzando l'addizione e la moltiplicazione per scalari definite su  $V$  possiamo definire due operazioni su  $W$ :

$$\begin{aligned} W \times W &\rightarrow W \\ (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) &\mapsto \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbb{R} \times W &\rightarrow W \\ (h, \mathbf{w}) &\mapsto h\mathbf{w}.\end{aligned}$$

Le operazioni su  $W$  sono in sostanza le stesse di quelle di  $V$ : l'unica differenza è che sono definite su insiemi "più piccoli" (in termini più precisi, si dice che le operazioni su  $W$  sono restrizioni delle operazioni su  $V$ ). Poiché le proprietà richieste per gli spazi vettoriali valgono "in tutto  $V$ ", a maggior ragione valgono in  $W$  (per l'esistenza del vettore nullo e dell'opposto bisogna tenere presente la Proposizione 67 a pag. 64).

Dunque il sottospazio  $W$ , dotato delle due operazioni ora introdotte, è uno spazio vettoriale.

**Proposizione 74** Sia  $S = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  un sistema di vettori di uno spazio vettoriale  $V$ . L'insieme dei vettori che dipendono da  $S$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .

Tralasciamo la (facilissima) dimostrazione.

**Definizione 121** Sia  $S = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  un sistema di vettori di uno spazio vettoriale  $V$ . L'insieme dei vettori che dipendono da  $S$  si dice sottospazio generato da  $S$ , e si indica generalmente con  $L(S)$  o con  $\langle S \rangle$ .

**Osservazione 42** Se  $S$  è un sistema di vettori di uno spazio  $V$  si ha

$$S \text{ è un sistema di generatori di } V \iff \langle S \rangle = V.$$

**Esempio 29** Sia  $W$  l'insieme delle coppie  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tali che  $x = y$ . Allora  $W$  è un sottospazio di  $\mathbb{R}^2$ .

Esempi importanti di sottospazi sono forniti dalla geometria dello spazio ordinario. Prima di esporli, facciamo la seguente semplice osservazione.

**Osservazione 43** Sia  $X$  una retta o un piano, sia  $A$  un punto di  $X$  e sia  $\mathbf{v}$  un vettore libero. Allora

$$\mathbf{v} \text{ è parallelo ad } X \iff A + \mathbf{v} \in X.$$

Infatti, se  $\mathbf{v}$  è il vettore nullo la cosa è ovvia (le condizioni sono entrambe vere); se invece  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ , posto  $B = A + \mathbf{v}$ , siccome la retta  $r_{AB}$  ha in comune con  $X$  il punto  $A$ , essa è parallela ad  $X$  se e solo se lo è impropriamente, e quindi se e solo se  $B \in X$ .

**Esempio 30** Sia  $\mathcal{V}$  lo spazio dei vettori liberi ordinari, sia  $X$  una retta o un piano e sia  $\mathcal{W}$  l'insieme dei vettori paralleli ad  $X$ .

Siccome l'insieme  $\mathcal{W}$  contiene sicuramente il vettore nullo, esso è non vuoto.

Se  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathcal{W}$  allora, scelto un qualunque punto  $A \in X$  si ha che  $(A + \mathbf{w}_1) + \mathbf{w}_2 \in X$ , quindi  $A + (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) \in X$  e dunque  $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in \mathcal{W}$ .

Inoltre, per definizione di prodotto per un numero  $h \in \mathbb{R}$ , il vettore  $h\mathbf{w}_1$  è parallelo a  $\mathbf{w}_1$ , e dunque è parallelo ad  $X$ . Quindi  $h\mathbf{w}_1 \in \mathcal{W}$ .

Questo prova che  $\mathcal{W}$  è un sottospazio di  $\mathcal{V}$ .

**Proposizione 75** Sia  $\mathcal{V}$  lo spazio dei vettori liberi ordinari, sia  $r$  una retta e sia  $\mathcal{W}$  lo spazio dei vettori paralleli ad  $r$ . Allora

$$\dim \mathcal{W} = 1 .$$

**Esercizio 37** (facoltativo). Dimostrare la proposizione precedente.

**Proposizione 76** Sia  $\mathcal{V}$  lo spazio dei vettori liberi ordinari, sia  $\pi$  un piano e sia  $\mathcal{W}$  lo spazio dei vettori paralleli a  $\pi$ . Allora

$$\dim \mathcal{W} = 2 .$$

**Esercizio 38** (facoltativo). Dimostrare la proposizione precedente.

Suggerimento. Tenere presente l'Esercizio 36 a pag. 65.

**Proposizione 77** Sia  $\mathcal{V}$  lo spazio dei vettori liberi ordinari. Allora

$$\dim \mathcal{V} = 3 .$$

**Esercizio 39** (facoltativo). Dimostrare la proposizione precedente.

**Proposizione 78** Sia  $W$  un sottospazio di uno spazio finitamente generato  $V$ . Allora anche  $W$  è finitamente generato e si ha

$$\dim W \leq \dim V .$$

*Dimostrazione.* Detta  $n$  la dimensione di  $V$ , per il lemma di Steinitz un sistema indipendente di vettori di  $V$  non può avere più di  $n$  vettori. Possiamo quindi considerare, tra tutti i sistemi linearmente indipendenti di vettori di  $W$ , uno che abbia l'ordine il più grande possibile, diciamo  $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$  (e avremo comunque  $m \leq n$ ). Dunque se  $\mathbf{w}$  è un qualunque vettore di  $W$ , il sistema  $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m, \mathbf{w})$  è linearmente dipendente. Per la Proposizione 70 a pag. 68,  $\mathbf{w}$  dipende da  $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ . Dunque  $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$  è una base di  $W$ . Quindi  $W$  è finitamente generato e ha dimensione  $m \leq n = \dim V$ .  $\square$

## 40 Applicazioni lineari

**Definizione 122** Siano  $V$  e  $W$  spazi vettoriali (sui reali). Un'applicazione

$$f : V \longrightarrow W$$

si dice lineare se comunque si prendano vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$  e uno scalare  $h$ , si ha

- $f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2)$
- $f(h\mathbf{v}_1) = hf(\mathbf{v}_1)$ .

Le applicazioni lineari vengono anche dette omomorfismi.

Un'applicazione lineare con insieme d'arrivo  $\mathbb{R}$  viene anche detta forma lineare.

**Esempio 31** Consideriamo lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}$  e l'applicazione

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita da

$$f(x) = x^2$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Poiché  $f(1 + 1) = 4$  e  $f(1) + f(1) = 2$ , abbiamo  $f(1 + 1) \neq f(1) + f(1)$ . Dunque  $f$  non è un'applicazione lineare.

**Esempio 32** Consideriamo la funzione

$$\ell : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

data da

$$\ell(x, y, z) = 2x - y + 3z$$

per tutti i vettori  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

Prendiamo due vettori qualunque  $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  in  $\mathbb{R}^3$ , e un qualunque scalare  $h$ . Si ha

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= \ell(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = 2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) = \\ &= 2x_1 + 2x_2 - y_1 - y_2 + 3z_1 + 3z_2 \end{aligned}$$

e

$$\ell(\mathbf{v}_1) + \ell(\mathbf{v}_2) = 2x_1 - y_1 + 3z_1 + 2x_2 - y_2 + 3z_2$$

Per le proprietà commutativa e associativa dell'addizione in  $\mathbb{R}$ , abbiamo subito che i due valori ottenuti per  $\ell(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$  ed  $\ell(\mathbf{v}_1) + \ell(\mathbf{v}_2)$  sono uguali. Dunque

- $\ell(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \ell(\mathbf{v}_1) + \ell(\mathbf{v}_2)$ .

Inoltre si ha

$$\ell(h\mathbf{v}_1) = \ell(hx_1, hy_1, hz_1) = 2hx_1 - hy_1 + 3hz_1 = h(2x_1 - y_1 + 3z_1) = h\ell(\mathbf{v}_1),$$

dunque

- $\ell(h\mathbf{v}_1) = h\ell(\mathbf{v}_1)$ .

Valgono dunque le due proprietà necessarie ad affermare che  $\ell$  è un'applicazione lineare.

**Esercizio 40** Sia  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  e sia

$$\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

la funzione data da

$$\ell(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n,$$

per tutti i vettori  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Dimostrare che  $\ell$  è un'applicazione lineare.

**Esempio 33** Consideriamo la funzione

$$l : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

data da

$$l(x, y, z) = 2x - y + 3z + 5$$

per tutti i vettori  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Presi  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$  e  $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 0)$  abbiamo

$$l(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = l(1, 0, 0) = 7$$

e

$$l(\mathbf{v}_1) + l(\mathbf{v}_2) = 7 + 5 = 12,$$

dunque

$$l(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \neq l(\mathbf{v}_1) + l(\mathbf{v}_2).$$

Quindi l'applicazione  $l$  non è lineare.

In qualche testo è possibile trovare il termine “polinomio lineare” per indicare un polinomio di primo grado. In questo caso bisogna stare attenti, perché se tale polinomio non ha il termine noto nullo (non è omogeneo), allora non definisce un'applicazione lineare.

**Esempio 34** Sia  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  un vettore numerico e sia  $\phi_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  l'applicazione che a ciascun  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  associa il prodotto scalare standard  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$ :

$$\phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}.$$

Per le proprietà del prodotto scalare standard (Proposizione 53 a pag. 53), si ha subito che  $\phi_{\mathbf{a}}$  è un'applicazione lineare.

L'esempio di sopra risolve l'Esercizio 40.

**Esempio 35** Sia  $\mathcal{V}$  lo spazio dei vettori liberi ordinari, sia  $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$  e sia

$$\phi_{\mathbf{w}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

l'applicazione che a ciascun  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  associa il prodotto scalare  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$ :

$$\phi_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}.$$

Per le proprietà del prodotto scalare (vedi Paragrafo 23),  $\phi_{\mathbf{w}}$  è un'applicazione lineare.

**Esempio 36** Sia  $\mathcal{V}$  lo spazio dei vettori liberi, sia  $\mathbf{w}$  un versore e sia

$$\pi_{\mathbf{w}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$

l'applicazione che a ciascun  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  associa  $(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$ .

Per le proprietà del prodotto scalare e del prodotto esterno di numeri per vettori,  $\pi_{\mathbf{w}}$  è un'applicazione lineare.

Tenendo presente la definizione del prodotto scalare (e il fatto che  $\mathbf{w}$  è un versore) non è difficile capire il significato geometrico dell'applicazione  $\pi_{\mathbf{w}}$  introdotta nell'esempio qui sopra. Presa una retta  $r$  parallela a  $\mathbf{w}$ , posto  $\mathbf{v} = B - A$ , detta  $A'$  la proiezione ortogonale di  $A$  su  $r$  (cioè l'intersezione di  $r$  con una perpendicolare ad  $r$  passante per  $A$ ) e detta  $B'$  la proiezione ortogonale di  $B$  su  $r$ , si ha

$$\pi_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) = B' - A'.$$

Dunque  $\pi_{\mathbf{w}}$  è una "proiezione ortogonale vettoriale".

**Esempio 37** Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  e sia  $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  una sua base. Se un vettore  $\mathbf{v}$  ha componenti  $(x_1, \dots, x_n)$ , si ha per definizione

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n.$$

Se  $\mathbf{w}$  è un'altro vettore e  $(y_1, \dots, y_n)$  sono le sue componenti, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{w} &= x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n + y_1\mathbf{v}_1 + \dots + y_n\mathbf{v}_n = \\ &= (x_1 + y_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (x_n + y_n)\mathbf{v}_n. \end{aligned}$$

Dunque il vettore delle componenti di  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$  è  $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ , che è proprio uguale a

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n).$$

In maniera simile si vede subito che se  $h$  è un qualunque scalare, il vettore delle componenti di  $h\mathbf{v}$  è  $h(x_1, \dots, x_n)$ .

Concludiamo che l'applicazione

$$c_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

che ad ogni vettore di  $\mathbf{v}$  associa il vettore numerico delle sue componenti rispetto a  $\mathcal{B}$ , è un'applicazione lineare.

**Definizione 123** L'applicazione  $c_{\mathcal{B}}$  definita nell'esempio precedente verrà detta coordinazione rispetto a  $\mathcal{B}$ .

**Esempio 38** Sia  $V$  uno spazio vettoriale e sia  $r$  uno scalare. Se  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  sono vettori qualsiasi e  $h$  è un qualsiasi scalare, per le proprietà della moltiplicazione di scalari per vettori si ha

$$r(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = r\mathbf{v}_1 + r\mathbf{v}_2$$

e

$$r(h\mathbf{v}_1) = (rh)\mathbf{v}_1 = h(r\mathbf{v}_1).$$

Questo dimostra che l'applicazione

$$\omega_r : V \longrightarrow V$$

che ad ogni vettore  $\mathbf{v}$  associa  $r\mathbf{v}$  è un'applicazione lineare.

Se, nella situazione dell'esempio ora visto,  $V$  è lo spazio dei vettori liberi, l'applicazione  $\omega_r$  si può facilmente visualizzare: se  $r \geq 0$ ,  $\omega_r$  consiste nel contrarre ( $r < 1$ ) o dilatare ( $r > 1$ ) i vettori; se  $r < 0$  l'applicazione, oltre a questi effetti, ha quello di cambiare il verso.

Nel caso dei vettori numerici, l'applicazione ora vista consiste nel moltiplicare per  $r$  tutte le componenti. Cosa succede se invece di moltiplicarle tutte, ne moltiplichiamo solo alcune (ad esempio, solo la prima)?

**Esercizio 41** Sia  $r$  uno scalare. Dimostrare che l'applicazione

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

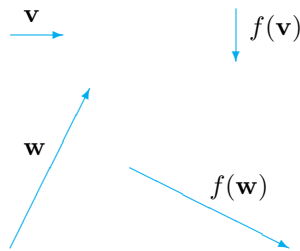
data da

$$(x, y) \mapsto (rx, y)$$

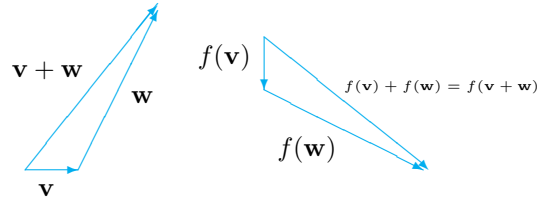
è lineare.

Se interpretiamo i vettori numerici come vettori delle componenti di vettori geometrici paralleli ad un piano, l'esempio ora visto dà luogo ad un'applicazione lineare che si può visualizzare immaginando di dilatare (o contrarre) il piano "tirandolo" lungo l'asse  $x$ .

Continuando a parlare in maniera informale, se "ruotiamo" un piano (ad esempio, di 90 gradi) diamo luogo ad un'applicazione tra vettori paralleli al piano, come illustrato nella figura qui di seguito:



È abbastanza evidente che tale applicazione è lineare (vedi figura qui sotto).



Tralasciamo di precisare quanto appena detto e di dare una definizione formale dell'applicazione ora descritta. Invitiamo il lettore a fare qualche tentativo "in proprio".

**Esempio 39** Sia  $A$  una matrice di tipo  $m \times n$ . Ricordando che  $\mathbb{R}^{m \times p}$  e  $\mathbb{R}^{n \times p}$  sono gli spazi delle matrici sui reali di tipo  $m \times p$  ed  $n \times p$ , possiamo considerare l'applicazione

$$\mathbb{R}^{n \times p} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times p}$$

data da

$$M \mapsto AM,$$

cioè l'applicazione che ad ogni matrice  $M$  di tipo  $n \times p$  associa il prodotto righe per colonne  $AM$ , che è una matrice di tipo  $m \times p$ .

Per le proprietà del prodotto righe per colonne (Proposizione 54 a pag. 55), comunque si prendano matrici  $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^{n \times p}$  e uno scalare  $h$ , abbiamo

- $A(M_1 + M_2) = AM_1 + AM_2$
- $A(hM_1) = h(AM_1)$

Dunque l'applicazione considerata è lineare.

## 41 Proprietà elementari delle applicazioni lineari

**Proposizione 79** Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare tra spazi vettoriali. Allora si ha

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

(qui abbiamo indicato con lo stesso simbolo  $\mathbf{0}$  i vettori nulli di  $V$  e  $W$ ).

*Dimostrazione.* Basta usare la Proposizione 67 a pag. 64, oppure si può osservare che

$$f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0}) - f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} + \mathbf{0}) - f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) - f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

□

**Proposizione 80** Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare tra spazi vettoriali. Allora per ogni vettore  $\mathbf{v} \in V$  si ha

$$f(-\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v}) .$$

*Dimostrazione.* Basta usare la Proposizione 67 a pag. 64, oppure si può osservare che

$$f(-\mathbf{v}) + f(\mathbf{v}) = f(-\mathbf{v} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} ,$$

e dunque  $f(-\mathbf{v})$  è l'opposto di  $f(\mathbf{v})$ , come volevamo.  $\square$

**Proposizione 81** Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare tra spazi vettoriali. Se  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$  è un sistema di vettori linearmente dipendente, allora  $(f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_n))$  è ancora un sistema di vettori linearmente dipendente.

*Dimostrazione.* Siccome  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$  è linearmente dipendente, esistono scalari  $h_1, \dots, h_n$  non tutti nulli tali che

$$h_1\mathbf{u}_1 + \dots + h_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0} .$$

Dunque si ha

$$f(h_1\mathbf{u}_1 + \dots + h_n\mathbf{u}_n) = f(\mathbf{0}) .$$

Applicando varie volte le proprietà

- $f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2)$
- $f(h\mathbf{v}_1) = hf(\mathbf{v}_1)$  ,

si ha

$$f(h_1\mathbf{u}_1 + \dots + h_n\mathbf{u}_n) = h_1f(\mathbf{u}_1) + \dots + h_nf(\mathbf{u}_n) .$$

Siccome per la Proposizione 79 si ha anche  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , otteniamo

$$h_1f(\mathbf{u}_1) + \dots + h_nf(\mathbf{u}_n) = \mathbf{0} .$$

Poiché gli scalari non sono tutti nulli, questo prova che  $(f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_n))$  è linearmente dipendente, come volevamo.  $\square$

**Esercizio 42** Siano  $V$  e  $W$  spazi vettoriali e sia  $f$  l'applicazione che ad ogni vettore di  $V$  associa il vettore nullo di  $W$ . Dimostrare che  $f$  è lineare.

**Esempio 40** Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione che ad ogni vettore di  $\mathbb{R}^2$  associa il vettore nullo  $(0, 0, 0)$ . Per l'esercizio precedente,  $f$  è lineare. Notiamo che il sistema

$$((1, 0), (0, 1))$$

è linearmente indipendente, mentre il sistema

$$(f((1, 0)), f((0, 1))) ,$$

essendo costituito da vettori nulli, non è indipendente.

Possiamo dire che le applicazioni lineari conservano sempre la dipendenza (cfr. Proposizione 81), ma non sempre conservano l'indipendenza (cfr. Esempio 40).

**Proposizione 82** *Siano  $f : V \rightarrow W$  e  $g : W \rightarrow X$  applicazioni lineari tra spazi vettoriali. Allora l'applicazione composta  $g \circ f$  è lineare.*

*Dimostrazione.* Siano  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  vettori di  $V$  e  $h$  uno scalare. Si ha

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= g(f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)) \stackrel{f \text{ lineare}}{=} g(f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2)) \stackrel{g \text{ lineare}}{=} \\ &= g(f(\mathbf{v}_1)) + g(f(\mathbf{v}_2)) = (g \circ f)(\mathbf{v}_1) + (g \circ f)(\mathbf{v}_2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (g \circ f)(h\mathbf{v}_1) &= g(f(h\mathbf{v}_1)) \stackrel{f \text{ lineare}}{=} g(hf(\mathbf{v}_1)) \stackrel{g \text{ lineare}}{=} hg(f(\mathbf{v}_1)) = \\ &= h(g \circ f)(\mathbf{v}_1). \end{aligned}$$

Quindi  $g \circ f$  è lineare, come volevamo.  $\square$

**Proposizione 83** *Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare biettiva. Allora l'applicazione inversa  $f^{-1} : W \rightarrow V$  è lineare.*

*Dimostrazione.* Siano  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$  e  $h \in \mathbb{R}$ . Per definizione di applicazione inversa, per ogni vettore  $\mathbf{v} \in V$  si ha

$$f^{-1}(f(\mathbf{v})) = \mathbf{v} \tag{4}$$

e per ogni vettore  $\mathbf{w} \in W$  si ha

$$f(f^{-1}(\mathbf{w})) = \mathbf{w}. \tag{5}$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) &\stackrel{(5)}{=} f^{-1}(f(f^{-1}(\mathbf{w}_1)) + f(f^{-1}(\mathbf{w}_2))) \stackrel{f \text{ lineare}}{=} \\ &= f^{-1}(f(f^{-1}(\mathbf{w}_1) + f^{-1}(\mathbf{w}_2))) \stackrel{(4)}{=} f^{-1}(\mathbf{w}_1) + f^{-1}(\mathbf{w}_2) \end{aligned}$$

In maniera simile si dimostra che

$$f^{-1}(h\mathbf{w}_1) = hf^{-1}(\mathbf{w}_1).$$

Dunque  $f^{-1}$  è lineare.  $\square$

## 42 Isomorfismi

**Definizione 124** Un'applicazione lineare e biettiva  $f : V \rightarrow W$  viene detta isomorfismo tra  $V$  e  $W$ . Se esiste un tale isomorfismo,  $V$  e  $W$  vengono detti isomorfi.

**Esempio 41** Sia  $V$  uno spazio vettoriale. L'applicazione identica

$$\text{id}_V : V \rightarrow V$$

(cioè l'applicazione che ad ogni vettore di  $V$  associa sé stesso) è un isomorfismo.

**Osservazione 44** Per la Proposizione 83 si ha che l'inversa di un'isomorfismo è ancora un isomorfismo.

**Osservazione 45** Se  $f : V \rightarrow W$  e  $g : W \rightarrow X$  sono isomorfismi, per la Proposizione 82,  $g \circ f$  è un'isomorfismo tra  $V$  e  $X$ .

**Osservazione 46** La relazione "essere isomorfi" ha la proprietà riflessiva (per l'Esempio 41), simmetrica (per l'Osservazione 44) e transitiva (per l'Osservazione 45). Dunque la relazione d'isomorfismo è una relazione d'equivalenza.

**Esempio 42** Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  e sia  $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  una sua base. Nell'Esempio 37 a pag. 77 abbiamo visto che l'applicazione

$$c_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

che ad ogni vettore di  $V$  associa il vettore numerico delle sue componenti rispetto a  $\mathcal{B}$ , è un'applicazione lineare. Poiché tale applicazione è anche biettiva (cfr. Osservazione 39 a pag. 71), essa è un'isomorfismo.

**Osservazione 47** Dall'esempio ora esposto deduciamo che un qualunque spazio vettoriale (sui reali) di dimensione  $n$  è isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposizione 84** Sia  $f : V \rightarrow W$  un'isomorfismo tra spazi vettoriali. Se

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$$

è un sistema di vettori linearmente indipendente, allora

$$(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$$

è ancora un sistema di vettori linearmente indipendente.

*Dimostrazione.* Se per assurdo  $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$  fosse linearmente dipendente, per le Proposizioni 81 e 83 il sistema

$$(f^{-1}(f(\mathbf{v}_1)), \dots, f^{-1}(f(\mathbf{v}_n)))$$

sarebbe linearmente dipendente, il che va contro l'ipotesi perché tale sistema è proprio  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ . Dunque  $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$  deve essere per forza indipendente, come volevamo.  $\square$

Abbiamo quindi visto che, mentre un'applicazione lineare non sempre conserva l'indipendenza (cfr. Esempio 40), un'isomorfismo lo fa. In effetti gli isomorfismi conservano molte più cose! Parlando informalmente, se in uno spazio vettoriale  $V$  vale una proprietà  $\mathcal{P}$ , e questa proprietà  $\mathcal{P}$  ha a che fare solo con le operazioni, ma non con le caratteristiche "interne" dei singoli vettori, allora  $\mathcal{P}$  vale anche in ogni spazio vettoriale isomorfo a  $V$ .

**Osservazione 48** *Poiché gli isomorfismi conservano sia l'indipendenza che la dipendenza, due spazi isomorfi devono avere la stessa dimensione.*

Dalle Osservazioni 47 e 48 deduciamo che due spazi vettoriali (finitamente generati) sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

### 43 Nucleo e Immagine

**Definizione 125** *Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. L'insieme*

$$f^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{v} \in V : f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

*viene detto nucleo di  $f$ , e viene indicato con*

$$\text{Ker } f$$

*L'insieme immagine di  $f$ , cioè l'insieme*

$$\{f(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V\}$$

*viene spesso detto semplicemente immagine di  $f$  e viene denotato con*

$$\text{Im } f$$

**Proposizione 85** *Il nucleo di un'applicazione lineare  $f$  è un sottospazio del dominio, l'immagine di  $f$  è un sottospazio dello spazio d'arrivo.*

**Esercizio 43** *Dimostrare la proposizione di sopra.*

**Osservazione 49** *Se  $f : V \rightarrow W$  è un'applicazione lineare iniettiva, essa dà luogo ad un isomorfismo*

$$\varphi : V \rightarrow \text{Im } f$$

*(che agisce come  $f$ ). Siccome  $\varphi$  conserva l'indipendenza, e siccome un sistema linearmente indipendente di vettori in  $\text{Im } f$  è ovviamente ancora linearmente indipendente in  $W$ , otteniamo che  $f$  conserva l'indipendenza.*

*Dunque le applicazioni lineari iniettive conservano l'indipendenza.*

**Proposizione 86** *Un'applicazione lineare  $f$  è iniettiva se e solo se il suo nucleo è  $\{\mathbf{0}\}$ .*

*Dimostrazione.* (semi-facoltativa da 3 punti).<sup>5</sup>

Dato che il vettore nullo appartiene sempre al nucleo, se l'applicazione è iniettiva nessun altro vettore oltre al vettore nullo può appartenere al nucleo (altrimenti avremmo due vettori diversi con la stessa immagine). Dunque  $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$ .

Viceversa, supponiamo che  $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$ , e consideriamo due vettori distinti  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ . Siccome  $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$ , allora  $\mathbf{v} - \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ , e siccome  $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$  allora abbiamo anche che

$$f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{w}) \neq \mathbf{0}$$

Dunque  $f(\mathbf{v}) \neq f(\mathbf{w})$ . Questo dimostra che vettori distinti hanno sempre immagini distinte, e quindi che  $f$  è iniettiva.

□

Particolarmente importante è il seguente teorema.

**Proposizione 87** *Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare, e supponiamo che  $V$  sia finitamente generato. Allora anche il nucleo e l'immagine di  $f$  sono finitamente generati e si ha*

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim V .$$

*Dimostrazione.* (semi-facoltativa da 5 punti).

Il nucleo è finitamente generato per la Proposizione 78 a pag. 74. Poniamo

$$k = \dim \text{Ker } f, \quad n = \dim V .$$

Consideriamo una base  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$  di  $\text{Ker } f$ , e prendiamo  $n - k$  vettori, indicandoli con  $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ , tali che  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  sia una base di  $V$  (questo è sempre possibile farlo).

---

<sup>5</sup>In questi appunti riportiamo (in verde) alcune dimostrazioni, dette “semi-facoltative”. Lo studente dovrà sceglierne una sola, da esporre come parte dell'esame orale. Attenzione però: bisogna capirla bene ed essere quindi in grado di spiegarne i dettagli (senza esagerare con la pignoleria). Se si hanno dubbi, non si esiti a chiedere spiegazioni al docente. Le dimostrazioni semi-facoltative (esposte bene) valgono da 3 a 5 punti: la scelta di una da 3 punti non pregiudica la possibilità di avere 30.

Siccome  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  è una base di  $V$ , per ogni vettore  $\mathbf{v} \in V$  esistono scalari  $h_1, \dots, h_n$  tali che

$$\mathbf{v} = h_1 \mathbf{v}_1 + \dots + h_n \mathbf{v}_n$$

e dunque

$$f(\mathbf{v}) = h_1 f(\mathbf{v}_1) + \dots + h_n f(\mathbf{v}_n) = h_{k+1} f(\mathbf{v}_{k+1}) + \dots + h_n f(\mathbf{v}_n).$$

Dunque il sistema

$$(f(\mathbf{v}_{k+1}), \dots, f(\mathbf{v}_n))$$

è un sistema di generatori di  $\text{Im } f$ . L'immagine è quindi uno spazio finitamente generato.

Il sistema ora considerato è anche indipendente. Infatti se

$$\alpha_1 f(\mathbf{v}_{k+1}) + \dots + \alpha_{n-k} f(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$$

allora

$$\alpha_1 \mathbf{v}_{k+1} + \dots + \alpha_{n-k} \mathbf{v}_n$$

appartiene al nucleo. Siccome  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$  è una base del nucleo, esistono scalari  $\beta_1, \dots, \beta_k$  tali che

$$\alpha_1 \mathbf{v}_{k+1} + \dots + \alpha_{n-k} \mathbf{v}_n = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_k \mathbf{v}_k.$$

Portando tutto al primo membro e tenendo presente che  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  è una base di  $V$ , otteniamo che tutti gli  $\alpha$  (come anche tutti i  $\beta$ ) sono nulli.

Dunque la dimensione di  $\text{Im } f$  è  $n - k$ , il che dimostra la formula enunciata.

□

## 44 Dipendenza lineare per vettori numerici

Una conseguenza importante delle proprietà del determinante (vedi Paragrafo 35, pag. 60) è che se in una matrice c'è una riga che dipende dalle altre, allora il determinante è zero. In altre parole abbiamo la seguente proposizione.

**Proposizione 88** *Sia  $A$  una matrice quadrata sui reali. Se le righe di  $A$  sono linearmente dipendenti allora si ha*

$$|A| = 0.$$

È possibile anche invertire questa proposizione; cioè si può dimostrare che se il determinante è uguale a zero, allora le righe sono linearmente dipendenti. C'è bisogno però di un po' di lavoro preliminare, che illustriamo qui di seguito.

**Definizione 126** *Sia  $A$  una matrice sui reali di tipo  $m \times n$  e sia  $I = \{i_1, \dots, i_r\}$  un sottoinsieme di  $\{1, \dots, m\}$ . Supponiamo che il sistema di righe  $(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r})$  sia linearmente indipendente. Supponiamo poi che per ogni altro sottoinsieme*

$I' = \{i'_1, \dots, i'_{r'}\}$  che contenga propriamente  $I$  (quindi in particolare si deve avere  $r' > r$ ), il sistema  $(\mathbf{a}_{i'_1}, \dots, \mathbf{a}_{i'_{r'}})$  sia linearmente dipendente.

In questa situazione si dice che  $(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r})$  è un sistema massimo linearmente indipendente di righe di  $A$ . In maniera analoga si definisce un sistema massimo linearmente indipendente di colonne di  $A$ .

**Osservazione 50** Sia  $(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r})$  un sistema massimo linearmente indipendente di righe di una matrice  $A$  e sia  $\mathbf{a}_i$  un'altra riga (quindi  $i \notin \{i_1, \dots, i_r\}$ ). Per definizione di sistema massimo, abbiamo che il sistema  $(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}, \mathbf{a}_i)$  è linearmente dipendente.

Per la Proposizione 70 (pag. 68) si ha che la riga  $\mathbf{a}_i$  dipende dal sistema  $(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r})$ . Inoltre, ovviamente anche le righe  $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}$  dipendono dal sistema stesso. Dunque ogni riga della matrice dipende dal sistema massimo  $(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r})$ .

**Osservazione 51** Viceversa, sia  $(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r})$  un sistema linearmente indipendente di righe di una matrice  $A$ , e supponiamo che ogni riga di  $A$  dipenda da questo sistema. Allora il sistema  $(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r})$  è sicuramente un sistema massimo.

Infatti, per ogni altro sottoinsieme  $I' = \{i'_1, \dots, i'_{r'}\}$  che contenga propriamente  $I$ , il sistema  $(\mathbf{a}_{i'_1}, \dots, \mathbf{a}_{i'_{r'}})$  ha almeno una riga che dipende da alcune delle rimanenti; dunque, ragionando come per la Proposizione 68 (pag. 67), otteniamo che questo sistema è linearmente dipendente.

Dalle due osservazioni appena fatte ricaviamo che i sistemi massimi linearmente indipendenti di righe sono esattamente i sistemi indipendenti di righe tali che ogni riga della matrice dipenda da loro.

**Esercizio 44** Dimostrare che due sistemi massimi linearmente indipendenti di righe di una matrice hanno lo stesso numero di righe (suggerimento: ragionare come per la Proposizione 73 a pag. 70).

Naturalmente, lo stesso vale per i sistemi massimi di colonne linearmente indipendenti.

**Definizione 127** Sia  $A$  una matrice sui reali di tipo  $m \times n$ , sia

$$|A_{I,J}|$$

un suo minore e siano  $i \in \{1, \dots, m\}$  e  $j \in \{1, \dots, n\}$  indici tali che

$$i \notin I \text{ e } j \notin J.$$

Posto

$$I' = I \cup \{i\} \text{ e } J' = J \cup \{j\},$$

il minore

$$|A_{I',J'}|$$

sarà detto orlato di  $|A_{I,J}|$  (tramite  $i$  e  $j$ ).

**Esempio 43** Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -3 & -5 & -7 \end{pmatrix},$$

consideriamo il minore

$$A_{\{1,3\},\{2,3\}} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}$$

e cerchiamo i suoi orlati. Dobbiamo scegliere un  $i \notin \{1,3\}$  e un  $j \notin \{2,3\}$ ; dunque  $i$  deve essere per forza 2, mentre  $j$  può essere sia 1 che 4. Dunque gli orlati del nostro minore sono

$$A_{\{1,3,2\},\{2,3,1\}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} \quad e \quad A_{\{1,3,2\},\{2,3,4\}} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ -3 & -5 & -7 \end{vmatrix}.$$

**Definizione 128** Un minore fondamentale di una matrice sui reali è un minore non nullo tale che tutti i suoi orlati (se ce ne sono) sono nulli.

**Proposizione 89** (teorema degli orlati). Sia  $A$  una matrice sui reali e sia  $|A_{I,J}|$  un minore fondamentale di  $A$ . Posto  $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ ,  $J = \{j_1, \dots, j_r\}$ , dove  $r$  è l'ordine del minore, si ha che  $(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r})$  è un sistema massimo di righe indipendenti di  $A$  e  $(\mathbf{a}^{j_1}, \dots, \mathbf{a}^{j_r})$  è un sistema massimo di colonne indipendenti di  $A$ .

Per brevità, dobbiamo rinunciare alla dimostrazione, che è un po' articolata.

I seguenti fatti sono facili conseguenze del teorema degli orlati (omettiamo però i dettagli dimostrativi).

**Proposizione 90** Se il determinante di una matrice quadrata sui reali è uguale a zero, allora le sue righe sono linearmente dipendenti (e le sue colonne sono linearmente dipendenti).

**Proposizione 91** Dato un minore fondamentale di una matrice sui reali, tutti i minori di ordine maggiore sono nulli.

Viceversa, se abbiamo un minore non nullo tale che tutti i minori di ordine maggiore sono nulli, ovviamente questo è un minore fondamentale (perché gli eventuali orlati hanno ordine maggiore). Dunque abbiamo che un minore fondamentale può anche essere caratterizzato come un minore che abbia ordine massimo possibile tra tutti i minori non nulli.

In particolare abbiamo che tutti i minori fondamentali hanno lo stesso ordine.

Un'altra conseguenza, importante quanto immediata, del teorema degli orlati è la seguente.

**Proposizione 92** Data una matrice, un sistema massimo di righe indipendenti e un sistema massimo di colonne indipendenti hanno lo stesso ordine.

## 45 Rango

Ricapitoliamo le principali osservazioni fatte nella sezione precedente.

**Osservazione 52** *Data una matrice  $A$  sui reali, possiamo dire che i seguenti numeri sono tutti uguali ad uno stesso numero  $r$ :*

- *il massimo ordine per i minori non nulli*
- *l'ordine di un minore fondamentale*
- *l'ordine di un sistema massimo di righe indipendenti*
- *l'ordine di un sistema massimo di colonne indipendenti*

**Definizione 129** *Il numero  $r$  introdotto nell'osservazione precedente si chiama rango della matrice  $A$ . Esso sarà indicato con  $\text{rk } A$ .*

Ci sono vari modi per trovare il rango di una matrice. Ne illustriamo uno con il seguente esempio.

**Esempio 44** *Troviamo il rango della matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

*Cerchiamo di trovare un minore fondamentale. Partiamo dal minore non nullo*

$$|A_{\{1\},\{1\}}| = |1| = 1.$$

*Vediamo se per caso tutti i suoi orlati sono nulli. L'orlato tramite  $i = 2$  e  $j = 2$  è*

$$|A_{\{1,2\},\{1,2\}}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

*L'orlato tramite  $i = 3$  e  $j = 2$  è*

$$|A_{\{1,3\},\{1,2\}}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

*L'orlato tramite  $i = 2$  e  $j = 3$  è*

$$|A_{\{1,2\},\{1,3\}}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 3.$$

*Siccome questo orlato è non nullo, il minore  $|A_{\{1\},\{1\}}|$  non è fondamentale. A questo punto però possiamo ripartire dal minore non nullo  $|A_{\{1,2\},\{1,3\}}|$ . Vediamo se i suoi orlati sono tutti nulli. L'unico orlato possibile è*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Dunque il minore

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$$

è un minore fondamentale. Siccome il suo ordine è 2, il rango di  $A$  è 2.

## 46 Applicazioni lineari tra vettori numerici

In questo paragrafo vogliamo caratterizzare tutte le possibili applicazioni lineari che hanno come dominio e insieme d'arrivo degli spazi vettoriali numerici:

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m .$$

Incominciamo a vedere un'esempio su tali applicazioni.

**Esempio 45** Sia  $A$  una matrice sui reali di tipo  $m \times n$ . Se consideriamo i vettori numerici di  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$  rispettivamente come matrici di tipo  $1 \times n$  e  $1 \times m$  (cfr. Definizione 26 a pag. 15), l'Esempio 39 a pag. 79 ci dà un'applicazione lineare

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

(che consiste semplicemente nel moltiplicare per la matrice  $A$ ).

**Esempio 46** Vediamo un caso "concreto" dell'esempio precedente: sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

Siccome  $A$  è una matrice di tipo  $2 \times 3$ , abbiamo allora un'applicazione

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 .$$

Per avere l'immagine di un vettore, ad esempio  $(5, 0, -1)$ , dobbiamo scriverlo come matrice colonna e moltiplicarlo a sinistra per  $A$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Otteniamo la matrice colonna

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} .$$

Dunque l'immagine di  $(5, 0, -1)$  è il vettore numerico  $(2, 12)$ .

In generale, l'immagine del vettore  $(x, y, z)$  è  $(x + 2y + 3z, 2x + y - 2z)$ .

**Osservazione 53** Sia  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  la base standard di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $A$  una matrice di tipo  $m \times n$ . Se consideriamo i vettori  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  come matrici colonna, i prodotti

$$A\mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{e}_n$$

sono proprio le colonne  $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n$  di  $A$ .

**Proposizione 93** Se  $A$  e  $B$  sono matrici di tipo  $m \times n$  tali che l'applicazione

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

che consiste nel moltiplicare per  $A$  (come nell'Esempio 45) è uguale all'applicazione che consiste nel moltiplicare per  $B$ , allora  $A$  e  $B$  devono essere per forza uguali.

*Dimostrazione.* Basta considerare la base standard di  $\mathbb{R}^n$ : se le applicazioni sono uguali, per l'Osservazione 53 le colonne di  $A$  devono essere rispettivamente uguali alle colonne di  $B$ , dunque  $A = B$ .  $\square$

**Proposizione 94** Sia

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

un'applicazione lineare. Allora esiste una ed una sola matrice  $A$  di tipo  $m \times n$  tale che, considerando i vettori numerici di  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$  rispettivamente come matrici di tipo  $1 \times n$  e  $1 \times m$ , si abbia

$$f(X) = AX$$

per ogni  $X \in \mathbb{R}^n$ .

Tralasciamo la dimostrazione.

Abbiamo così descritto tutte le possibili applicazioni lineari tra vettori numerici: consistono nella moltiplicazione per qualche matrice. Inoltre abbiamo che la corrispondenza tra tali applicazioni e le rispettive matrici è biettiva.

## 47 Matrice associata

**Definizione 130** Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare tra spazi vettoriali finitamente generati, sia  $\mathcal{B}$  una base di  $V$ , sia  $\mathcal{B}'$  una base di  $W$  e siano  $c_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $c_{\mathcal{B}'} : W \rightarrow \mathbb{R}^m$  le coordinazioni (vedi Definizione 123 a pag. 77).

Consideriamo l'applicazione

$$c_{\mathcal{B}'} \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

e ricordiamo che esiste un'unica matrice  $A$  tale che questa applicazione consista nella moltiplicazione per  $A$  (vedi Proposizione 94).

Allora la matrice  $A$  sarà detta matrice associata ad  $f$  rispetto alle basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$ .

**Osservazione 54** Conservando le notazioni della definizione appena data, sia  $\mathbf{v}$  un qualunque vettore di  $V$ , sia  $X$  il vettore delle componenti di  $\mathbf{v}$  ed  $Y$  il vettore delle componenti di  $f(\mathbf{v})$ . In altri termini  $X = c_{\mathcal{B}}(\mathbf{v})$  e  $Y = c_{\mathcal{B}'}(f(\mathbf{v}))$ , quindi

$$Y = c_{\mathcal{B}'}(f(c_{\mathcal{B}}^{-1}(X))) .$$

Considerando  $X$  ed  $Y$  come colonne (cioè matrici di tipo  $n \times 1$  ed  $m \times 1$ ), poiché

$c_{\mathcal{B}'} \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1}$  è la moltiplicazione per  $A$ , si ha

$$Y = AX$$

Parlando informalmente, la matrice associata ad  $f$  descrive l'azione di  $f$  in termini di componenti dei vettori.

**Osservazione 55** Se  $V$  e  $W$  sono spazi vettoriali di rispettive dimensioni  $n$  ed  $m$ , e con rispettive basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$ , data una matrice  $A$  di tipo  $m \times n$  sui reali, esiste un'unica applicazione lineare  $V \rightarrow W$  che ha  $A$  come matrice associata: l'applicazione

$$c_{\mathcal{B}'}^{-1} \circ \phi \circ c_{\mathcal{B}},$$

dove  $c_{\mathcal{B}}$  e  $c_{\mathcal{B}'}$  sono le coordinazioni e  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è data dalla moltiplicazione per  $A$ .

La seguente proposizione stabilisce un modo per costruire la matrice associata.

**Proposizione 95** Sia  $f: V \rightarrow W$  un'applicazione lineare tra spazi vettoriali finitamente generati e sia  $A$  la matrice associata rispetto alle basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$ . Allora le colonne di  $A$  sono i vettori delle componenti delle immagini dei vettori di  $\mathcal{B}$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ , e siano  $X_1, \dots, X_n$  i rispettivi vettori delle componenti rispetto a  $\mathcal{B}$  stessa. Dunque i vettori delle componenti delle immagini di  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  (cioè di  $f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)$ ) sono

$$AX_1, \dots, AX_n.$$

A questo punto basta notare che  $X_1, \dots, X_n$  sono i vettori della base standard di  $\mathbb{R}^n$  e tenere presente l'Osservazione 53.  $\square$

La seguente proposizione afferma che un'applicazione lineare resta completamente individuata se si assegnano le immagini dei vettori di una base.

**Proposizione 96** Siano  $V$  e  $W$  spazi vettoriali finitamente generati, sia  $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  una base di  $V$  e sia  $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$  un qualunque sistema di vettori di  $W$ . Allora esiste un'unica applicazione lineare  $f: V \rightarrow W$  tale che

$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, \quad \dots, \quad f(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n.$$

*Dimostrazione.* Fissiamo una qualunque base  $\mathcal{B}'$  di  $W$ . Per la Proposizione 95, un'applicazione lineare  $f: V \rightarrow W$  soddisfa la condizione richiesta se e solo se la sua matrice associata rispetto a  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  ha come colonne le componenti dei vettori  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$  rispetto a  $\mathcal{B}'$ . Dunque il risultato segue subito dall'Osservazione 55.

$\square$

**Proposizione 97** Siano  $f : V \rightarrow V'$  ed  $f' : V' \rightarrow V''$  applicazioni lineari tra spazi finitamente generati e siano  $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$  basi rispettivamente di  $V, V', V''$ . Se  $A$  è la matrice associata ad  $f$  rispetto a  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$ , e  $A'$  è la matrice associata ad  $f'$  rispetto a  $\mathcal{B}'$  e  $\mathcal{B}''$ , allora la matrice associata ad  $f' \circ f$  rispetto a  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}''$  è il prodotto

$$A' A .$$

*Dimostrazione.* Dette  $c_{\mathcal{B}}, c'_{\mathcal{B}}$  e  $c''_{\mathcal{B}}$  le coordinazioni, poniamo

$$\varphi = c'_{\mathcal{B}} \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1}, \quad \varphi' = c''_{\mathcal{B}} \circ f' \circ c'_{\mathcal{B}}^{-1} .$$

Per definizione di matrice associata,  $\varphi$  è la moltiplicazione per  $A$  e  $\varphi'$  è la moltiplicazione per  $A'$ . Dunque per ogni  $X \in \mathbb{R}^n$  abbiamo

$$(\varphi'(\varphi(X))) = A'(AX) = (AA')X ,$$

quindi  $\varphi' \circ \varphi$  è la moltiplicazione per  $AA'$ .

Siccome

$$\varphi' \circ \varphi = c''_{\mathcal{B}} \circ f' \circ c'_{\mathcal{B}}^{-1} \circ c'_{\mathcal{B}} \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1} = c''_{\mathcal{B}} \circ f' \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1} ,$$

concludiamo che  $c''_{\mathcal{B}} \circ f' \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1}$  è la moltiplicazione per  $AA'$ , il che per definizione vuol dire che la matrice associata ad  $f' \circ f$  rispetto a  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}''$  è  $AA'$ , come volevamo.  $\square$

**Proposizione 98** Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare tra spazi finitamente generati e sia  $A$  la matrice associata rispetto alle basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$ . Allora si ha

$$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rk} A .$$

*Dimostrazione.* (semi-facoltativa da 4 punti).

Sia  $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  e sia  $(\mathbf{a}^{i_1}, \dots, \mathbf{a}^{i_r})$  un sistema massimo di colonne indipendenti di  $A$ , così che  $r = \operatorname{rk} A$  (vedi Definizione 129 a pag. 88). Ricordiamo inoltre che ogni colonna di  $A$  dipende da  $(\mathbf{a}^{i_1}, \dots, \mathbf{a}^{i_r})$ . Per la Proposizione 95, e dato che la coordinazione rispetto a  $\mathcal{B}'$ , essendo un'isomorfismo, conserva sia la dipendenza che l'indipendenza, otteniamo che tutti i vettori  $f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)$  dipendono dal sistema indipendente  $(f(\mathbf{v}_{i_1}), \dots, f(\mathbf{v}_{i_r}))$ .

Se ora  $\mathbf{w}$  è un qualunque vettore di  $\text{Im } f$ , allora (per definizione di  $\text{Im } f$ ) esiste un  $\mathbf{v} \in V$  tale che  $\mathbf{w} = f(\mathbf{v})$ . Poiché  $\mathcal{B}$  è una base di  $V$ , abbiamo

$$\mathbf{v} = h_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + h_n \mathbf{v}_n$$

per opportuni scalari  $h_1, \dots, h_n$ . Quindi

$$\mathbf{w} = h_1 f(\mathbf{v}_1) + \cdots + h_n f(\mathbf{v}_n).$$

Ma poiché i vettori  $f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)$  dipendono da (cioè sono combinazioni lineari di)  $(f(\mathbf{v}_{i_1}), \dots, f(\mathbf{v}_{i_r}))$ , otteniamo che  $\mathbf{w}$  dipende dal sistema indipendente  $(f(\mathbf{v}_{i_1}), \dots, f(\mathbf{v}_{i_r}))$ . Dunque  $(f(\mathbf{v}_{i_1}), \dots, f(\mathbf{v}_{i_r}))$  è una base di  $\text{Im } f$ , da cui si ha subito

$$\dim \text{Im } f = r = \text{rk } A,$$

come volevamo.

□

## 48 Cambio di base

**Definizione 131** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita, e siano  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  due basi di  $V$ . Sia  $B$  la matrice associata all'applicazione identica*

$$\text{id}_V : V \rightarrow V$$

*rispetto a  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$ . Allora  $B$  si dice matrice del cambio di base da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$ .*

**Osservazione 56** *Conservando le notazioni della definizione appena data, sia  $\mathbf{v}$  un qualunque vettore di  $V$ , sia  $X$  il vettore delle componenti rispetto a  $\mathcal{B}$  e sia  $X'$  il vettore delle componenti rispetto a  $\mathcal{B}'$ . Per l'Osservazione 54 si ha*

$$X' = BX$$

Dunque, parlando informalmente, la matrice del cambio di base descrive come si passa dalle componenti rispetto ad una base alle componenti rispetto ad un'altra.

Per costruire la matrice del cambio di base, basta tenere presente la seguente osservazione.

**Osservazione 57** *Per la Proposizione 95, le colonne della matrice del cambio di base da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$  sono le componenti dei vettori di  $\mathcal{B}$  rispetto a  $\mathcal{B}'$ .*

**Osservazione 58** Per la Proposizione 97, se  $B$  è la matrice del cambio di base da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$  e  $B'$  è la matrice del cambio di base da  $\mathcal{B}'$  a  $\mathcal{B}''$ , allora la matrice del cambio di base da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}''$  è il prodotto  $B'B$ .

**Osservazione 59** Tenendo presente l'osservazione precedente e il fatto che la matrice del cambio di base da una base a sé stessa è la matrice identica, si ha subito che la matrice del cambio di base da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$  e quella del cambio di base da  $\mathcal{B}'$  a  $\mathcal{B}$  sono inverse tra loro.

In particolare una matrice di cambio di base ha sempre determinante non nullo.

## 49 Orientazione

**Definizione 132** Sia  $V$  uno spazio vettoriale finitamente generato e siano  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  sue basi. Se il determinante della matrice del cambio di base da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$  è positivo, allora diremo che  $\mathcal{B}$  è concorde a  $\mathcal{B}'$ . In caso contrario diremo che  $\mathcal{B}$  è discorde con  $\mathcal{B}'$ .

**Proposizione 99** La relazione di “concordanza” tra basi di uno spazio vettoriale, è una relazione d'equivalenza, e se lo spazio non è uguale a  $\{\mathbf{0}\}$  esistono esattamente due classi di equivalenza.

*Dimostrazione.* Poiché la matrice del cambio di base da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}$  è la matrice identica, che ha determinante 1, ogni base è concorde a sé stessa. Dunque la “concordanza” è riflessiva.

Poiché la matrice del cambio di base da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$  e quella del cambio di base da  $\mathcal{B}'$  a  $\mathcal{B}$  sono inverse tra loro, i loro determinanti sono inversi tra loro. Se dunque  $\mathcal{B}$  è concorde a  $\mathcal{B}'$ , anche  $\mathcal{B}$  è concorde a  $\mathcal{B}'$  (dato che l'inverso di un numero positivo è ancora positivo). Dunque la “concordanza” è una relazione simmetrica.

Infine, dall'Osservazione 58 si deduce che la “concordanza” è una relazione transitiva (perché il prodotto di numeri positivi è positivo).

Se ora  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$  è una base, allora  $(-\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$  è una base ad essa discorde. Dunque le classi di equivalenza sono almeno due.

Se poi  $\mathcal{B}$  è una base qualunque, se essa è discorde a  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$  allora è concorde a  $(-\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$  (sempre per l'Osservazione 58). Dunque le classi d'equivalenza sono esattamente due, come volevamo.  $\square$

**Definizione 133** Una classe d'equivalenza di basi concordi di uno spazio  $V$  si chiama orientazione di  $V$ .

Dunque l'orientazione di una base è la sua classe di equivalenza. Dire che una base  $\mathcal{B}$  ha orientazione  $\mathcal{O}$ , formalmente equivale a dire che  $\mathcal{B} \in \mathcal{O}$ .

Il concetto di orientazione consente ad esempio di definire facilmente (e rigorosamente) un'applicazione di “rotazione” tra vettori liberi (cfr. quanto detto appena prima dell'Esempio 39 a pag. 79).

**Osservazione 60** Sia  $\mathcal{W}$  lo spazio direttore di un piano, sia  $\mathcal{O}$  un'orientazione di  $\mathcal{W}$  e sia  $\theta$  un numero reale tale che  $0 < \theta < \pi$ . Se  $\mathbf{v} \in \mathcal{W}$  è un vettore non nullo, non è difficile dimostrare che esiste uno ed un solo vettore  $\mathbf{v}' \in \mathcal{W}$  tale che

- $|\mathbf{v}'| = |\mathbf{v}|$ ;
- $\widehat{\mathbf{v}\mathbf{v}'} = \theta$ ;
- la base  $(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  ha orientazione  $\mathcal{O}$ .

**Definizione 134** Sia  $\mathcal{W}$  lo spazio dei vettori paralleli ad un piano, sia  $\mathcal{O}$  un'orientazione di  $\mathcal{W}$  e sia  $\theta$  un numero reale tale che  $0 < \theta < \pi$ . Per l'osservazione precedente, possiamo definire un'applicazione

$$\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$$

che associa al vettore nullo il vettore nullo stesso, e che ad ogni vettore non nullo  $\mathbf{v}$  associa l'unico vettore  $\mathbf{v}' \in \mathcal{W}$  tale che

- $|\mathbf{v}'| = |\mathbf{v}|$ ;
- $\widehat{\mathbf{v}\mathbf{v}'} = \theta$ ;
- la base  $(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  ha orientazione  $\mathcal{O}$ .

Tale applicazione si dice *rotazione di  $\mathcal{W}$  di ampiezza  $\theta$  e concorde ad  $\mathcal{O}$* .

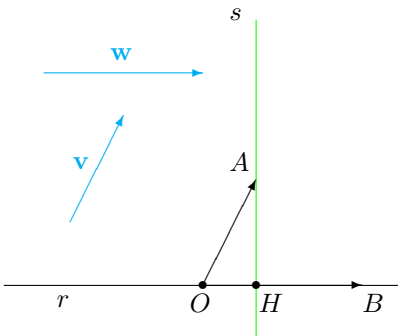
**Esercizio 45** (facoltativo). Dimostrare che una rotazione è un'applicazione lineare.

## 50 Prodotto vettoriale

Ritorniamo per un attimo alla geometria ordinaria, e stabiliamo la definizione di un'altra utile operazione tra vettori liberi: il prodotto vettoriale.

Siano dunque  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  vettori liberi, e vediamo come si definisce il loro prodotto vettoriale. È utile ricordare la costruzione fatta per il prodotto scalare. Per comodità, la riportiamo qui di seguito.

Scelto un punto  $O$ , siano  $OA$  e  $OB$  i rispettivi rappresentanti di  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  aventi origine in  $O$ . Sia  $r$  una retta contenente  $O$  e  $B$  e sia  $H$  l'intersezione di  $r$  con una perpendicolare  $s$  ad  $r$  passante per  $A$ .



**Osservazione 61** Conservando le notazioni ora introdotte, se  $\mathbf{w}$  è non nullo,  $\mathbf{v}$  è parallelo a  $\mathbf{w}$  se e solo se  $H = A$ . Se  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ , allora  $\mathbf{v}$  è automaticamente parallelo a  $\mathbf{w}$ . Dunque abbiamo che

$$\mathbf{v} \text{ e } \mathbf{w} \text{ paralleli} \iff |AH||OB| = 0.$$

**Proposizione 100** Assumiamo le notazioni introdotte all'inizio del paragrafo, e sia  $\mathcal{O}$  un'orientazione dello spazio dei vettori liberi. Allora esiste un'unico vettore  $\mathbf{n}$  tale che

- $\mathbf{n}$  è ortogonale a  $\mathbf{v}$  e a  $\mathbf{w}$ ;
- $|\mathbf{n}| = |AH||OB|$ ;
- se  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  non sono paralleli, allora  $(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{n})$  è una base che ha orientazione  $\mathcal{O}$ .

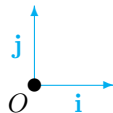
Tralasciamo la dimostrazione.

**Definizione 135** Siano  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  vettori liberi, e si fissi un'unità di misura  $u$  e una orientazione  $\mathcal{O}$  nello spazio dei vettori liberi. Allora l'unico vettore  $\mathbf{n}$  che soddisfa le condizioni stabilite nella Proposizione 100 si dice prodotto vettoriale di  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  (rispetto a  $u$  ed  $\mathcal{O}$ ). Il prodotto vettoriale di  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  sarà indicato con

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$$

Nell'uso corrente, specialmente in Fisica, si assume fissata l'orientazione cosiddetta "levogira". Per definire tale orientazione, basta assegnare una qualunque base che abbia (per definizione) tale orientazione. Il lettore avrà già incontrato vari modi per stabilire tale base ("regola della mano destra", "regola del cavatappi", ecc.).

**Definizione 136** Definiamo levogira l'orientazione della base  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, N-O)$ , dove  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  ed  $O$  sono rappresentati qui sotto, ed  $N$  è la punta del naso del lettore (niente scherzi: toglì il naso dal foglio!).



D'ora in poi, parlando di prodotto vettoriale, assumeremo tacitamente fissata (oltre che l'unità di misura) un'orientazione (se si vuole, quella levogira).

**Proposizione 101** Siano  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  vettori liberi non nulli. Si ha

$$|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}| = |\mathbf{v}||\mathbf{w}| \sin \widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}}.$$

Tralasciamo la (facile) dimostrazione.

**Proposizione 102** Siano  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  vettori liberi qualunque ed  $h$  uno scalare. Si ha

- $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ ;
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ ;
- $(h\mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = h(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ .

Tralasciamo la (facile) dimostrazione.

## 51 Endomorfismi

**Definizione 137** Un'applicazione lineare  $V \rightarrow V$  (cioè tale che il dominio e l'insieme d'arrivo siano lo stesso spazio vettoriale  $V$ ) si dice endomorfismo di  $V$ .

**Definizione 138** Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio finitamente generato  $V$ , e sia  $A$  la matrice associata ad  $f$  rispetto alle basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  di  $V$ . Se  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$  allora  $A$  sarà detta matrice associata ad  $f$  rispetto a  $\mathcal{B}$ .

Sebbene a volte sia comodo rappresentare un endomorfismo usando due basi diverse di  $V$  (una per il dominio ed una per l'insieme d'arrivo), come è successo quando abbiamo definito il cambio di base, nella maggior parte dei casi è preferibile fissare un'unica base.

**Osservazione 62** Sia  $f$  un endomorfismo di  $V$ , siano  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  basi di  $V$ , sia  $A$  la matrice associata ad  $f$  rispetto a  $\mathcal{B}$ , sia  $A'$  la matrice associata ad  $f$  rispetto a  $\mathcal{B}'$  e sia infine  $B$  la matrice del cambio di base da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$ . La composizione

$$V \xrightarrow{\text{id}_V} V \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\text{id}_V} V$$

è ovviamente uguale ad  $f$ . Se fissiamo nell'ordine le basi  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}'$ ,  $\mathcal{B}$ , la Proposizione 97 (tenendo anche presente l'Osservazione 59) implica che

$$A = B^{-1}A'B.$$

**Definizione 139** Due matrici  $A$  ed  $A'$  si dicono simili se esiste una matrice invertibile  $B$  tale che

$$A = B^{-1}A'B.$$

**Osservazione 63** Siccome una matrice invertibile  $B$  è per forza quadrata, affinché un prodotto  $B^{-1}AB$  abbia senso,  $A$  deve anche essere quadrata dello stesso ordine di  $B$ , e il prodotto è allora ancora una matrice quadrata dello stesso ordine. Dunque due matrici simili devono per forza essere quadrate dello stesso ordine.

**Esercizio 46** Sia  $V$  uno spazio vettoriale e sia  $S = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  un sistema di vettori linearmente indipendenti. Dimostrare che se la dimensione di  $V$  è uguale all'ordine  $n$  di  $S$ , allora  $S$  è una base di  $V$ .

Suggerimento: prendere un qualsiasi vettore di  $V$  e dimostrare che dipende da  $S$ , usando la Proposizione 70 a pag. 68 e il Lemma di Steinitz.

**Osservazione 64** Sia  $\mathcal{B}$  una base di uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione  $n$  e sia  $B$  una matrice invertibile di ordine  $n$ . Poiché la coordinazione rispetto a  $\mathcal{B}$  è un isomorfismo, e poiché le colonne di  $B$  sono linearmente indipendenti (perché  $|B| \neq 0$ ), il sistema  $\mathcal{B}'$  dei vettori che hanno per rispettive componenti le colonne di  $B$ , è un sistema di  $n$  vettori indipendenti di  $V$ . Allora per l'Esercizio 46,  $\mathcal{B}'$  è una base di  $V$ , e per l'Osservazione 57 la matrice del cambio di base da  $\mathcal{B}'$  a  $\mathcal{B}$  è proprio  $B$ .

**Osservazione 65** Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio finitamente generato  $V$  e sia  $A$  la matrice associata ad  $f$  rispetto ad una base  $\mathcal{B}$ . Se  $A'$  è una matrice simile ad  $A$ , allora esiste una matrice invertibile  $B$  tale che  $A = B^{-1}A'B$ . Per l'osservazione precedente (prendendo  $B^{-1}$  al posto di  $B$ ), esiste una base  $\mathcal{B}'$  tale che la matrice del cambio di base da  $\mathcal{B}'$  a  $\mathcal{B}$  sia  $B^{-1}$ . Per l'Osservazione 62 la matrice associata ad  $f$  rispetto a  $\mathcal{B}'$  è uguale a  $BAB^{-1}$ . Ma siccome

$$BAB^{-1} = BB^{-1}A'BB^{-1} = A',$$

concludiamo che la matrice associata ad  $f$  rispetto a  $\mathcal{B}'$  è proprio  $A'$ .

In definitiva, se  $A$  è associata ad un endomorfismo  $f$  rispetto ad una base  $\mathcal{B}$ , e se  $A'$  è simile ad  $A$ , allora anche  $A'$  è associata ad  $f$  rispetto ad un'opportuna base  $\mathcal{B}'$ .

**Osservazione 66** Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ . Per l'Osservazione 55 a pag. 91, ogni matrice quadrata  $A$  di ordine  $n$  si può ottenere come

matrice associata a qualche endomorfismo  $f$  di  $V$ , rispetto ad una fissata base  $\mathcal{B}$ .

Dunque, le Osservazioni 62 e 65 ci assicurano che due matrici sono simili se e solo se possono essere ottenute come matrici associate ad uno stesso endomorfismo, rispetto a (singole) basi.

**Proposizione 103** *Matrici simili hanno lo stesso rango.*

**Esercizio 47** (facoltativo). *Dimostrare la proposizione precedente.*

## 52 Autovalori ed autovettori

**Definizione 140** *Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale  $V$ . Se un vettore non nullo  $\mathbf{v}$  ed uno scalare  $h$  sono tali che*

$$f(\mathbf{v}) = h\mathbf{v}$$

*allora diremo che  $\mathbf{v}$  è un autovettore di  $f$  con autovalore  $h$ . Uno scalare qualunque è detto autovalore di  $f$ , se è autovalore per qualche autovettore.*

*Data una matrice quadrata  $A$  di ordine  $n$ , quando parleremo di autovalori (reali) ed autovettori (reali) di  $A$  intenderemo riferirci a quelli dell'endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  dato dalla moltiplicazione per  $A$ .*

Se nella definizione ora data non avessimo supposto che  $\mathbf{v}$  fosse non nullo, ogni scalare sarebbe stato un autovalore. Dunque è importante tenere a mente che gli autovettori di  $f$  sono *non nulli*.

**Osservazione 67** *Sia  $f$  un endomorfismo di  $V$  e sia  $t$  uno scalare. Consideriamo l'endomorfismo*

$$f_t \stackrel{\text{def}}{=} f - t \text{id}_V$$

*(dove  $\text{id}_V : V \rightarrow V$  è l'applicazione identica), cioè l'endomorfismo che associa ad ogni  $\mathbf{v}$  il vettore  $f(\mathbf{v}) - t \text{id}_V(\mathbf{v})$  (il fatto che sia lineare si verifica subito, tenendo conto che  $f$  e  $\text{id}_V$  sono lineari). Allora gli (eventuali) autovettori con autovalore  $t$  sono i vettori non nulli appartenenti al nucleo di  $f_t$ . Dunque  $t$  è un autovalore di  $f$  se e solo se  $\text{Ker } f_t \neq \{\mathbf{0}\}$ .*

**Definizione 141** *Conservando le notazioni introdotte nell'osservazione precedente, se  $t$  è un autovalore allora il sottospazio non nullo  $\text{Ker } f_t$  di  $V$  verrà detto autospatio relativo a  $t$ .*

In altre parole, l'autospazio relativo ad un autovalore  $t$  è l'insieme costituito da tutti gli autovettori con autovalore  $t$  e dal vettore nullo.

**Osservazione 68** Conservando le notazioni introdotte nell'Osservazione 67, supponiamo che  $V$  sia finitamente generato, fissiamo una base di  $V$  e sia  $A$  la matrice associata ad  $f$ . Allora la matrice  $A_t$  associata ad  $f_t$  è uguale ad

$$A - tI_n$$

(dove  $n = \dim V$ ). Per le Proposizioni 87 (pag. 84) e 98 (pag. 92), si ha

$$\dim \text{Ker } f_t = n - \text{rk } A_t .$$

Allora l'Osservazione 67 prova che  $t$  è un autovalore se e solo se il rango di  $A_t$  è strettamente minore di  $n$ , il che accade se e solo se il determinante di  $A_t$  è 0 (perché tale determinante è l'unico minore di ordine  $n$  di  $A_t$ ).

Concludiamo che

$$t \text{ è autovalore di } f \iff |A - tI_n| = 0 .$$

**Proposizione 104** Siano  $A$  ed  $A'$  matrici simili. Allora per ogni  $t \in \mathbb{R}$  si ha

$$|A' - tI_n| = |A - tI_n| .$$

*Dimostrazione.* Poiché le matrici sono simili, esiste una matrice invertibile  $B$  tale che

$$A' = B^{-1}AB .$$

Si ha

$$\begin{aligned} |A' - tI_n| &= |B^{-1}AB - tI_n| = |B^{-1}AB - B^{-1}(tI_n)B| = \\ &= |B^{-1}(A - tI_n)B| = |B^{-1}| |(A - tI_n)| |B| = |A - tI_n| , \end{aligned}$$

come volevamo.  $\square$

**Osservazione 69** Per la proposizione precedente e per l'Osservazione 62, se  $f$  è un endomorfismo di uno spazio finitamente generato  $V$ , comunque si scelga una base  $\mathcal{B}$  di  $V$ , detta  $A$  la matrice associata ad  $f$ , la funzione che a  $t \in \mathbb{R}$  associa

$$|A - tI_n|$$

è sempre la stessa (non dipende da  $\mathcal{B}$ ).

Notiamo inoltre che, siccome il determinante si ottiene con operazioni di moltiplicazione e di addizione, la funzione in questione è data da un polinomio.

**Definizione 142** Sia  $f$  un'endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato e sia  $A$  la matrice associata ad  $f$  rispetto ad una base qualunque. Allora la funzione

$$p_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

che a  $t \in \mathbb{R}$  associa

$$|A - tI_n|$$

(cfr. l'osservazione precedente) si chiama polinomio caratteristico di  $f$ .

**Proposizione 105** *Sia  $f$  un'endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato e sia  $p_f$  il suo polinomio caratteristico. Allora*

$$t \text{ è autovalore di } f \iff p_f(t) = 0.$$

*Dimostrazione.* Segue subito dalle definizioni e dall'Osservazione 68.  $\square$

In parole povere, in questo paragrafo abbiamo provato che gli autovalori di un endomorfismo  $f$  di uno spazio finitamente generato, sono uguali alle radici (reali) del polinomio caratteristico di  $f$ . Inoltre, dato un autovalore  $t$ , gli autovettori con autovalore  $t$  sono i vettori non nulli appartenenti al nucleo di  $f - t \text{id}_V$ .

Questi due fatti ci mettono in grado (almeno in linea di principio) di trovare tutti gli autovalori e gli autovettori di uno spazio finitamente generato. Dal punto di vista dei calcoli pratici, l'unica cosa che può comportare un po' di difficoltà è il calcolo delle radici del polinomio caratteristico, che può essere di grado elevato. A questo proposito è utile ricordare come si scompongono i polinomi (fatto noto dalle scuole superiori). Piuttosto che richiamare in generale il procedimento, vediamo come si opera su qualche esempio concreto.

**Esempio 47** *Sia*

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

*dato da*

$$p(t) = t^3 - 2t^2 - 6t + 4.$$

*Se non si vogliono andare a scomodare le formule per le equazioni di terzo grado, o i metodi di approssimazione numerica, si può cercare di trovare per tentativi una radice, scegliendola tra i divisori del termine noto (nel nostro caso 4):*

$$p(1) = -3 \quad p(-1) = 7 \quad p(2) = -8 \quad p(-2) = 0$$

*(avendo trovato la radice  $-2$ , è inutile provare altri divisori).*

*Dunque  $p$  è divisibile per  $t + 2$ . Se non si ricordano la regola per la divisione di polinomi o la regola di Ruffini (note dalle scuole superiori), si può scrivere*

$$(t + 2)(at^2 + bt + c) = t^3 - 2t^2 - 6t + 4$$

*e ricavare poi (facilmente)  $a, b, c$ . Otteniamo*

$$p(t) = (t + 2)(t^2 - 4t + 2).$$

*Le radici di  $p$  sono dunque  $-2$  e le eventuali radici di  $t^2 - 4t + 2$ . La formula*

$$\frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2}$$

*ci dice che le altre due radici di  $p$  sono*

$$2 + \sqrt{2} \quad e \quad 2 - \sqrt{2}.$$

Il calcolo degli autovettori di un endomorfismo richiede in genere la risoluzione di un semplice sistema di equazioni: vedremo più avanti dei metodi molto efficaci.

## 53 Diagonalizzazione

**Definizione 143** Una matrice quadrata  $A$  di ordine  $n$  sui reali si dice diagonale se per ogni  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  tali che  $i \neq j$ , si ha che  $a_{ij} = 0$ .

Un endomorfismo  $f$  di uno spazio finitamente generato  $V$  si dice diagonalizzabile se esiste una base  $\mathcal{B}$  tale che la matrice associata ad  $f$  rispetto a  $\mathcal{B}$  sia una matrice diagonale.

**Osservazione 70** Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$ , sia  $\phi$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  dato dalla moltiplicazione per  $A$  e consideriamo le seguenti condizioni:

1.  $\phi$  è diagonalizzabile;
2.  $A$  è simile ad una matrice diagonale.

Visto che la matrice associata a  $\phi$  rispetto alla base standard è proprio  $A$ , per l'Osservazione 62 si ha

$$(1) \implies (2)$$

e per l'Osservazione 65 si ha

$$(2) \implies (1).$$

Dunque le due condizioni sono equivalenti, cioè l'endomorfismo di moltiplicazione per  $A$  è diagonalizzabile se e solo se  $A$  è simile ad una matrice diagonale.

**Definizione 144** Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$ . Se sono verificate le condizioni equivalenti espresse nell'osservazione precedente, allora  $A$  si dice diagonalizzabile (sui reali).

**Osservazione 71** Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio finitamente generato  $V$ , sia  $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  una sua base e sia  $A$  la matrice associata ad  $f$  rispetto a  $\mathcal{B}$ . Dalla Proposizione 95 a pag. 91 segue subito che  $A$  è diagonale se e solo se

$$f(\mathbf{v}_1) = a_{11}\mathbf{v}_1 \quad , \quad \dots \quad , \quad f(\mathbf{v}_n) = a_{nn}\mathbf{v}_n \quad ,$$

cioè se e solo se per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$  il vettore (sicuramente non nullo)  $\mathbf{v}_i$  è autovettore di  $f$  con autovalore  $a_{ii}$ .

Concludiamo che  $f$  è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di  $V$  costituita da autovettori di  $f$ , e in tal caso la matrice diagonale associata ha gli autovalori sulla diagonale  $a_{11}, \dots, a_{nn}$ .

In particolare, una matrice quadrata è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di  $\mathbb{R}^n$  costituita da autovettori della matrice stessa.

**Proposizione 106** Sia  $p$  un polinomio (cioè possiamo assumere che  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sia una funzione del tipo  $a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$ , con  $a_0, a_1, \dots, a_n$  numeri reali fissati). Allora  $p$  ha un numero finito di radici reali. Inoltre, se  $t_1, \dots, t_s$  sono tali radici, allora esiste un'unica  $n$ -pla  $(n_1, \dots, n_s)$  di numeri naturali tali che

$$p(t) = (t - t_1)^{n_1} \dots (t - t_s)^{n_s} q(t) \quad ,$$

dove  $q$  è un polinomio privo di radici reali.

Tralasciamo la dimostrazione.

**Definizione 145** Nella situazione della proposizione precedente, si dirà che il numero naturale  $n_i$  è la molteplicità della radice  $t_i$  di  $p$  (per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ ).

**Definizione 146** Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato, sia  $\bar{t}$  un autovalore di  $f$  e sia  $p_f$  il polinomio caratteristico. La molteplicità della radice  $\bar{t}$  di  $p_f$  (cfr. Proposizione 105) si dice molteplicità algebrica dell'autovalore  $\bar{t}$ .

La dimensione dell'autospazio relativo a  $\bar{t}$  si dice molteplicità geometrica dell'autovalore  $\bar{t}$ .

**Proposizione 107** Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato e sia  $\bar{t}$  un autovalore di  $f$ . Allora la molteplicità geometrica di  $\bar{t}$  è minore o uguale alla molteplicità algebrica.

Tralasciamo la dimostrazione.

**Prerequisito 14** Assumiamo nota la nozione di numero complesso.

**Proposizione 108** Ogni numero reale è anche un numero complesso.

**Osservazione 72** Abbiamo già visto che un numero reale è un autovalore di un endomorfismo  $f$  (di uno spazio finitamente generato) se e solo se è una radice del polinomio caratteristico di  $f$ . Però è possibile che esistano anche dei numeri complessi che siano radici del polinomio caratteristico e che non siano numeri reali. Tali numeri non sono ovviamente autovalori di  $f$ .

**Proposizione 109** Siano  $t_1, \dots, t_s$  autovalori distinti di un endomorfismo, e siano  $S_1, \dots, S_s$  sistemi linearmente indipendenti, rispettivamente costituiti da autovettori con autovalore  $t_1, \dots, t_s$ . Allora il sistema "unione" di  $S_1, \dots, S_s$  è ancora linearmente indipendente.

Tralasciamo la dimostrazione.

**Proposizione 110** Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato. Allora  $f$  è diagonalizzabile se e solo se valgono tutti e due i seguenti fatti.

- non esiste nessun numero complesso oltre agli autovalori di  $f$  che sia radice del polinomio caratteristico;
- per ogni autovalore di  $f$  la molteplicità algebrica è uguale alla molteplicità geometrica.

Tralasciamo la dimostrazione.

Un tipico esercizio d'esame è quello di stabilire se un'endomorfismo è o no diagonalizzabile, e in caso affermativo di trovare una base di autovettori e la rispettiva matrice associata. La proposizione precedente ci mette in grado di rispondere.

Se l'endomorfismo è diagonalizzabile, per trovare una base di autovettori basta "mettere insieme" le basi dei singoli autospazi. Queste basi si determinano facilmente: vedremo più avanti dei metodi molto efficaci.

## 54 Applicazioni bilineari

**Definizione 147** Siano  $V, V'$  e  $W$  spazi vettoriali sui reali e sia

$$\phi : V \times V' \longrightarrow W$$

un'applicazione. Per ogni  $\mathbf{v} \in V$  indichiamo con  $\phi_{\mathbf{v}} : V' \rightarrow W$  l'applicazione che a ciascun  $\mathbf{v}' \in V'$  associa  $\phi((\mathbf{v}, \mathbf{v}'))$ :

$$\phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}') \stackrel{\text{def}}{=} \phi((\mathbf{v}, \mathbf{v}')) .$$

Per ogni  $\mathbf{v}' \in V'$  indichiamo con  $\phi'_{\mathbf{v}'} : V \rightarrow W$  l'applicazione che a ciascun  $\mathbf{v} \in V$  associa  $\phi((\mathbf{v}, \mathbf{v}'))$ :

$$\phi'_{\mathbf{v}'}(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \phi((\mathbf{v}, \mathbf{v}')) .$$

Se per ogni  $\mathbf{v} \in V$  e  $\mathbf{v}' \in V'$  le applicazioni  $\phi_{\mathbf{v}}$  e  $\phi'_{\mathbf{v}'}$  sono lineari, allora si dirà che  $\phi$  è un'applicazione bilineare.

Se  $V = V'$  e se per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$  si ha

$$\phi((\mathbf{v}, \mathbf{v}')) = \phi((\mathbf{v}', \mathbf{v}))$$

allora l'applicazione  $\phi$  si dirà simmetrica; se invece  $\phi$  è tale che per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$  si abbia

$$\phi((\mathbf{v}, \mathbf{v}')) = -\phi((\mathbf{v}', \mathbf{v})) ,$$

allora  $\phi$  si dirà antisimmetrica.

Se  $V = V'$  e  $W = \mathbb{R}$ , allora l'applicazione bilineare  $\phi$  sarà anche detta forma bilineare su  $V$ .

**Esempio 48** Il prodotto scalare tra vettori liberi è una forma bilineare simmetrica (cfr. Esempio 35 a pag. 76).

**Esempio 49** Il prodotto scalare tra vettori numerici è una forma bilineare simmetrica (cfr. Esempio 34 a pag. 76).

**Esempio 50** L'applicazione

$$\mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{n \times p} \longrightarrow \mathbb{R}^{m \times p}$$

tale che alla coppia di matrici  $(A, B) \in \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{n \times p}$  associa il prodotto (righe per colonne)  $AB$  è un'applicazione bilineare.

**Esempio 51** Il prodotto vettoriale tra vettori liberi è un'applicazione bilineare antisimmetrica.

**Esempio 52** L'applicazione

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

che a ciascuna coppia  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$  associa il determinante della matrice quadrata di ordine due che ha come righe (nell'ordine)  $\mathbf{a}_1$  e  $\mathbf{a}_2$ , è una forma bilineare antisimmetrica.

**Esempio 53** Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$  e siano  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ . Identificando (come abbiamo fatto per le applicazioni lineari) i vettori  $X$  e  $Y$  con matrici colonna, abbiamo che  $X^t$  è una matrice di tipo  $1 \times n$ ,  $A$  è una matrice di tipo  $n \times n$  e  $Y$  è una matrice di tipo  $n \times 1$ . Ha senso quindi il prodotto

$$X^t A Y,$$

e questo è una matrice di tipo  $1 \times 1$ .

Poiché una matrice di tipo  $1 \times 1$  può essere identificata (per abuso di notazione) con il suo unico termine, abbiamo allora che

$$(X, Y) \mapsto X^t A Y$$

definisce un'applicazione

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Tale applicazione è una forma bilineare sullo spazio  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposizione 111** Per ogni forma bilineare

$$\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

esiste una e ed una sola matrice  $A$  tale che  $\phi$  coincida con la forma bilineare definita nell'esempio precedente, cioè:

$$\phi(X, Y) = X^t A Y$$

per ogni  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ .

Tralasciamo la dimostrazione.

**Proposizione 112** Sia  $\phi$  una forma bilineare definita su uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione  $n$  e sia  $\mathcal{B}$  una base di  $V$ . Allora esiste una ed una sola matrice  $A$  tale che per ogni coppia  $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  di vettori di  $V$ , detti  $X$  e  $Y$  i rispettivi vettori delle componenti, si abbia

$$\phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = X^t A Y.$$

Tralasciamo i dettagli della dimostrazione (che peraltro è abbastanza immediata sulla base della proposizione precedente).

**Definizione 148** Nella situazione della proposizione precedente, la matrice  $A$  è detta matrice associata a  $\phi$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ .

**Osservazione 73** Se  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  è la base standard di  $\mathbb{R}^n$  ed  $A$  è una matrice quadrata di ordine  $n$ , si vede facilmente che per ogni  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  si ha

$$a_{ij} = \mathbf{e}_i^t A \mathbf{e}_j.$$

Dall'osservazione ora fatta si deduce facilmente che la matrice  $A$  associata ad una forma bilineare  $\phi$  rispetto ad una base  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  è data da

$$a_{ij} = \phi(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j).$$

**Proposizione 113** *Sia  $\phi$  una forma bilineare definita su uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione  $n$ , siano  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  basi di  $V$ , siano  $A$  ed  $A'$  le matrici associate a  $\phi$  rispetto a tali basi e sia infine  $B$  la matrice del cambio di base da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$ .*

*Allora si ha*

$$A = B^t A' B.$$

Tralasciamo la dimostrazione (si noti la differenza con l'Osservazione 62 a pag. 97).

**Definizione 149** *Due matrici  $A$  ed  $A'$  si dicono congruenti se esiste una matrice invertibile  $B$  tale che*

$$A = B^t A' B.$$

**Proposizione 114** *Matrici congruenti hanno lo stesso rango.*

Tralasciamo la dimostrazione.

Come conseguenza abbiamo che tutte le matrici associate ad una stessa forma bilineare hanno lo stesso rango.

**Definizione 150** *Il rango di una forma bilineare definita su uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione  $n$  è il rango delle matrici ad essa associate. Una forma bilineare su  $V$  si dice degenerare se il suo rango è minore di  $n$ .*

## 55 Forme quadratiche

**Definizione 151** *Sia  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineare su uno spazio vettoriale  $V$ . L'applicazione*

$$q : V \rightarrow \mathbb{R}$$

*data da*

$$q(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} b(\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

*si dice forma quadratica su  $V$ .*

**Esempio 54** *Siccome il prodotto scalare di vettori liberi è una forma bilineare, per la Proposizione 42 (pag. 46) l'applicazione che ad ogni vettore libero associa il quadrato del suo modulo è una forma quadratica.*

**Esempio 55** *Siccome il prodotto scalare standard di vettori numerici è una forma bilineare, l'applicazione che ad ogni vettore numerico di ordine  $n$  associa la somma dei quadrati delle sue componenti è una forma quadratica su  $\mathbb{R}^n$ .*

**Esempio 56** Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

e sia  $b$  la forma bilineare su  $\mathbb{R}^2$  data da

$$b(X, Y) = X^t A Y .$$

Allora  $b$  dà luogo alla forma quadratica  $q(\mathbf{v}) = b(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ . Un'espressione esplicita per  $q$  è

$$q(x, y) = 2x^2 + 2xy + 6y^2 .$$

La forma  $q$  è dunque descritta da un polinomio di secondo grado in due variabili, che è inoltre un polinomio omogeneo (cioè tutti i monomi hanno lo stesso grado).

Non è difficile rendersi conto che qualunque forma quadratica su  $\mathbb{R}^n$  è descritta da un polinomio omogeneo di secondo grado in  $n$  variabili. Inoltre, usando la coordinazione rispetto ad una base, una forma quadratica su un qualunque spazio vettoriale finitamente generato può essere descritta tramite un polinomio omogeneo di secondo grado.

**Osservazione 74** Sia  $b$  una forma bilineare antisimmetrica su uno spazio vettoriale  $V$  sui reali. Allora per ogni  $\mathbf{v} \in V$  si ha

$$b(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = -b(\mathbf{v}, \mathbf{v}) ,$$

dunque  $b(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ . Quindi la forma quadratica data da  $q(\mathbf{v}) = b(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  si riduce all'applicazione che associa 0 ad ogni vettore.

L'esempio di sopra mostra che diverse forme bilineari possono dare luogo alla stessa forma quadratica (basta considerare una forma antisimmetrica non nulla e la forma bilineare nulla).

**Proposizione 115** Sia  $q$  una forma quadratica su uno spazio vettoriale  $V$  sui reali, e consideriamo l'applicazione

$$s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

definita da

$$s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2} (q(\mathbf{v} + \mathbf{w}) - q(\mathbf{v}) - q(\mathbf{w})) .$$

Allora  $s$  è una forma bilineare simmetrica.

Inoltre per ogni  $\mathbf{v} \in V$  si ha

$$q(\mathbf{v}) = s(\mathbf{v}, \mathbf{v}) .$$

*Dimostrazione.* (semi-facoltativa da 3 punti).

Siccome  $q$  è una forma quadratica, deve essere data da

$$q(\mathbf{v}) = b(\mathbf{v}, \mathbf{v})$$

per qualche forma bilineare  $b$ . Dunque (tenendo presente che  $b$  è bilineare) otteniamo che per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  si ha

$$s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2}(b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{w}, \mathbf{v})).$$

Da questa formula, poiché  $b$  è bilineare, si ottiene subito che  $s$  è bilineare e che soddisfa la formula

$$q(\mathbf{v}) = s(\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Inoltre,  $s$  è evidentemente simmetrica (discende subito, sia dalla definizione, sia dalla relazione con  $b$ ).

□

**Definizione 152** Nella situazione della proposizione precedente, si dice che la forma  $s$  è ottenuta da  $q$  per polarizzazione.

Se  $b$  è una forma bilineare su  $V$ , si dice che la forma bilineare simmetrica data da

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \frac{1}{2}(b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{w}, \mathbf{v}))$$

è ottenuta da  $b$  per simmetrizzazione.

Se  $V$  è finitamente generato e  $\mathcal{B}$  è una sua base, la matrice associata ad  $s$  rispetto a  $\mathcal{B}$  si dice anche matrice associata a  $q$  rispetto a  $\mathcal{B}$ .

La forma quadratica  $q$  si dirà degenere se  $s$  è degenere.

**Proposizione 116** Sia  $q$  una forma quadratica su uno spazio finitamente generato  $V$ . Allora esiste una base  $\mathcal{B}$  di  $V$  tale che la matrice associata a  $q$  sia una matrice diagonale i cui termini appartengono tutti all'insieme  $\{-1, 0, 1\}$ .

Tralasciamo la (facile) dimostrazione. L'idea fondamentale consiste nel cosiddetto "completamento dei quadrati", di cui un'esempio è il seguente:

$$4x^2 + 6xy + 3y^2 = (2x + \frac{3}{2}y)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}y)^2.$$

Un'altra dimostrazione si potrebbe ottenere utilizzando la cosiddetta "diagonalizzazione ortogonale" delle matrici simmetriche, che però non possiamo trattare per brevità. L'unico fatto che ci serve enunciare riguardo a questo è il seguente.

**Proposizione 117** Sia  $A$  la matrice associata ad una forma quadratica  $q$ , e sia  $A'$  un'altra matrice associata a  $q$ , che sia però diagonale e con tutti i termini appartenenti all'insieme  $\{-1, 0, 1\}$ . Allora il numero di termini di  $A'$  uguali a 1 (cioè il numero di indici  $i$  tali che  $a'_{ii} = 1$ ) è uguale alla somma delle molteplicità

algebriche degli autovalori positivi di  $A$ , e il numero di termini di  $A'$  uguali a  $-1$  è uguale alla somma delle molteplicità algebriche degli autovalori negativi di  $A$ .

**Osservazione 75** *Dalla proposizione precedente segue subito che se due matrici diagonali  $A$  ed  $A'$  hanno i termini tutti appartenenti all'insieme  $\{-1, 0, 1\}$ , e se esse rappresentano una stessa forma quadratica su uno spazio  $V$ , rispetto ad opportune basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$ , allora il numero di termini di  $A$  uguali ad  $1$  è uguale al numero di termini di  $A'$  uguali ad  $1$ , e il numero di termini di  $A$  uguali a  $-1$  è uguale al numero di termini di  $A'$  uguali a  $-1$ .*

**Definizione 153** *Sia  $q$  una forma quadratica e sia  $A$  una matrice associata a  $q$  che sia diagonale e con tutti i termini appartenenti all'insieme  $\{-1, 0, 1\}$ . Se  $p$  è il numero di termini di  $A$  uguali ad  $1$  ed  $n$  è il numero di termini di  $A$  uguali a  $-1$ , allora la coppia  $(p, n)$  si dice segnatura di  $q$ .*

Dalle cose dette segue subito che se  $q$  è una forma quadratica su uno spazio finitamente generato  $V$  sui reali e se la segnatura di  $q$  è  $(p, n)$ , allora esiste una base  $\mathcal{B}$  tale che, dette  $(x_1, \dots, x_m)$  le componenti di un qualunque vettore  $\mathbf{v} \in V$  si ha:

$$q(\mathbf{v}) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+n}^2.$$

Tale espressione viene detta *forma canonica* di  $q$ .

## 56 Spazi vettoriali euclidei

**Definizione 154** *Una forma bilineare simmetrica viene anche detta un prodotto scalare (coerentemente col fatto che i due prodotti scalari che conosciamo effettivamente sono forme bilineari simmetriche).*

*Un prodotto scalare  $s$  su uno spazio  $V$  sui reali si dice definito positivo se per ogni  $\mathbf{v} \in V$  si ha*

- $s(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$ ;
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

*Uno spazio vettoriale euclideo è una coppia  $(V, s)$  dove  $V$  è uno spazio vettoriale sui reali ed  $s$  è un prodotto scalare definito positivo su  $V$ .*

*D'ora in poi, il prodotto scalare introdotto con la Definizione 76 a pag. 46, sarà detto prodotto scalare geometrico, per distinguerlo dagli altri prodotti scalari che è possibile definire sullo spazio  $\mathcal{V}$  dei vettori liberi.*

**Esempio 57** *Sia  $s$  il prodotto scalare geometrico sullo spazio  $\mathcal{V}$  dei vettori liberi. Allora  $(\mathcal{V}, s)$  è uno spazio vettoriale euclideo.*

**Esempio 58** *Sia  $s$  il prodotto scalare standard su  $\mathbb{R}^n$ . Allora  $(\mathbb{R}^n, s)$  è uno spazio vettoriale euclideo.*

## 57 Equazioni lineari

**Definizione 155** Possiamo definire un'equazione come una coppia  $(f, g)$  tale che  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : X \rightarrow Y$  siano funzioni (con lo stesso dominio e con lo stesso insieme d'arrivo). Un'equazione  $(f, g)$  viene (un po' impropriamente) denotata con

$$f = g$$

Una soluzione di tale equazione è un elemento  $\bar{x} \in X$  tale che

$$f(\bar{x}) = g(\bar{x}).$$

Se  $\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è una forma lineare su  $\mathbb{R}^n$  e  $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione costante (cioè esiste  $c \in \mathbb{R}$  tale che  $b(x) = c$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ ), allora diremo che

$$\ell = b$$

è un'equazione lineare in  $n$  incognite.

**Definizione 156** Due equazioni si dicono equivalenti se l'insieme delle soluzioni dell'una è uguale all'insieme delle soluzioni dell'altra.

**Osservazione 76** Se

$$f = g \quad \text{ed} \quad f' = g'$$

sono equazioni tali che

$$f + g' = f' + g$$

(cioè, parlando informalmente, si ottengono l'una dall'altra con passaggi di membro) allora sono equivalenti.

Il viceversa non è vero (in generale).

Se un'equazione

$$f = g$$

può essere trasformata “con passaggi di membro” in un'equazione lineare, allora è opportuno chiamare lineare anche tale equazione. Dunque estendiamo la definizione di equazione lineare come segue.

**Definizione 157** Se

$$\ell = b$$

è un'equazione lineare (nel senso della Definizione 155), allora diremo lineare anche ogni equazione

$$f = g$$

tale che

$$f + b = g + \ell.$$

L'equazione

$$\ell = b$$

sarà detta equazione lineare in forma standard.

**Definizione 158** *La funzione*

$$x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

che ad ogni  $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$  associa la sua  $i$ -esima componente (cioè  $s_i$ ) sarà chiamata  $i$ -esima funzione coordinata su  $\mathbb{R}^n$ .

Se  $n \leq 3$ , si useranno anche le notazioni  $x, y, z$  al posto di  $x_1, x_2, x_3$ .

**Osservazione 77** *Per la Proposizione 94 (pag. 90), ogni forma lineare  $\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è del tipo*

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n ,$$

con  $a_1, \dots, a_n$  univocamente determinati. Se inoltre, come nella Definizione 110 (pag. 64), identifichiamo ogni funzione costante con il suo (unico) valore, allora ogni equazione lineare in forma standard può essere scritta

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b ,$$

con  $a_1, \dots, a_n, b$  numeri reali fissati.

**Definizione 159** *Nella situazione dell'osservazione precedente, i numeri  $a_1, \dots, a_n$  vengono detti coefficienti dell'equazione (o della forma) lineare e il vettore numerico  $(a_1, \dots, a_n)$  verrà quindi detto vettore dei coefficienti. Il numero  $b$  viene detto termine noto.*

**Osservazione 78** *Se  $\ell = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$  ed  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ . Allora si ha*

$$\ell(\mathbf{s}) = a_1s_1 + \dots + a_ns_n .$$

Dunque, parlando informalmente,  $(s_1, \dots, s_n)$  è una soluzione se sostituendo  $s_1, \dots, s_n$  alle "incognite"  $x_1, \dots, x_n$  l'uguaglianza è verificata.

**Osservazione 79** *Siano  $\ell$  ed  $\ell'$  forme lineari su  $\mathbb{R}^n$  con rispettivi vettori dei coefficienti  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{a}'$ . Allora la somma  $\ell + \ell'$  è una funzione lineare con vettore dei coefficienti  $\mathbf{a} + \mathbf{a}'$ . Se poi  $h \in \mathbb{R}$ , il prodotto  $h\ell$  è una funzione lineare con vettore dei coefficienti  $h\mathbf{a}$ .*

**Definizione 160** *Siano*

$$\ell = b \quad \text{ed} \quad \ell' = b'$$

equazioni lineari, denotiamole per brevità con  $e$  ed  $e'$ , e sia  $h \in \mathbb{R}$ . L'equazione lineare

$$\ell + \ell' = b + b'$$

è detta somma (membro a membro) di  $e$  ed  $e'$ , e verrà denotata (com'è ovvio) con  $e + e'$ . L'equazione lineare

$$h\ell = hb$$

è detta prodotto (membro a membro) di  $h$  per  $e$ , e sarà indicata con  $he$ .

**Proposizione 118** *Siano  $e$  ed  $e'$  equazioni lineari, e supponiamo che*

$$\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$$

*sia una soluzione di entrambe. Allora  $\mathbf{s}$  è soluzione di  $e + e'$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $e = (\ell, b)$  ed  $e' = (\ell', b')$ . Siccome  $\mathbf{s}$  è soluzione delle due equazioni abbiamo

$$\ell(\mathbf{s}) = b, \quad \ell'(\mathbf{s}) = b'.$$

Quindi

$$(\ell + \ell')(\mathbf{s}) = \ell(\mathbf{s}) + \ell'(\mathbf{s}) = b + b'.$$

Ma il fatto che  $(\ell + \ell')(\mathbf{s}) = b + b'$  vuol dire, per definizione, che  $\mathbf{s}$  è soluzione dell'equazione  $(\ell + \ell', b + b')$ , che è l'equazione somma  $e + e'$ .  $\square$

**Proposizione 119** *Sia  $e$  un'equazione lineare, sia  $\mathbf{s}$  una sua soluzione e sia  $h \in \mathbb{R}$ . Allora  $\mathbf{s}$  è soluzione dell'equazione prodotto  $he$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $e = (\ell, b)$ . Siccome  $\mathbf{s}$  è una soluzione abbiamo  $\ell(\mathbf{s}) = b$ . Quindi

$$(h\ell)(\mathbf{s}) = h\ell(\mathbf{s}) = hb.$$

Ma il fatto che  $(h\ell)(\mathbf{s}) = hb$  vuol dire, per definizione, che  $\mathbf{s}$  è soluzione dell'equazione  $(h\ell, hb)$ , che è l'equazione prodotto  $he$ .  $\square$

**Proposizione 120** *Sia  $e$  un'equazione lineare, sia  $h \in \mathbb{R}$  e sia  $\mathbf{s}$  una soluzione dell'equazione prodotto  $he$ . Se  $h \neq 0$  allora  $\mathbf{s}$  è soluzione di  $e$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $e = (\ell, b)$ . Siccome  $\mathbf{s}$  è una soluzione di  $he = (h\ell, hb)$  abbiamo  $h\ell(\mathbf{s}) = hb$ . Siccome  $h \neq 0$  possiamo moltiplicare per  $\frac{1}{h}$ :

$$\ell(\mathbf{s}) = \frac{1}{h} \cdot h \cdot \ell(\mathbf{s}) = \frac{1}{h} \cdot h \cdot b = b.$$

Ma il fatto che  $\ell(\mathbf{s}) = b$  vuol dire, per definizione, che  $\mathbf{s}$  è soluzione dell'equazione  $e = (\ell, b)$ .  $\square$

Dalle ultime due proposizioni ricaviamo che se  $h \neq 0$ , le equazioni  $e$  ed  $he$  sono equivalenti.

## 58 Sistemi lineari

**Definizione 161** Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite è una  $m$ -upla  $(e_1, \dots, e_m)$  di equazioni lineari in  $n$  incognite. Se le equazioni sono tutte in forma standard, diremo che il sistema è in forma standard. Generalmente si usa la notazione

$$\begin{cases} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{cases}$$

La  $n$ -pla dei coefficienti dell'equazione  $e_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ), si indica generalmente usando un doppio pedice:  $(a_{i1}, \dots, a_{in})$ . Il termine noto di  $e_i$  si indica generalmente con  $b_i$ . Dunque la notazione per esteso di un generico sistema lineare è:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(cioè la matrice  $m \times n$  tale che per ogni  $i \in \{1, \dots, m\}$  la riga  $\mathbf{a}_i$  è il vettore dei coefficienti dell'equazione  $e_i$ ) si dice matrice dei coefficienti del sistema. La matrice

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

(cioè la matrice  $m \times (n+1)$  tale che per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$  la colonna  $\mathbf{a}^i$  è uguale alla colonna  $\mathbf{a}^i$  di  $A$ , mentre la colonna  $\mathbf{a}^{n+1}$  è costituita dai termini noti) si dice matrice completa del sistema. Una soluzione del sistema lineare è un vettore numerico  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$  che sia soluzione di tutte le equazioni  $e_1, \dots, e_m$ . Se il sistema ammette almeno una soluzione si dice compatibile, in caso contrario incompatibile. Due sistemi si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni. Un sistema si dice omogeneo se ha tutti i termini noti uguali a zero.

**Osservazione 80** Un sistema omogeneo è sicuramente compatibile, perché ha come soluzione il vettore numerico nullo  $(0, \dots, 0)$ .

## 59 Forma matriciale dei sistemi lineari

Consideriamo un sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sia  $A$  la matrice dei coefficienti e sia

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

una matrice di tipo  $n \times 1$ . Calcoliamo il prodotto  $AY$ :

$$AY = \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + \cdots + a_{mn}y_n \end{pmatrix}.$$

Dunque  $AY$  è la matrice di tipo  $m \times 1$  costituita dai numeri ottenuti sostituendo  $(y_1, \dots, y_n)$  nei primi membri delle equazioni del sistema. Consideriamo la matrice  $B$ , di tipo  $m \times 1$ , costituita dai termini noti:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Allora abbiamo che

$$(y_1, \dots, y_n) \text{ è soluzione del sistema } \iff AY = B.$$

Per questo motivo, si dice che

$$AX = B$$

è la *forma matriciale* del sistema lineare. Conviene pensare  $X$  come una matrice di tipo  $n \times 1$  costituita dalle funzioni coordinate:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Ad esempio, la forma matriciale del sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = 4 \end{cases}$$

è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Se vogliamo,  $AX$  può anche essere interpretata come l'applicazione lineare

$$\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

data dalla moltiplicazione per  $A$ , mentre  $B$  può essere identificata con la funzione costante

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

che ad ogni vettore di  $\mathbb{R}^n$  associa  $B$ . Con queste convenzioni, il sistema lineare diventa un'unica "equazione matriciale" (cfr. Definizione 155).

Così, l'insieme delle soluzioni è semplicemente la controimmagine

$$\phi^{-1}(B).$$

## 60 Teorema di Rouché-Capelli

**Proposizione 121** (teorema di Rouché-Capelli). *Siano  $A$  e  $A'$  la matrice dei coefficienti e la matrice completa di un sistema lineare. Allora il sistema è compatibile se e solo se  $A$  e  $A'$  hanno lo stesso rango.*

*Dimostrazione.* (facoltativa).

Sia

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

l'applicazione data dalla moltiplicazione per  $A$  e sia  $B$  la colonna dei termini noti. La dimostrazione della Proposizione 98 (pag. 92) mostra anche che un sistema massimo di colonne di  $A$  forma una base di  $\text{Im } \varphi$ . Ora, il sistema è compatibile se e solo se  $B \in \text{Im } \varphi$ , e questo accade se e solo se  $B$  dipende dal sistema massimo di colonne di  $A$ .

Ma se  $B$  dipende dal sistema massimo di  $A$ , allora questo è anche un sistema massimo di  $A'$ , e allora  $A$  e  $A'$  hanno lo stesso rango. Se invece  $B$  non dipende dal sistema massimo allora (tenendo presente la Proposizione 70 a pag. 68) un sistema massimo di colonne di  $A'$  si ottiene "aggiungendo"  $B$ , e dunque  $\text{rk } A' = \text{rk } A + 1$ , e allora i ranghi sono diversi.

In conclusione il sistema è compatibile se e solo se  $A$  e  $A'$  hanno lo stesso rango.

□

## 61 Sistema omogeneo associato

**Definizione 162** *Se*

$$AX = B$$

*è un sistema lineare (scritto in forma matriciale), allora il sistema*

$$AX = \mathbf{0}$$

*si dice sistema omogeneo associato al sistema  $AX = B$ .*

**Osservazione 81** Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare e sia  $\mathbf{w} \in W$ . Diamo ora una descrizione della controimmagine  $f^{-1}(\mathbf{w})$ .

Se  $\mathbf{w} \notin \text{Im } f$ , allora  $f^{-1}(\mathbf{w})$  è vuoto.

Se  $\mathbf{w} \in \text{Im } f$  allora esiste almeno un vettore  $\bar{\mathbf{v}} \in V$  tale che  $f(\bar{\mathbf{v}}) = \mathbf{w}$ . Notiamo che per ogni vettore  $\mathbf{k} \in \text{Ker } f$ , si ha

$$f(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{k}) = f(\bar{\mathbf{v}}) + f(\mathbf{k}) = \mathbf{w} + \mathbf{0} = \mathbf{w} ,$$

dunque

$$\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{k} \in f^{-1}(\mathbf{w}) .$$

Inoltre, se  $\mathbf{v}$  è un qualunque vettore di  $f^{-1}(\mathbf{w})$ , ponendo  $\mathbf{k} = \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}$ , otteniamo

$$f(\mathbf{k}) = f(\mathbf{v}) - f(\bar{\mathbf{v}}) = \mathbf{w} - \mathbf{w} = \mathbf{0} ,$$

e dunque  $\mathbf{k} \in \text{Ker } f$  e  $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{k}$ . Concludiamo che

$$f^{-1}(\mathbf{w}) = \bar{\mathbf{v}} + \text{Ker } f ,$$

dove con  $\bar{\mathbf{v}} + \text{Ker } f$  indichiamo l'insieme di tutti i vettori del tipo  $\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{k}$  con  $\mathbf{k} \in \text{Ker } f$ . Inoltre c'è un'applicazione biettiva tra  $\text{Ker } f$  e  $f^{-1}(\mathbf{w})$ , che consiste semplicemente nel sommare  $\bar{\mathbf{v}}$ .

**Osservazione 82** Supponiamo che la matrice dei coefficienti  $A$  e la matrice completa  $A'$  di un sistema lineare in  $n$  incognite abbiano entrambe rango  $r$ , di modo che per il teorema di Rouché-Capelli abbia almeno una soluzione  $\bar{\mathbf{s}}$ . Sia

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

l'applicazione data dalla moltiplicazione per  $A$ . Per l'osservazione precedente, l'insieme delle soluzioni del sistema è

$$\bar{\mathbf{s}} + \text{Ker } \varphi ,$$

per la Proposizione 98 a pag. 92, si ha

$$\dim \text{Im } \varphi = r$$

e per la Proposizione 87 a pag. 84, si ha

$$\dim \text{Ker } \varphi = n - r .$$

Dunque l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare in  $n$  incognite con entrambe le matrici di rango  $r$ , è in corrispondenza biettiva naturale con uno spazio di dimensione  $n - r$ .

In particolare, se  $n = r$  c'è un'unica soluzione.

Notiamo infine che lo spazio  $\text{Ker } \varphi$  è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

Parlando informalmente, più il rango (delle due matrici) è basso rispetto al numero delle incognite, più soluzioni ci sono. Il rovescio della medaglia è che quando i ranghi delle due matrici sono bassi rispetto al numero delle incognite, allora è più facile che essi siano diversi, e quindi che il sistema non abbia affatto soluzioni.

## 62 Regola di Cramer

**Proposizione 122** (regola di Cramer). Sia  $S$  un sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite e sia  $A$  la matrice dei coefficienti (quadrata di ordine  $n$ ). Se

$$|A| \neq 0$$

allora il sistema  $S$  ha un'unica soluzione, data da:

$$\left( \frac{|A_1|}{|A|}, \dots, \frac{|A_n|}{|A|} \right)$$

dove  $A_i$  indica la matrice ottenuta da  $A$  sostituendo la colonna  $\mathbf{a}^i$  con la colonna dei termini noti.

*Dimostrazione.* (semi-facoltativa da 4 punti).

Per la Proposizione 66 (pag. 62) la matrice  $A$  è invertibile. Scrivendo il sistema in forma matriciale

$$AX = B,$$

si deduce facilmente che

$$A^{-1}B$$

è una soluzione del sistema e che è l'unica possibile.

La  $i$ -esima componente di tale soluzione è data quindi dal prodotto scalare standard della  $i$ -esima riga di  $A^{-1}$  per la colonna dei termini noti. Sempre per la Proposizione 66 a pag. 62, la  $i$ -esima riga di  $A^{-1}$  è

$$\left( \frac{A_{1i}}{|A|}, \dots, \frac{A_{ni}}{|A|} \right)$$

Dunque la  $i$ -esima componente della soluzione è

$$\frac{b_1 A_{1i} + \dots + b_n A_{ni}}{|A|},$$

il cui numeratore è proprio lo sviluppo di Laplace di  $A_i$  rispetto alla sua  $i$ -esima colonna.

□

## 63 Trasformazioni elementari

**Definizione 163** Sia  $\mathcal{S}$  l'insieme di tutti i sistemi lineari di  $m$  equazioni in  $n$  incognite. Una trasformazione elementare su tali sistemi è un'applicazione  $\tau : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  definita in uno dei seguenti tre modi:

- *Trasformazione di primo tipo (moltiplicazione di un'equazione per uno scalare non nullo): fissati  $i \in \{1, \dots, m\}$  ed  $h \in \mathbb{R} - \{0\}$ , per ogni sistema*

$$S : \begin{cases} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{cases}$$

si definisce  $\tau(S)$  come il sistema

$$\begin{cases} e'_1 \\ \vdots \\ e'_m \end{cases}$$

tale che

$$e'_i = he_i, \quad e'_k = e_k \quad \forall k \neq i.$$

- *Trasformazione di secondo tipo (scambio di due equazioni): fissati due indici  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , per ogni sistema*

$$S : \begin{cases} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{cases}$$

si definisce  $\tau(S)$  come il sistema

$$\begin{cases} e'_1 \\ \vdots \\ e'_m \end{cases}$$

tale che

$$e'_i = e_j, \quad e'_j = e_i, \quad e'_k = e_k \quad \forall k \neq i, j.$$

- *Trasformazione di terzo tipo (somma di un'equazione con un multiplo di un'altra): fissati  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  con  $i \neq j$ , ed  $h \in \mathbb{R}$ , per ogni sistema*

$$S : \begin{cases} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{cases}$$

si definisce  $\tau(S)$  come il sistema

$$\begin{cases} e'_1 \\ \vdots \\ e'_m \end{cases}$$

tale che

$$e'_i = e_i + he_j, \quad e'_k = e_k \quad \forall k \neq i.$$

È importante sottolineare che nella trasformazione di primo tipo lo scalare  $h$  deve essere diverso da 0, e che nella trasformazione di terzo tipo  $j$  deve essere diverso da  $i$  ( $h$  può anche essere 0).

**Esempio 59** Consideriamo il sistema

$$S : \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + y + 4z = -2 \\ 3x - 2y - 2z = 5 \end{cases}$$

Se applichiamo al sistema  $S$  la trasformazione elementare

$$e_2 \rightarrow 4e_2$$

otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 4x + 4y + 16z = -8 \\ 3x - 2y - 2z = 5 \end{cases}$$

Se invece applichiamo (sempre al sistema  $S$ ) la trasformazione elementare

$$e_1 \leftrightarrow e_3$$

otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y - 2z = 5 \\ x + y + 4z = -2 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

Applicando (sempre al sistema  $S$ ) la trasformazione elementare

$$e_3 \rightarrow e_3 + 2e_2$$

otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + y + 4z = -2 \\ 5x + 6z = 1 \end{cases}$$

**Proposizione 123** Sia  $S$  un sistema lineare e sia  $S'$  un sistema ottenuto da  $S$  tramite una trasformazione elementare. Allora  $S$  ed  $S'$  sono equivalenti.

*Dimostrazione.* (semi-facoltativa da 3 punti).

Diciamo  $e_1, \dots, e_m$  le equazioni di  $S$  ed  $e'_1, \dots, e'_m$  le equazioni di  $S'$ .

Se la trasformazione elementare è di primo tipo, allora per qualche  $i \in \{1, \dots, n\}$  e qualche  $h \in \mathbb{R} - \{0\}$  abbiamo  $e'_i = he_i$ . Abbiamo già osservato in precedenza che allora (essendo  $h \neq 0$ )  $e'_i$  ed  $e_i$  sono equivalenti. Poiché tutte le altre equazioni rimangono le stesse (cioè  $e'_k = e_k \quad \forall k \neq i$ ), i due sistemi sono chiaramente equivalenti.

Se la trasformazione elementare è di secondo tipo, allora le equazioni rimangono le stesse (cambia solo l'ordine in cui sono scritte). Dunque i due sistemi sono ovviamente equivalenti.

Supponiamo infine che la trasformazione sia di terzo tipo, diciamo

$$e_i \rightarrow e_i + he_j.$$

Se  $\mathbf{s}$  è una soluzione di  $S$ , allora in particolare è soluzione dell'equazione  $e_j$ . Per la Proposizione 119, abbiamo anche che  $\mathbf{s}$  è soluzione di  $he_j$ . Poiché poi  $\mathbf{s}$  deve anche essere soluzione dell'equazione  $e_i$ , per la Proposizione 118,  $\mathbf{s}$  è soluzione dell'equazione somma  $e'_i = e_i + he_j$ . Poiché tutte le altre equazioni rimangono le stesse (cioè  $e'_k = e_k \quad \forall k \neq i$ ), concludiamo che  $\mathbf{s}$  è soluzione del sistema  $S'$ .

Ci rimane da dimostrare che  $S'$  non ha altre soluzioni oltre a quelle di  $S$ . Supponiamo quindi che  $\mathbf{s}'$  sia una soluzione di  $S'$ . In particolare  $\mathbf{s}'$  è soluzione di  $e'_j$ . Ma siccome  $j \neq i$  abbiamo  $e'_j = e_j$ . Dunque  $\mathbf{s}'$  è soluzione di  $e_j$ , e quindi anche di  $(-h)e_j$ . Inoltre, siccome  $\mathbf{s}'$  è soluzione di  $e'_i$ , otteniamo che  $\mathbf{s}'$  è soluzione dell'equazione somma  $e'_i + (-h)e_j$ . Ma  $e'_i + (-h)e_j = e_i + he_j + (-h)e_j = e_i$ , quindi  $\mathbf{s}'$  è soluzione di  $e_i$ . Poiché tutte le altre equazioni rimangono le stesse (cioè  $e_k = e'_k \quad \forall k \neq i$ ), concludiamo che  $\mathbf{s}'$  è soluzione del sistema  $S$ . Quindi anche in questo caso i sistemi  $S$  ed  $S'$  sono equivalenti, come volevamo dimostrare.

□

Le trasformazioni elementari possono essere definite in maniera perfettamente analoga per le matrici sui reali.

**Definizione 164** Una trasformazione elementare per righe su matrici  $m \times n$  è un'applicazione  $\tau : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$  definita in uno dei seguenti tre modi:

- *Trasformazione di primo tipo (moltiplicazione di una riga per uno scalare non nullo):* fissati  $i \in \{1, \dots, m\}$  ed  $h \in \mathbb{R} - \{0\}$ , per ogni matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  si definisce  $\tau(A)$  come la matrice  $B$  tale che

$$\mathbf{b}_i = h\mathbf{a}_i \text{ e } \mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k \quad \forall k \neq i.$$

- *Trasformazione di secondo tipo (scambio di due righe):* fissati due indici  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , per ogni matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  si definisce  $\tau(A)$  come la matrice  $B$  tale che

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_j, \quad \mathbf{b}_j = \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k \quad \forall k \neq i, j.$$

- *Trasformazione di terzo tipo (somma di una riga con un multiplo di un'altra):* fissati  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  con  $i \neq j$ , ed  $h \in \mathbb{R}$ , per ogni matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  si definisce  $\tau(A)$  come la matrice  $B$  tale che

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i + h\mathbf{a}_j \text{ e } \mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k \quad \forall k \neq i.$$

Le trasformazioni definite sopra possono essere sinteticamente indicate come segue:

- Tipo I:

$$\mathbf{a}_i \rightarrow h\mathbf{a}_i$$

- Tipo II:

$$\mathbf{a}_i \leftrightarrow \mathbf{a}_j$$

- Tipo III:

$$\mathbf{a}_i \rightarrow \mathbf{a}_i + h\mathbf{a}_j$$

Anche per le matrici è importante sottolineare che nella trasformazione di primo tipo lo scalare  $h$  deve essere diverso da 0, e che nella trasformazione di terzo tipo  $j$  deve essere diverso da  $i$  ( $h$  può anche essere 0).

**Osservazione 83** Sia  $S$  un sistema lineare, sia  $A$  la sua matrice completa e sia  $B$  una matrice ottenuta da  $A$  tramite una trasformazione elementare. Allora il sistema che ha  $B$  come matrice completa si può ovviamente ottenere da  $S$  tramite la trasformazione elementare corrispondente a quella fatta su  $A$ .

**Esempio 60** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Se applichiamo ad  $A$  la trasformazione elementare

$$\mathbf{a}_2 \rightarrow 4\mathbf{a}_2$$

otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 16 & -8 \\ 3 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Se invece applichiamo (sempre alla matrice  $A$ ) la trasformazione elementare

$$\mathbf{a}_1 \leftrightarrow \mathbf{a}_3$$

otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Applicando (sempre alla matrice  $A$ ) la trasformazione elementare

$$\mathbf{a}_3 \rightarrow \mathbf{a}_3 + 2\mathbf{a}_2$$

otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che le matrici dell'esempio qui sopra sono le matrici complete dei sistemi dell'Esempio 59.

**Osservazione 84** Siano  $h, k \in \mathbb{R}$ , con  $h \neq 0$ . Una trasformazione

$$\mathbf{a}_i \rightarrow h\mathbf{a}_i + k\mathbf{a}_j$$

non è una trasformazione elementare, a meno che non sia  $k = 0$  oppure  $h = 1$ . Tuttavia possiamo ottenere tale trasformazione effettuando due trasformazioni elementari di seguito:

$$\mathbf{a}_i \rightarrow \mathbf{a}_i + \frac{k}{h}\mathbf{a}_j, \quad \mathbf{a}_i \rightarrow h\mathbf{a}_i.$$

## 64 Matrici a scalini

**Definizione 165** Sia  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  una matrice e sia  $\mathbf{a}_i$  una sua riga non nulla. Il primo termine non nullo di  $\mathbf{a}_i$  si dice pivot di  $\mathbf{a}_i$ . Più precisamente:

$$a_{ij} \text{ è il pivot di } \mathbf{a}_i \Leftrightarrow a_{ij} \neq 0 \text{ e } a_{ik} = 0 \forall k < j.$$

La matrice  $A$  si dice a scalini se valgono i seguenti due fatti:

- il pivot di ogni riga non nulla è più a sinistra dei pivot delle righe non nulle successive;
- le righe nulle sono tutte alla fine.

Queste due condizioni possono essere più precisamente espresse dicendo che valgono le seguenti implicazioni:

- $a_{ij}$  pivot di  $\mathbf{a}_i, a_{i'j'}$  pivot di  $\mathbf{a}_{i'}, i < i' \Rightarrow j < j'$
- $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{0}, \mathbf{a}_j = \mathbf{0} \Rightarrow i < j$ .

Il nome di “matrice a scalini” deriva dal fatto che gli zeri “utili” possono essere disposti sotto una figura “a scalini”, come possiamo vedere nei seguenti esempi:

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & -9 & \\ 0 & \boxed{-5} & 15 & \\ & & & \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & 5 & 3 \\ 0 & \boxed{-5} & -3 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{-46} & -46 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & -1 & -5 \\ 0 & \boxed{-5} & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{13} \end{pmatrix}.$$

La “scala” deve sempre partire in alto a sinistra e scendere terminando a destra; gli scalini devono essere “alti uno”. I pivot sono proprio gli elementi negli “angoletti degli scalini”, e devono essere per forza diversi da zero; mentre gli elementi sotto gli scalini devono essere tutti nulli. Tutti gli altri elementi possono essere sia nulli, sia non nulli.

**Esercizio 48** *La matrice*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*è a scalini?*

## 65 Procedimento di riduzione a scalini

Il seguente procedimento consente di passare da una matrice  $A$  qualsiasi ad una matrice a scalini, usando una sequenza di trasformazioni elementari. Naturalmente supponiamo che ci siano almeno due righe, perché una matrice con una sola riga è automaticamente già a scalini.

- Si individui una riga non nulla che abbia il pivot più a sinistra possibile (se tutte le righe sono nulle il procedimento termina).
- Se la riga trovata non è la prima, si effettui una trasformazione elementare di secondo tipo, scambiando la riga trovata con la prima riga (in questo modo la prima riga avrà il pivot più a sinistra possibile).
- Detto  $a_{1j}$  il pivot della prima riga, si scelgano due numeri  $h$  e  $k$ , con  $h \neq 0$ , tali che

$$\frac{k}{h} = \frac{a_{2j}}{a_{1j}}$$

(si può scegliere ad esempio  $h = a_{1j}$ , che è proprio il pivot della prima riga, e  $k = a_{2j}$ ; altre scelte potrebbero essere convenienti a seconda dei conti da fare). Quindi si effettui la trasformazione:

$$\underline{a}_2 \longrightarrow h\underline{a}_2 - k\underline{a}_1.$$

- Si ripeta il passaggio di sopra con la terza riga (se c'è) invece della seconda (quindi si scelgono ora  $h$  e  $k$  tali che  $\frac{k}{h} = \frac{a_{3j}}{a_{1j}}$  e si effettua la trasformazione  $\underline{a}_3 \longrightarrow h\underline{a}_3 - k\underline{a}_1$ ).
- Si proceda ancora allo stesso modo per tutte le righe successive (così facendo tutti gli elementi al di sotto del pivot  $a_{1j}$  diventano zero, e il pivot sarà più a sinistra dei pivot successivi, come richiesto per una matrice a scalini).
- Si ripeta tutto dall'inizio, applicandolo però solo alla matrice ottenuta "dimenticando" la prima riga (la prima riga rimarrà d'ora in poi sempre invariata): la nuova prima riga da considerare nel secondo ciclo sarà quindi quella che in effetti è la seconda riga della matrice  $A$ . Alla fine del secondo ciclo la seconda riga sarà messa da parte, e si ripeterà considerando solo le righe dalla terza in poi, e così via finché rimangono righe non nulle.

Non ci addenteremo nella dimostrazione che l'algoritmo ora esposto funziona, cioè che davvero applicando l'algoritmo ad una qualsiasi matrice si ottiene alla fine una matrice a scalini. In effetti, dalla descrizione appena fatta si intuisce abbastanza bene che l'algoritmo mira a disporre i pivot nell'ordine richiesto in una matrice a scalini (quelli più in basso, sono più a destra), l'unico dubbio serio è se, durante lo svolgimento dell'algoritmo, qualcuno degli zeri ottenuti in passi precedenti possa ridiventare non nullo. Ma questo non accade perché, ad ogni passo, l'azione che le trasformazioni vengono ad avere sulla parte di matrice già sistemata coinvolgono solo zeri, e dunque non può ricomparire nulla di diverso da zero.

**Esercizio 49** *Ridurre a scalini la matrice*

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -9 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -9 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{a}_2 \rightarrow 3\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -9 \\ 0 & -5 & 15 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 50** *Ridurre a scalini la matrice*

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & -6 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Soluzione:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & -6 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{a}_3 \rightarrow 2\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_1]{\mathbf{a}_2 \rightarrow \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_1} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{a}_2 \leftrightarrow \mathbf{a}_3} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 51** *Ridurre a scalini la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & -11 & 9 & -5 \\ -1 & -4 & 10 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & -11 & 9 & -5 \\ -1 & -4 & 10 & -5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{a}_4 \rightarrow \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_1]{\mathbf{a}_2 \rightarrow \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3 \rightarrow \mathbf{a}_3 - 2\mathbf{a}_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}
\mathbf{a}_2 \leftrightarrow \mathbf{a}_3 \\
\left( \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 7 & -1 & 1 \end{array} \right) \\
\mathbf{a}_4 \rightarrow \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_2 \\
\left( \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \end{array} \right) \\
\mathbf{a}_4 \rightarrow \mathbf{a}_4 + 2\mathbf{a}_3 \\
\left( \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right)
\end{array}$$

## 66 Metodo alternativo per il calcolo del rango

I seguenti due fatti (di cui omettiamo le dimostrazioni) forniscono un modo alternativo per calcolare il rango di una matrice.

**Proposizione 124** *Se una matrice  $B$  è ottenuta da  $A$  tramite una sequenza di trasformazioni elementari, allora  $A$  e  $B$  hanno lo stesso rango.*

**Proposizione 125** *Il rango di una matrice a scalini è uguale al numero di righe non nulle, e quindi al numero dei pivot.*

Dunque per calcolare il rango di una matrice qualunque, la si può ridurre a scalini e contare le righe non nulle ottenute.

## 67 Risoluzione di un sistema con matrice completa a scalini

Consideriamo un sistema lineare

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{array} \right.$$

Supponiamo che la matrice completa  $A$  di tale sistema sia a scalini. Il *procedimento di sostituzione a ritroso* per la risoluzione di tale sistema consiste nei seguenti passi.

- Sia  $\mathbf{a}_i$  l'ultima riga non nulla.
- Se  $\mathbf{a}_i$  ha il pivot all'ultimo posto (cioè ha tutti gli elementi nulli tranne l'ultimo), allora l'equazione  $e_i$  è del tipo

$$0x_1 + \cdots + 0x_n = b_i,$$

con  $b_i \neq 0$ ; dunque il sistema è incompatibile e il procedimento termina. In caso contrario si procede.

- Detto  $a_{ij}$  il pivot della riga  $\mathbf{a}_i$ , si assegnino valori arbitrari alle incognite  $x_{j+1}, \dots, x_n$  (cioè si scelgano a piacere dei valori  $s_{j+1}, \dots, s_n$ , che costituiranno le ultime componenti di una soluzione  $\mathbf{s}$ ) e si ricavi l'incognita  $x_j$  nell'equazione  $e_i$  (cioè si trovi quell'unico valore  $s_j$  tale che un qualsiasi vettore numerico  $\mathbf{s}$  che "termini" con  $(s_j, \dots, s_n)$  sia soluzione di  $e_i$ ).
- In tutte le equazioni precedenti l'equazione  $e_i$  si sostituiscano i valori  $(s_j, \dots, s_n)$  al posto delle incognite  $x_j, \dots, x_n$ , ottenendo così un sistema con un'equazione in meno, nelle incognite  $x_1, \dots, x_{j-1}$ .
- Si ripeta a partire dal terzo passo per il nuovo sistema ottenuto, finché non si sono assegnati tutti i valori  $s_1, \dots, s_n$ .

Se si preferisce, invece di sostituire ogni volta in *tutte* le equazioni precedenti, ci si può limitare a sostituire solo nell'equazione immediatamente precedente tutti i valori determinati fino a quel momento.

Le incognite a cui possiamo assegnare valori arbitrari (cioè quelle il cui coefficiente non è un pivot) vengono spesso chiamate *variabili libere*.

**Esempio 61** Risolviamo, con il procedimento di sostituzione a ritroso, il sistema lineare con la seguente matrice completa (a scalini):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'ultima riga non nulla è  $\mathbf{a}_2$ . Il suo pivot  $a_{23} = 2$  non è all'ultimo posto. Dunque il sistema è compatibile e possiamo andare avanti con le sostituzioni a ritroso. Il sistema è

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = -7 \\ \quad \quad \quad 2x_3 + 4x_4 = -10 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 0 = 0 \end{cases}$$

Nell'equazione  $e_2$  possiamo assegnare un valore arbitrario ad  $x_4$ . Lasciamo indeterminata la scelta, ponendo

$$x_4 = t.$$

Il valore di  $x_3$  si ricava da  $e_2$ :

$$x_3 = -5 - 2t.$$

Sostituiamo tali valori nelle equazioni precedenti. In questo caso abbiamo solo  $e_1$ , che diventa:

$$2x_1 - 3x_2 + (-5 - 2t) + 4t = -7,$$

quindi

$$2x_1 - 3x_2 = -2 - 2t.$$

Possiamo assegnare ad  $x_2$  un altro valore arbitrario, diciamolo  $s$ , e ricavare  $x_1$ :

$$x_1 = -1 + \frac{3}{2}s - t$$

Dunque l'insieme delle soluzioni è

$$\left\{ \left( -1 + \frac{3}{2}s - t, \quad s, \quad -5 - 2t, \quad t \right) : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ad esempio, fissando  $t = 0$  ed  $s = 0$  otteniamo la soluzione

$$(-1, 0, -5, 0);$$

se invece fissiamo  $t = 1$  ed  $s = 2$  otteniamo un'altra soluzione:

$$(1, 2, -7, 1).$$

In definitiva, il sistema ammette infinite soluzioni, che dipendono dalle infinite possibili scelte dei parametri  $t, s$ . Una maniera tradizionale di esprimere questo fatto è dire che ci sono “ $\infty^2$  soluzioni”. Un'affermazione più corretta (vedi Osservazione 82 a pag. 116) è che l'insieme delle soluzioni del sistema è in corrispondenza biettiva naturale con uno spazio di dimensione 2 (=  $4 - 2$ , e infatti le incognite sono 4 e il rango è 2).

## 68 Metodo di Gauss

Le cose sin qui dette ci consentono di risolvere qualsiasi sistema lineare. Infatti, la matrice completa di un qualsiasi sistema può essere ridotta a scalini tramite trasformazioni elementari. Poiché tali trasformazioni corrispondono a trasformazioni elementari sui sistemi, e poiché queste danno luogo a sistemi equivalenti, il sistema dato dalla matrice ridotta a scalini è equivalente al sistema iniziale. Dunque basta risolvere questo sistema col procedimento di sostituzione a ritroso. Questo metodo di risoluzione è detto *metodo di Gauss*.

Riassumendo, il metodo di Gauss per la risoluzione di un qualunque sistema lineare consiste nelle seguenti due fasi:

- Riduzione a scalini della matrice completa del sistema.
- Risoluzione tramite sostituzioni a ritroso del sistema corrispondente alla matrice a scalini ottenuta nella fase precedente.

Esiste una variante del metodo di Gauss, che prende il nome di *metodo di Gauss-Jordan*. Con questo metodo, una volta ridotta a scalini la matrice del sistema, invece di procedere con le sostituzioni, è possibile effettuare ulteriori semplificazioni, annullando anche gli elementi *al di sopra* dei pivot. Si ottiene un sistema risolvibile senza sostituzioni, semplicemente assegnando valori arbitrari alle variabili libere e ricavando da ciascuna equazione le incognite i cui coefficienti sono pivot.

Dovendo risolvere il sistema “a mano”, forse Gauss-Jordan riduce la probabilità di commettere errori. Tuttavia, dal punto di vista computazionale è un metodo “più costoso”.

**Esempio 62** *Risolvi il sistema lineare*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 11x_3 + 9x_4 = -5 \\ -x_1 - 4x_2 + 10x_3 - 5x_4 = 1 \end{cases} .$$

*Riduciamo a scalini la matrice completa:*

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & -11 & 9 & -5 \\ -1 & -4 & 10 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} a_2 \rightarrow a_2 - a_1 \\ a_3 \rightarrow a_3 - 2a_1 \\ a_4 \rightarrow a_4 + a_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{l} a_2 \leftrightarrow a_3 \\ a_4 \rightarrow a_4 + a_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{l} a_4 \rightarrow a_4 + 2a_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

*Risolvi a ritroso:*

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -5 \\ -x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{cases} x_1 + (-5) - 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 0 = 0 \rightarrow x_1 = -1 \\ 3x_2 - 5 \cdot (-2) + 0 = -5 \rightarrow x_2 = -5 \\ -x_3 + 0 = 2 \rightarrow x_3 = -2 \\ x_4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

*Dunque il sistema ha un'unica soluzione:  $(-1, -5, -2, 0)$ .*

**Esempio 63** *Risolvi col metodo di Gauss il sistema*

$$\begin{cases} 3x - y + z = -2 \\ 6x - 2y + 2z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} .$$

*La matrice completa è*

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Riduciamo a scalini:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} a_2 \rightarrow a_2 - 2a_1 \\ a_3 \rightarrow 3a_3 - a_1 \end{array} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} a_2 \leftrightarrow a_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Applichiamo ora il procedimento di sostituzione a ritroso.

- L'ultima riga non nulla è  $\mathbf{a}_3$ .
- In tale riga il pivot è all'ultimo posto. Dunque il sistema è incompatibile.

Nell'esempio di sopra, svolto applicando meccanicamente tutti i passi dei procedimenti, ci si poteva fermare prima. Infatti, dopo il primo ciclo della riduzione a scalini, è comparsa la riga  $(0, 0, 0, 4)$ : già a questo punto si poteva concludere che il sistema è incompatibile, dato che anche i sistemi corrispondenti alle matrici intermedie della riduzione sono equivalenti al sistema assegnato, e la presenza della riga in questione implica la presenza dell'equazione  $0 = 4$ , che non ha soluzioni.

Sebbene i procedimenti presentati siano perfettamente efficienti, con un po' di pratica e buon senso, in casi particolari si può pervenire alla soluzione anche più rapidamente.

**Esempio 64** Risolviamo col metodo di Gauss il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ 3x + 4z = 7 \end{cases}.$$

Riduciamo a scalini la matrice completa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} a_2 \rightarrow a_2 - 2a_1 \\ a_3 \rightarrow a_3 - 3a_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{l} a_3 \rightarrow a_3 - a_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sostituzioni a ritroso:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -3y + z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{3}t + \frac{2}{3} + t = 3 \longrightarrow x = -\frac{4}{3}t + \frac{7}{3} \\ -3y + z = -2 \longrightarrow z = t, y = \frac{1}{3}t + \frac{2}{3} \end{cases}$$

Quindi l'insieme di tutte le soluzioni è

$$\left\{ \left( -\frac{4}{3}t + \frac{7}{3}, \frac{1}{3}t + \frac{2}{3}, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

## 69 Calcolo di una base per lo spazio delle soluzioni di un sistema omogeneo

Ricordiamo che l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo, essendo il nucleo di un'applicazione lineare (l'applicazione di moltiplicazione per la matrice dei coefficienti), è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$ . Vediamo, con qualche esempio, come si trova facilmente una base per questo sottospazio.

**Esempio 65** Consideriamo il sistema omogeneo

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 3x + 4z = 0 \end{cases} .$$

Risolvendo col metodo di Gauss, si ha l'insieme delle soluzioni

$$\left\{ \left( -\frac{4}{3}t, \frac{1}{3}t, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\} .$$

Se notiamo che la generica soluzione

$$\left( -\frac{4}{3}t, \frac{1}{3}t, t \right)$$

può essere scritta

$$t \left( -\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 1 \right)$$

abbiamo subito che

$$\left( \left( -\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 1 \right) \right)$$

è una base per lo spazio delle soluzioni.

Il sistema ora considerato è in realtà il sistema omogeneo associato al sistema dell'Esempio 64, le cui soluzioni potevano essere scritte

$$\left( \frac{7}{3}, \frac{2}{3}, 0 \right) + t \left( -\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 1 \right) .$$

Dunque le soluzioni del nostro sistema omogeneo potevano essere ottenute tenendo presente l'Osservazione 82 a pag. 116.

**Esempio 66** Consideriamo ora il sistema omogeneo associato al sistema dell'Esempio 61:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Poiché le soluzioni dell'Esempio 61 potevano essere scritte

$$\left( -1, 0, -5, 0 \right) + t \left( -1, 0, -2, 1 \right) + s \left( \frac{3}{2}, 1, 0, 0 \right) ,$$

le soluzioni del presente sistema omogeneo sono tutte quelle del tipo

$$t(-1, 0, -2, 1) + s\left(\frac{3}{2}, 1, 0, 0\right),$$

Quindi il sistema

$$\left( (-1, 0, -2, 1) \quad , \quad \left(\frac{3}{2}, 1, 0, 0\right) \right)$$

è di generatori per lo spazio delle soluzioni.

Notiamo poi che se una soluzione del tipo

$$\left(\frac{3}{2}s - t, s, -2t, t\right)$$

è nulla, allora  $t$  ed  $s$  (che sono la quarta e la seconda componente) devono essere nulli. Questo prova che il sistema è indipendente. Dunque una base per lo spazio delle soluzioni è

$$\left( (-1, 0, -2, 1) \quad , \quad \left(\frac{3}{2}, 1, 0, 0\right) \right)$$

Il metodo ora esposto è utile per trovare le basi di sottospazi vettoriali definiti come nell'Esempio 29 a pag. 73, o per trovare basi del nucleo di qualche omomorfismo, o per trovare basi di autovettori. Tutti questi sono tipici problemi d'esame.

## 70 Metodo alternativo per la risoluzione dei sistemi lineari

Il contenuto di questo paragrafo è semi-facoltativo da 5 punti.

Ragionando come per la Proposizione 123 (pag. 119) si dimostra facilmente il seguente fatto.

**Proposizione 126** *Siano  $S$  ed  $S'$  sistemi lineari in  $n$  incognite. Supponiamo che ogni equazione di  $S$  si possa ottenere come combinazione lineare delle equazioni di  $S'$ , e anche che ogni equazione di  $S'$  si possa ottenere come combinazione lineare delle equazioni di  $S$ . Allora i due sistemi sono equivalenti.*

Vediamo ora, con un esempio, un modo alternativo per risolvere i sistemi lineari. Consideriamo l'ultimo sistema del Paragrafo 68.

**Esempio 67** *Risolvi il sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ 3x + 4z = 7 \end{cases} .$$

Calcoliamo il rango delle due matrici. La matrice completa è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Il minore

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

(di entrambe le matrici) è non nullo. L'unico orlato di questo minore nella matrice dei coefficienti è

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

ed è nullo. Dunque la matrice dei coefficienti ha rango 2.

Nella matrice completa (oltre al precedente), c'è anche l'orlato

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Poiché anche questo è nullo, e poiché non ci sono altri orlati, anche il rango della matrice completa è 2. Per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema ammette qualche soluzione.

Per il teorema degli orlati, poiché il minore fondamentale coinvolge le prime due righe, la terza riga dipende dalle prime due. Dunque la terza equazione dipende dalle prime due. La Proposizione 126 assicura quindi che il nostro sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = 4 \end{cases}.$$

Assegnando un valore arbitrario a  $z$  (ponendo quindi  $z = t$ ) possiamo ricavare  $x$  e  $y$  come soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + y = 3 - t \\ 2x - y = 4 - 3t \end{cases}.$$

Siccome il determinante della matrice dei coefficienti di questo nuovo sistema è proprio il minore fondamentale trovato in precedenza (quindi è non nullo), possiamo usare la regola di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-t & 1 \\ 4-3t & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-t \\ 2 & 4-3t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}$$

Svolgendo i calcoli, le soluzioni sono date da

$$\left\{ \left( -\frac{4}{3}t + \frac{7}{3}, \frac{1}{3}t + \frac{2}{3}, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

In sintesi, il metodo alternativo funziona così:

- si calcolano i due ranghi tramite il teorema degli orlati;
- se i ranghi sono diversi il sistema è incompatibile;
- se i ranghi sono uguali, si considera il sistema ottenuto prendendo solo le equazioni individuate dal minore fondamentale trovato e assegnando valori arbitrari alle incognite escluse dal minore fondamentale, e si applica la regola di Cramer.

Questo metodo, sebbene risulti utile in certe situazioni, generalmente comporta molti più calcoli rispetto al metodo di Gauss, il quale quindi va quasi sempre preferito.

## 71 Spazi affini

**Definizione 166** *Uno spazio affine è una terna  $(X, V, \bullet)$  tale che  $X$  sia un insieme,  $V$  uno spazio vettoriale, e  $\bullet : V \times X \rightarrow X$  un'operazione esterna su  $X$  con operatori in  $V$  tale che, denotando con  $P + \mathbf{v}$  il corrispondente tramite  $\bullet$  di una qualunque coppia  $(\mathbf{v}, P) \in V \times X$  (e continuando a denotare con  $+$  anche l'addizione in  $V$ ), si abbia*

1. per ogni  $P, P' \in X$  esiste un unico  $\mathbf{v} \in V$  tale che

$$P' = P + \mathbf{v};$$

2. per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  e per ogni  $P \in X$  si ha

$$P + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (P + \mathbf{v}) + \mathbf{w}.$$

*Se  $P, P' \in X$ , l'unico  $\mathbf{v} \in V$  tale che  $P' = P + \mathbf{v}$  viene denotato con  $P' - P$ . Gli elementi di  $X$  vengono spesso detti punti. Se  $V$  è finitamente generato, la dimensione di  $V$  viene anche detta dimensione di  $X$ .*

*Se  $P \in X$  e  $W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ , l'insieme*

$$P + W \stackrel{\text{def}}{=} \{P + \mathbf{w} : \mathbf{w} \in W\}$$

*si dice sottospazio affine di  $X$ . Se  $W$  è finitamente generato, la dimensione di  $W$  viene anche detta dimensione di  $P + W$ .*

*Uno spazio affine euclideo è una 4-upla  $(X, V, \bullet, s)$  tale che  $(X, V, \bullet)$  sia uno spazio affine e  $(V, s)$  sia uno spazio vettoriale euclideo.*

Per semplicità di linguaggio, se  $(X, V, \bullet)$  è uno spazio affine, si dice semplicemente che “ $X$  è uno spazio affine”.

**Osservazione 85** Se  $V$  è uno spazio vettoriale, allora  $(V, V, +)$  (dove  $+$  è l'addizione in  $V$ ) è uno spazio affine. Dunque ogni spazio vettoriale è in maniera ovvia anche uno spazio affine. In particolare,  $\mathbb{R}^n$  è anche uno spazio affine.

Notiamo inoltre che l'Osservazione 82 a pag. 116 ci dice che l'insieme delle soluzioni di un sistema in  $n$  incognite che abbia tutte e due le matrici di rango  $r$ , è un sottospazio affine di dimensione  $n - r$  dello spazio affine  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposizione 127** Sia  $S$  lo spazio ordinario, sia  $\mathcal{V}$  lo spazio dei vettori liberi, sia  $\bullet$  data dalla definizione 67 a pag. 38 e sia  $s$  il prodotto scalare geometrico (cfr. Definizione 154 a pag. 109). Allora  $(S, \mathcal{V}, \bullet, s)$  è uno spazio affine euclideo di dimensione tre. I sottospazi di dimensione uno sono le rette e i sottospazi di dimensione due sono i piani.

*Dimostrazione.* (semi-facoltativa da 3 punti)

Il fatto che  $(S, \mathcal{V}, \bullet, s)$  sia uno spazio affine euclideo di dimensione tre si deduce subito dalla Proposizione 29 (pag. 38), dalla Definizione 68 (pag. 40), dall'Esempio 22 (pag. 63), dalla Proposizione 77 (pag. 74) e dall'Esempio 57 (pag. 109).

Il fatto che ogni retta sia un sottospazio di dimensione uno e ogni piano sia un sottospazio di dimensione due si deduce subito dall'Osservazione 43 (pag. 73) e dalle Proposizioni 75 (pag. 74) e 76 (pag. 74).

Se, viceversa,  $P + \mathcal{W}$  è un sottospazio affine di dimensione uno, sia  $(\mathbf{u})$  una base di  $\mathcal{W}$ . Siccome il vettore  $\mathbf{u}$  è non nullo, esiste un'unica retta  $r$  passante per  $P$  e parallela ad  $\mathbf{u}$  (che poi è la retta passante per i due punti distinti  $P$  e  $P + \mathbf{u}$ ). Dunque i vettori paralleli ad  $r$  sono esattamente i vettori di  $\mathcal{W}$ , e quindi (sempre per l'Osservazione 43 a pag. 73)  $r$  coincide con  $P + \mathcal{W}$ . Questo prova che ogni sottospazio affine di dimensione uno è una retta.

Se infine  $P + \mathcal{W}$  è un sottospazio affine di dimensione due, sia  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  una base di  $\mathcal{W}$ . Poiché  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  sono indipendenti non possono essere paralleli, dunque i tre punti  $P$ ,  $P + \mathbf{u}$  e  $P + \mathbf{v}$  non sono allineati. Esiste allora un'unico piano  $\pi$  che contiene tali punti. Lo spazio dei vettori paralleli a  $\pi$  contiene  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  e ha dimensione due (per la Proposizione 76 a pag. 74). Dunque lo spazio dei vettori paralleli a  $\pi$  è  $\mathcal{W}$ , e quindi (sempre per l'Osservazione 43 a pag. 73)  $\pi$  coincide con  $P + \mathcal{W}$ . Questo prova che ogni sottospazio affine di dimensione due è un piano.

□

La proposizione ora dimostrata costituisce il moderno punto di partenza per la geometria dello spazio ordinario. Tutti gli assiomi della geometria elementare, e quindi tutta la geometria elementare, possono essere ricostruiti sulla sola base della definizione di "spazio affine euclideo di dimensione tre". Inoltre il campo di applicabilità dei teoremi dimostrati su questa base è estremamente vasto, in quanto le strutture coinvolte (spazi vettoriali, prodotti scalari, ecc.) si riscontrano in moltissime situazioni diverse, tanto nella matematica pura quanto nella realtà fisica.

A riprova dell'efficacia di questi metodi, vedremo nei prossimi paragrafi come si possano rapidamente ottenere i risultati principali della geometria analitica.

Solo per chi è particolarmente curioso, facciamo anche vedere qui di seguito come un teorema di geometria elementare possa essere dimostrato in maniera immediata e generale.

**Proposizione 128** (facoltativa). Siano  $P_1, \dots, P_n$  punti di uno spazio affine e siano  $h_1, \dots, h_n$  numeri reali tali che

$$h_1 + \dots + h_n = 1 .$$

Se  $O$  e  $O'$  sono punti qualunque, allora si ha

$$O + h_1(P_1 - O) + \dots + h_n(P_n - O) = O' + h_1(P_1 - O') + \dots + h_n(P_n - O') .$$

*Dimostrazione.* (facoltativa). Si ha

$$\begin{aligned} O + h_1(P_1 - O) + \dots + h_n(P_n - O) &= \\ &= O + h_1((P_1 - O') + (O' - O)) + \dots + h_n((P_n - O') + (O' - O)) = \\ &= O + (h_1 + \dots + h_n)(O' - O) + h_1(P_1 - O') + \dots + h_n(P_n - O') = \\ &= O + (O' - O) + h_1(P_1 - O') + \dots + h_n(P_n - O') = \\ &= O' + h_1(P_1 - O') + \dots + h_n(P_n - O') . \end{aligned}$$

□

**Definizione 167** (facoltativa). Siano  $P_1, \dots, P_n$  punti di uno spazio affine e siano  $h_1, \dots, h_n$  numeri reali tali che

$$h_1 + \dots + h_n = 1 .$$

Il punto

$$O + h_1(P_1 - O) + \dots + h_n(P_n - O) ,$$

dove  $O$  è un punto qualunque (cfr. la proposizione di sopra) viene detto *media pesata* di  $P_1, \dots, P_n$  tramite i pesi  $h_1, \dots, h_n$ , e viene indicato con

$$h_1P_1 + \dots + h_nP_n .$$

**Definizione 168** (facoltativa). Se  $A, B$  sono punti di uno spazio affine, la *media pesata*

$$M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B .$$

si dice *punto medio* tra  $A$  e  $B$ .

Facciamo vedere che questa nozione di punto medio effettivamente coincide con la nozione elementare.

**Proposizione 129** (facoltativa). Siano  $A$  e  $B$  punti dello spazio ordinario, e sia

$$M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B .$$

Allora  $A, B$  ed  $M$  sono allineati, e si ha  $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$ .

*Dimostrazione.* (facoltativa). Per definizione, si ha

$$M = M + \frac{1}{2}(A - M) + \frac{1}{2}(B - M),$$

da cui

$$B - M = M - A.$$

Quindi i segmenti  $AM$  ed  $MB$  sono equipollenti; in particolare sono paralleli e congruenti. Avendo un punto in comune, il fatto che  $AM$  ed  $MB$  siano paralleli, implica che sono contenuti in una stessa retta. Il fatto che  $AM$  ed  $MB$  siano congruenti, significa direttamente che  $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$ .  $\square$

**Osservazione 86** (facoltativa). Siano  $A$  e  $B$  punti distinti di uno spazio affine. Allora  $A + \langle (B - A) \rangle$  è l'unico sottospazio di dimensione uno che contiene  $A$  e  $B$ .

**Notazione 11** (facoltativa). Siano  $A$  e  $B$  punti distinti di uno spazio affine. L'unico sottospazio di dimensione uno che contiene  $A$  e  $B$  sarà denotato con  $r_{AB}$ .

Nel caso dello spazio ordinario, tale notazione è coerente con la Notazione 8 (pag. 16).

**Proposizione 130** (facoltativa). Siano  $A, B, C$  punti di uno spazio affine non contenuti in una stessa retta e siano  $M, N, K$  rispettivamente i punti medi tra  $A$  e  $B$ , tra  $B$  e  $C$  e tra  $A$  e  $C$ . Allora la media pesata

$$\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$$

appartiene a tutti e tre i sottospazi  $r_{AN}, r_{BK}, r_{CM}$ .

*Dimostrazione.* (facoltativa). Il fatto che i punti non siano contenuti in una stessa retta implica che effettivamente  $A \neq N$ ,  $B \neq K$  e  $C \neq M$  (quindi  $r_{AN}, r_{BK}, r_{CM}$  sono ben definiti).

Si ha

$$\begin{aligned} A + \frac{2}{3}(N - A) &= A + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(B - A) + \frac{1}{2}(C - A)\right) = \\ &= A + \frac{1}{3}(B - A) + \frac{1}{3}(C - A) = A + \frac{1}{3}(A - A) + \frac{1}{3}(B - A) + \frac{1}{3}(C - A) = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C \end{aligned}$$

Quindi il punto  $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$  appartiene ad  $A + \langle (N - A) \rangle = r_{AN}$ . L'appartenenza agli altri due sottospazi si prova allo stesso modo.  $\square$

Nel caso dello spazio ordinario, la proposizione di sopra prova che le tre mediane di un triangolo si incontrano in un punto.

## 72 Riferimenti

Da qui fino alla fine di questi appunti ci occuperemo della geometria analitica dello spazio ordinario. L'impostazione usata è valida per qualunque spazio affine euclideo di dimensione tre. Molte delle definizioni e dei risultati trattati valgono addirittura per qualunque spazio affine.

**Definizione 169** Sia  $X = P + W$  un sottospazio affine di uno spazio affine. Allora  $W$  viene detto spazio direttore di  $X$ . In particolare, se  $X$  è una retta o un piano, lo spazio direttore di  $X$  è l'insieme dei vettori paralleli ad  $X$ .

**Definizione 170** Sia  $r$  una retta. Un riferimento (cartesiano) su  $r$  è una coppia  $(O, (\mathbf{i}))$ , dove  $O$  è un punto di  $r$ , detto origine, e  $(\mathbf{i})$  è un riferimento vettoriale (cioè una base) dello spazio direttore di  $r$ . Se  $P$  è un qualunque punto di  $r$ , si dice ascissa di  $P$  rispetto al riferimento  $(O, (\mathbf{i}))$  la componente del vettore  $P - O$  rispetto alla base  $(\mathbf{i})$ .

Per definizione di componente, si ha

$$x \text{ ascissa di } P \iff P - O = x\mathbf{i}.$$

**Osservazione 87** Per fissare un riferimento vettoriale dello spazio direttore di una retta, basta scegliere un vettore  $\mathbf{i}$  non nullo parallelo alla retta. Una volta fissato un riferimento  $(O, (\mathbf{i}))$  su una retta, spesso conviene assumere come unità di misura per i segmenti la lunghezza dei rappresentanti di  $\mathbf{i}$ . Con questa scelta dell'unità di misura, si ha

$$|\mathbf{i}| = 1,$$

quindi  $\mathbf{i}$  è un versore. Dunque spesso  $\mathbf{i}$  viene detto versore del riferimento.

**Definizione 171** Sia  $\pi$  un piano. Un riferimento (cartesiano) su  $\pi$  è una coppia  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ , dove  $O$  è un punto di  $\pi$ , detto origine, e  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  è un riferimento vettoriale dello spazio direttore di  $\pi$ . Se  $P$  è un qualunque punto di  $\pi$ , le componenti  $(x, y)$  del vettore  $P - O$  rispetto alla base  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  vengono dette coordinate di  $P$  rispetto al riferimento  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ . La coordinata  $x$  viene detta ascissa e  $y$  ordinata. L'unica retta contenente  $O$  e parallela ad  $\mathbf{i}$  viene detta asse delle ascisse (o asse  $x$ ) del riferimento. L'unica retta contenente  $O$  e parallela a  $\mathbf{j}$  viene detta asse delle ordinate (o asse  $y$ ) del riferimento. Tali rette sono spesso considerate come rette orientate, fissando i versi concordi rispettivamente ad  $\mathbf{i}$  e a  $\mathbf{j}$ . Se i vettori  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  sono rappresentati da segmenti congruenti, il riferimento viene detto monometrico. Se i vettori  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  sono ortogonali, allora il riferimento viene detto ortogonale.

Per definizione di componenti si ha

$$(x, y) \text{ coordinate di } P \iff P - O = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

**Osservazione 88** Per fissare un riferimento vettoriale dello spazio direttore di un piano, basta scegliere due vettori  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  paralleli al piano, non nulli e non paralleli tra loro. Se il riferimento  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$  è monometrico, spesso conviene assumere come unità di misura la lunghezza dei rappresentanti di  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$ . Con questa scelta dell'unità di misura, i vettori  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  sono dunque versori, detti versori degli assi.

**Definizione 172** Un riferimento (cartesiano) dello spazio è definito come una coppia  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ , dove  $O$  è un punto, detto origine, e  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  è un riferimento vettoriale dello spazio dei vettori liberi. Se  $P$  è un qualunque punto di  $\pi$ , le componenti  $(x, y, z)$  del vettore  $P - O$  rispetto alla base  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  vengono dette coordinate di  $P$  rispetto al riferimento  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ . In particolare  $x$  viene detta ascissa,  $y$  ordinata e  $z$  quota. L'unica retta contenente  $O$  e parallela ad  $\mathbf{i}$  viene detta asse delle ascisse (o asse  $x$ ) del riferimento. L'unica retta contenente  $O$  e parallela a  $\mathbf{j}$  viene detta asse delle ordinate (o asse  $y$ ) del riferimento. L'unica retta contenente  $O$  e parallela a  $\mathbf{k}$  viene detta asse delle quote (o asse  $z$ ) del riferimento. Tali rette sono spesso considerate come rette orientate, fissando i versi concordi rispettivamente ad  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$ . Se i vettori  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  sono rappresentati da segmenti congruenti, il riferimento viene detto monometrico. Se i vettori  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  sono a due a due ortogonali, allora il riferimento viene detto ortogonale.

**Osservazione 89** Per fissare un riferimento vettoriale dello spazio dei vettori liberi, basta scegliere tre vettori  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  non nulli e non paralleli ad uno stesso piano. Se il riferimento  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$  è monometrico, spesso conviene assumere come unità di misura la lunghezza dei rappresentanti di  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$ . Con questa scelta dell'unità di misura, i vettori  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  sono dunque versori, detti versori degli assi.

Le definizioni ora date potevano ben essere sintetizzate nella definizione di riferimento di un qualunque spazio affine: esso è una coppia  $(O, \mathcal{B})$ , dove  $O$  è un punto e  $\mathcal{B}$  è un riferimento vettoriale.

**Proposizione 131** Sia  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$  un riferimento dello spazio, sia  $P$  un punto di coordinate  $(x, y, z)$  e sia  $\mathbf{v}$  un vettore di componenti  $(l, m, n)$  (rispetto al riferimento vettoriale  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ). Allora le coordinate del punto  $P + \mathbf{v}$  sono

$$(x + l, y + m, z + n).$$

*Dimostrazione.* Poniamo  $Q = P + \mathbf{v}$ , così che  $Q - P = \mathbf{v}$ . Dunque

$$Q - O = (P - O) + (Q - P) = (P - O) + \mathbf{v}.$$

Siccome le componenti di  $P - O$  sono  $(x, y, z)$  e le componenti di  $\mathbf{v}$  sono  $(l, m, n)$  le componenti di  $Q - O$  sono  $(x + l, y + m, z + n)$ . Quindi le coordinate di  $Q = P + \mathbf{v}$  sono  $(x + l, y + m, z + n)$ , come volevamo dimostrare.  $\square$

**Esercizio 52** Sia  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$  un riferimento dello spazio e siano  $P, P'$  punti di coordinate rispettivamente  $(x, y, z)$  e  $(x', y', z')$ . Dimostrare che le componenti del vettore  $P' - P$  sono

$$(x' - x, y' - y, z' - z).$$

## 73 Cambio di riferimento

**Proposizione 132** *Siano  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$  e  $(O', (\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'))$  riferimenti dello spazio, sia  $P$  un qualunque punto, sia  $X$  la terna delle coordinate di  $P$  rispetto al primo riferimento e  $X'$  quella rispetto al secondo. Allora si ha*

$$X' = BX + C$$

dove  $B$  è la matrice del cambio di base da  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  a  $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ , e  $C$  è la terna di coordinate di  $O$  rispetto ad  $(O', (\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'))$ .

*Dimostrazione.* Per definizione di coordinate,  $X$  è la terna delle componenti di  $P - O$  rispetto a  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  e  $X'$  è la terna delle componenti di  $P - O'$  rispetto a  $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ . Per l'Osservazione 56 (pag. 93),  $BX$  è la terna delle componenti di  $P - O$  rispetto a  $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ . Siccome

$$P = O + (P - O),$$

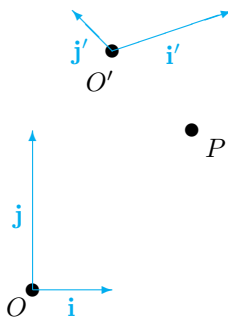
la Proposizione 131 (applicata al riferimento  $(O', (\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'))$ ) prova che

$$X' = C + BX,$$

come volevamo.  $\square$

Naturalmente, un risultato del tutto simile vale per i riferimenti nel piano. Vediamo un esempio concreto.

**Esempio 68** *Consideriamo i seguenti riferimenti e il seguente punto  $P$  del piano del foglio.*



Le componenti di  $\mathbf{i}$  rispetto ad  $(\mathbf{i}', \mathbf{j}')$  sono  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ . Le componenti di  $\mathbf{j}$  rispetto ad  $(\mathbf{i}', \mathbf{j}')$  sono  $(1, 3)$ . Quindi la matrice del cambio da  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  a  $(\mathbf{i}', \mathbf{j}')$  è la matrice che ha per colonne tali coppie:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Le coordinate di  $O$  rispetto ad  $(O', (\mathbf{i}', \mathbf{j}'))$  sono  $(-2, -4)$ . Dunque la formula che ci dà le coordinate  $X' = (x', y')$  di un qualunque punto nel riferimento  $(O', (\mathbf{i}', \mathbf{j}'))$  a partire dalle coordinate  $X = (x, y)$  nel riferimento  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$  è:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Scritte per esteso:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + y - 2 \\ y' = -\frac{1}{2}x + 3y - 4 \end{cases}.$$

A titolo di verifica, se misuriamo le coordinate del punto  $P$ , abbiamo  $(x, y) = (2, 1)$  e  $(x', y') = (0, -2)$ . Sono dunque in accordo con la formula data.

## 74 Rappresentazione parametrica di una retta nello spazio

**Definizione 173** Sia  $r$  una retta. Un vettore direzionale di  $r$  è un vettore non nullo parallelo ad  $r$ . Fissato un riferimento  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$  dello spazio, le componenti  $(l, m, n)$  di un vettore direzionale di  $r$  vengono dette numeri direttori (o parametri direttori) di  $r$ , rispetto al riferimento  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ .

**Definizione 174** Diremo che due vettori numerici  $(x_1, \dots, x_n)$  ed  $(y_1, \dots, y_n)$  sono proporzionali se esiste un numero reale  $h$  tale che

$$(x_1, \dots, x_n) = h(y_1, \dots, y_n)$$

(o viceversa). A volte si dice anche che  $(x_1, \dots, x_n)$  è multiplo di  $(y_1, \dots, y_n)$ .

**Osservazione 90** Una terna di numeri direttori non può mai essere  $(0, 0, 0)$ , perché i vettori direzionali sono non nulli. Poiché i vettori non nulli paralleli ad  $r$  sono tutti multipli l'uno dell'altro, ogni retta ha infinite terne di numeri direttori (rispetto ad un fissato riferimento), tutte proporzionali tra loro. Questo fatto può anche essere espresso dicendo che una terna di numeri direttori (rispetto ad un fissato riferimento) è definita a meno di un fattore non nullo di proporzionalità.

**Proposizione 133** Sia  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$  un riferimento dello spazio, sia  $P_0$  un punto di coordinate  $(x_0, y_0, z_0)$ , sia  $\mathbf{v}$  un vettore non nullo di componenti  $(l, m, n)$  e sia  $r$  la retta contenente  $P_0$  e parallela a  $\mathbf{v}$ . Se  $P$  è un qualunque punto dello spazio e  $(x, y, z)$  sono le sue coordinate, si ha

$$P \in r \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Si ha

$$P \in r \stackrel{Oss. 43}{\iff} P - P_0 \text{ è parallelo a } \mathbf{v} \iff \exists t \in \mathbb{R} : P - P_0 = t\mathbf{v}.$$

Siccome

$$P - P_0 = t\mathbf{v} \iff P = P_0 + t\mathbf{v} \stackrel{Prop. 131}{\iff} (x, y, z) = (x_0 + tl, y_0 + tm, z_0 + tn)$$

concludiamo

$$P \in r \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

come volevamo dimostrare.

**Definizione 175** Nella situazione della proposizione ora dimostrata, l'affermazione

$$P \in r \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

viene sinteticamente espressa dicendo che

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

sono le equazioni parametriche (o una rappresentazione parametrica) della retta  $r$  rispetto al riferimento  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ , con parametro  $t$ .

**Esempio 69** Fissato un riferimento  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$  dello spazio, sia  $P_0$  il punto di coordinate  $(1, 2, 3)$  e  $\mathbf{v}$  il vettore di componenti  $(4, 5, 6)$ . Allora la retta passante per  $P_0$  e parallela a  $\mathbf{v}$  ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 + 6t \end{cases} .$$

Dunque i suoi punti si ottengono tutti assegnando a  $t$  tutti i possibili valori reali (ad esempio, per  $t = 0$  si ottiene  $P_0$ , per  $t = 1$  si ottiene il punto di coordinate  $(5, 7, 9)$ , per  $t = -2$  si ottiene il punto di coordinate  $(-7, -8, -9)$ , ecc.).

**Osservazione 91** Fissato un riferimento  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$  dello spazio, ogni retta  $r$  può sempre essere rappresentata con delle equazioni parametriche: se  $(x_0, y_0, z_0)$  sono le coordinate di un punto di  $r$  ed  $(l, m, n)$  sono i numeri direttori di  $r$ , le equazioni parametriche di  $r$  si scrivono subito:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

**Osservazione 92** Se  $x_0, y_0, z_0, l, m, n$  sono numeri reali, con  $l, m, n$  non tutti nulli, allora scrivendo

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

si ottiene sempre una rappresentazione parametrica di qualche retta: di quella passante per il punto di coordinate  $(x_0, y_0, z_0)$  e parallela al vettore di componenti  $(l, m, n)$ .

## 75 Rappresentazione parametrica di un piano

**Proposizione 134** Sia  $P_0$  un punto dello spazio e siano  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  due vettori non paralleli tra loro (in particolare, sono quindi non nulli). Allora esiste un unico piano  $\pi$  passante per  $P_0$  e parallelo ai due vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , e si ha

$$P \in \pi \iff \exists t, s \in \mathbb{R} : P = P_0 + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}.$$

*Dimostrazione.* (semi-facoltativa da 4 punti).

Siccome i due vettori non sono paralleli, il sistema  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  è linearmente indipendente. Quindi il sottospazio generato  $\mathcal{W} = \langle (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rangle$  ha dimensione due. Per la Proposizione 127, il sottospazio affine

$$\pi \stackrel{\text{def}}{=} P_0 + \mathcal{W}$$

è un piano (che poi è l'unico piano che passa per i punti  $P_0, P_0 + \mathbf{u}$  e  $P_0 + \mathbf{v}$ ). Per l'Osservazione 43 a pag. 73,  $\pi$  è parallelo ai due vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , e contiene ovviamente  $P_0$ , come si voleva.

Per dimostrare l'unicità si può usare l'Assioma 10 a pag. 17, o ragionare in modo "più affine" come segue. Supponiamo che  $\pi'$  sia un piano passante per  $P_0$  e parallelo ai due vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  e consideriamo il suo spazio direttore  $\mathcal{W}'$ . Dunque i vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  appartengono a  $\mathcal{W}'$ . Poiché  $\mathcal{W}'$  ha dimensione 2 (per l'Esercizio 76 a pag. 74), e poiché  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  sono indipendenti, applicando l'Esercizio 46 a pag. 98, otteniamo che  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  è una base di  $\mathcal{W}'$ . Quindi  $\mathcal{W}' = \mathcal{W}$ . Siccome per l'Osservazione 43 a pag. 73 si ha  $\pi' = P_0 + \mathcal{W}'$ , deduciamo che  $\pi' = \pi$ .

Infine notiamo che

$$P \in \pi \iff \exists \mathbf{w} \in \mathcal{W} : P = P_0 + \mathbf{w} ;$$

e che inoltre, siccome  $\mathcal{W}$  è il sottospazio generato da  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , si ha

$$\mathbf{w} \in \mathcal{W} \iff \exists t, s \in \mathbb{R} : \mathbf{w} = t\mathbf{u} + s\mathbf{v}.$$

Quindi si ha

$$P \in \pi \iff \exists t, s \in \mathbb{R} : P = P_0 + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} ,$$

come volevamo.

□

**Proposizione 135** Sia  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$  un riferimento dello spazio, sia  $P_0$  un punto di coordinate  $(x_0, y_0, z_0)$ , siano  $\mathbf{u}, \mathbf{u}'$  due vettori non paralleli e siano  $(l, m, n)$ ,  $(l', m', n')$  rispettivamente le loro componenti. Detto  $\pi$  l'unico piano passante per  $P_0$  e parallelo ai due vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{u}'$  e se  $P$  è un punto di coordinate  $(x, y, z)$ , si ha

$$P \in \pi \iff \exists t, t' \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + lt + l't' \\ y = y_0 + mt + m't' \\ z = z_0 + nt + n't' \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Si ha

$$P \in \pi \stackrel{Prop. 134}{\iff} \exists t, t' \in \mathbb{R} : P = P_0 + t\mathbf{u} + t'\mathbf{u}' \stackrel{Prop. 131}{\iff} \exists t, t' \in \mathbb{R} : (x, y, z) = (x_0 + lt + l't', y_0 + mt + m't', z_0 + nt + n't').$$

Concludiamo che

$$P \in \pi \iff \exists t, t' \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + lt + l't' \\ y = y_0 + mt + m't' \\ z = z_0 + nt + n't' \end{cases} .$$

□

**Definizione 176** Nella situazione della proposizione ora dimostrata, l'affermazione

$$P \in r \iff \exists t, t' \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + lt + l't' \\ y = y_0 + mt + m't' \\ z = z_0 + nt + n't' \end{cases}$$

viene sinteticamente espressa dicendo che

$$\begin{cases} x = x_0 + lt + l't' \\ y = y_0 + mt + m't' \\ z = z_0 + nt + n't' \end{cases}$$

sono le equazioni parametriche (o una rappresentazione parametrica) del piano  $\pi$  rispetto al riferimento  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ , con parametri  $t, t'$ .

Naturalmente, al posto di  $t, t'$  possono essere usate anche altre lettere.

**Osservazione 93** Fissato un riferimento  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$  dello spazio, ogni piano  $\pi$  può essere rappresentato con delle equazioni parametriche: basta scegliere un punto  $P_0 \in \pi$  e una base dello spazio direttore di  $\pi$ , cioè due vettori paralleli a  $\pi$ , non paralleli tra loro.

**Esempio 70** Fissiamo nello spazio un riferimento, e consideriamo il punto  $P_0$  di coordinate  $(4, 6, 8)$  e i vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ , rispettivamente di componenti  $(1, 2, 3)$  e  $(-1, 0, 4)$ . Poiché le terne  $(1, 2, 3)$  e  $(-1, 0, 4)$  non sono proporzionali, i vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  non sono paralleli. Quindi esiste un unico piano  $\pi$  contenente il punto  $P_0$  e parallelo ai vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ . Le equazioni parametriche di  $\pi$  si scrivono subito:

$$\begin{cases} x = 4 + t - s \\ y = 6 + 2t \\ z = 8 + 3t + 4s \end{cases}$$

(con parametri  $t, s$ ).

**Osservazione 94** Abbiamo visto che ogni piano può essere rappresentato con equazioni parametriche. Viceversa, se  $x_0, y_0, z_0, l, m, n, l', m', n'$  sono numeri reali tali che le terne  $(l, m, n)$  e  $(l', m', n')$  non siano proporzionali, allora scrivendo

$$\begin{cases} x = x_0 + lt + l't' \\ y = y_0 + mt + m't' \\ z = z_0 + nt + n't' \end{cases},$$

otteniamo sicuramente le equazioni parametriche di qualche piano: di quello passante per il punto di coordinate  $(x_0, y_0, z_0)$  e parallelo ai vettori di componenti rispettivamente  $(l, m, n)$  ed  $(l', m', n')$ .

## 76 Equazione cartesiana di un piano

**Proposizione 136** Sia  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$  un riferimento dello spazio e sia  $\pi$  un piano. Allora esistono  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tali che, se  $P$  è un qualunque punto dello spazio e  $(x, y, z)$  sono le sue coordinate, si ha

$$P \in \pi \iff ax + by + cz + d = 0.$$

Inoltre  $a, b, c$  non possono essere tutti nulli.

*Dimostrazione.* (semi-facoltativa da 4 punti).

Sia  $P_0$  un punto di  $\pi$  e sia  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  una base dello spazio direttore di  $\pi$ . Siano  $(l, m, n)$  e  $(l', m', n')$  le componenti rispettivamente di  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , e siano  $(x_0, y_0, z_0)$  le coordinate di  $P_0$ .

Per l'Osservazione 43 a pag. 73,  $P$  appartiene a  $\pi$  se e solo se  $P - P_0$  appartiene allo spazio direttore di  $\pi$ . Poiché  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  è una base di tale spazio direttore, tenendo presente la Proposizione 70 a pag. 68, possiamo dire che

$$P \in \pi \iff (P - P_0, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ è un sistema linearmente dipendente.}$$

La dipendenza di un sistema di vettori equivale alla dipendenza del corrispondente sistema dei vettori delle componenti. Quindi, tenendo presente l'Esercizio 52 a pag. 138, si ha

$$P \in \pi \iff ((x - x_0, y - y_0, z - z_0), (l, m, n), (l', m', n')) \text{ è lin. dip.}$$

A questo punto consideriamo la matrice che ha per righe i tre vettori numerici  $(x - x_0, y - y_0, z - z_0), (l, m, n), (l', m', n')$ : il suo determinante è nullo se e solo se i tre vettori sono dipendenti (per le Proposizioni 88, pag. 85 e 90, pag. 87). Quindi abbiamo

$$P \in \pi \iff \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0.$$

A questo punto, sviluppando il determinante secondo la prima riga e ponendo

$$a = \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}, \quad b = - \begin{vmatrix} l & n \\ l' & n' \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}, \quad d = -ax_0 - by_0 - cz_0$$

otteniamo

$$P \in \pi \iff ax + by + cz + d = 0,$$

come volevamo.

Il fatto che  $a, b, c$  non possono essere tutti nulli si deduce facilmente dal fatto che  $(l, m, n)$  e  $(l', m', n')$  non sono proporzionali (come?), o anche osservando che un'equazione con  $a, b, c$  tutti nulli rappresenta l'insieme vuoto (se  $d \neq 0$ ) oppure tutto lo spazio (se  $d = 0$ ).

□

**Definizione 177** *Nella situazione della proposizione ora dimostrata, l'affermazione*

$$P \in \pi \iff ax + by + cz + d = 0,$$

*viene sinteticamente espressa dicendo che*

$$ax + by + cz + d = 0$$

*è un'equazione cartesiana (ordinaria) del piano  $\pi$  nel riferimento  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ .*

In sintesi, l'insieme delle terne di coordinate dei punti di  $\pi$  coincide con l'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare

$$ax + by + cz + d = 0.$$

**Proposizione 137** *Una qualsiasi equazione del tipo  $ax + by + cz + d = 0$  con  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  rappresenta un piano, e se due equazioni di questo tipo rappresentano lo stesso piano allora sono l'una multiplo dell'altra.*

**Esercizio 53** (facoltativo). *Dimostrare la proposizione precedente.*

## 77 Rappresentazione cartesiana di una retta nello spazio

**Esercizio 54** *Dimostrare che una retta si può sempre ottenere come intersezione di due piani.*

**Proposizione 138** *Sia  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$  un riferimento dello spazio e sia  $r$  una retta. Allora esistono  $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{R}$  tali che, se  $P$  è un qualunque punto dello spazio e  $(x, y, z)$  sono le sue coordinate, si ha*

$$P \in r \iff (ax + by + cz + d = 0 \quad \text{e} \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0).$$

*Dimostrazione.* Per l'Esercizio 54, esistono due piani  $\pi$  e  $\pi'$  tali che

$$r = \pi \cap \pi'.$$

Se le equazioni cartesiane dei due piani sono

$$\pi : ax + by + cz + d = 0 \quad \text{e} \quad \pi' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

allora abbiamo che

$$P \in r \iff (P \in \pi \text{ e } P \in \pi') \iff (ax + by + cz + d = 0 \text{ e } a'x + b'y + c'z + d' = 0),$$

come volevamo.  $\square$

**Definizione 178** *Nella situazione della proposizione ora dimostrata, l'affermazione*

$$P \in r \iff (ax + by + cz + d = 0 \text{ e } a'x + b'y + c'z + d' = 0)$$

*viene sinteticamente espressa dicendo che*

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

*è una rappresentazione cartesiana (ordinaria) della retta  $r$ .*

In sintesi, l'insieme delle terne di coordinate dei punti di  $r$  coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} .$$

## 78 Condizioni di parallelismo

**Proposizione 139** (Condizione di parallelismo tra rette). Siano  $r$  ed  $r'$  rette. Fissato un riferimento dello spazio, sia  $(l, m, n)$  una terna di numeri direttori di  $r$  e sia  $(l', m', n')$  una terna di numeri direttori di  $r'$ . Si ha:

$$r \text{ ed } r' \text{ sono parallele} \iff (l, m, n) \text{ ed } (l', m', n') \text{ sono proporzionali.}$$

*Dimostrazione.* Siccome  $(l, m, n)$  è una terna di numeri direttori di  $r$ , il vettore  $\mathbf{v}$  di componenti  $(l, m, n)$  è un vettore direzionale di  $r$ , cioè è un vettore non nullo parallelo ad  $r$ . Allo stesso modo, il vettore  $\mathbf{v}'$  di componenti  $(l', m', n')$  è un vettore non nullo parallelo ad  $r'$ . Quindi si ha che

$$\begin{aligned} r \text{ ed } r' \text{ sono parallele} &\iff \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{v}' \text{ sono paralleli} \iff \\ &\iff \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{v}' \text{ sono l'uno multiplo dell'altro} \iff \\ &\iff (l, m, n) \text{ ed } (l', m', n') \text{ sono proporzionali,} \end{aligned}$$

come volevamo.  $\square$

**Definizione 179** Sia  $\pi$  un piano, si fissi un riferimento  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$  dello spazio e sia

$$ax + by + cz + d = 0$$

un'equazione cartesiana di  $\pi$ . La terna  $(a, b, c)$  viene detta una terna di parametri di giacitura di  $\pi$  rispetto a  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ .

**Osservazione 95** Per le Proposizioni 136 e 137, le terne di parametri di giacitura di un piano sono non nulle e tutte proporzionali tra loro.

**Proposizione 140** (Condizione di parallelismo tra piani). Siano  $\pi$  e  $\pi'$  piani. Fissato un riferimento dello spazio, siano  $(a, b, c)$  parametri di giacitura di  $\pi$  ed  $(a', b', c')$  parametri di giacitura di  $\pi'$ . Si ha:

$$\pi \text{ e } \pi' \text{ sono paralleli} \iff (a, b, c) \text{ ed } (a', b', c') \text{ sono proporzionali.}$$

*Dimostrazione.* (semi-facoltativa da 4 punti)

Dire che  $(a, b, c)$  sono parametri di giacitura di  $\pi$  vuol dire che sono i tre coefficienti di un'equazione cartesiana di  $\pi$ :

$$\pi : ax + by + cz + d = 0.$$

Allo stesso modo, un'equazione cartesiana di  $\pi'$  sarà:

$$\pi' : a'x + b'y + c'z + d' = 0.$$

Consideriamo il sistema lineare costituito dalle due equazioni:

$$\begin{cases} ax + by + cz = -d \\ a'x + b'y + c'z = -d' \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti e la matrice completa sono:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c & -d \\ a' & b' & c' & -d' \end{pmatrix}.$$

Siccome le matrici  $A$  e  $B$  sono non nulle, il loro rango è maggiore di 0; siccome sono matrici con due righe, il loro rango è al massimo 2; siccome  $A$  è una sottomatrice di  $B$ , il rango di  $A$  è minore o uguale al rango di  $B$ . Abbiamo quindi tre casi possibili:

1.  $\text{rk } A = 1, \quad \text{rk } B = 1$  ,
2.  $\text{rk } A = 1, \quad \text{rk } B = 2$  ,
3.  $\text{rk } A = 2, \quad \text{rk } B = 2$  .

Nel caso 1, poiché  $\text{rk } B = 1$ , un sistema massimo di righe indipendenti è fatto da una sola riga. Quindi le due righe di  $B$  sono proporzionali tra loro. Dunque le due equazioni sono proporzionali fra loro, e quindi rappresentano lo stesso piano, cioè  $\pi = \pi'$ .

Nel caso 2, poiché i ranghi delle due matrici sono diversi, per il teorema di Rouché-Capelli (Proposizione 121 a pag. 115), il sistema è incompatibile. Quindi in questo caso  $\pi \cap \pi' = \emptyset$ .

Nel caso 3, per il teorema di Rouché-Capelli abbiamo che il sistema ammette qualche soluzione, e dalla Proposizione 137 deduciamo che, siccome le due equazioni non sono proporzionali, deve essere  $\pi \neq \pi'$ .

Riassumendo:

caso 1  $\Rightarrow \pi$  e  $\pi'$  impropriamente paralleli

caso 2  $\Rightarrow \pi$  e  $\pi'$  propriamente paralleli

caso 3  $\Rightarrow \pi$  e  $\pi'$  non paralleli.

Quindi i piani sono paralleli se e solo se si presenta il caso 1 o il caso 2. Ma questi sono esattamente i casi in cui  $\text{rk } A = 1$ . Dunque abbiamo che

$$\pi \text{ e } \pi' \text{ paralleli} \iff \text{rk } A = 1.$$

Ma siccome  $\text{rk } A = 1$  se e solo se  $(a, b, c)$  e  $(a', b', c')$  sono proporzionali, abbiamo l'asserto.

□

**Proposizione 141** *Sia  $\mathbf{v}$  un vettore libero e  $\pi$  un piano. Fissato un riferimento dello spazio, siano  $(l, m, n)$  le componenti di  $\mathbf{v}$  ed  $(a, b, c)$  i parametri di giacitura di  $\pi$ . Si ha:*

$$\mathbf{v} \text{ è parallelo a } \pi \iff al + bm + cn = 0.$$

*Dimostrazione.* (semi-facoltativa da 3 punti).

Scegliamo un punto  $P_0$  a piacere su  $\pi$  e siano  $(x_0, y_0, z_0)$  le sue coordinate. Siccome  $(a, b, c)$  sono parametri di giacitura di  $\pi$  allora c'è un'equazione cartesiana di  $\pi$  del tipo:

$$\pi : ax + by + cz + d = 0 .$$

Poniamo ora

$$Q_0 = P_0 + \mathbf{v} .$$

Per l'Osservazione 43 a pag. 73 si ha

$$\mathbf{v} \text{ è parallelo a } \pi \iff Q_0 \in \pi \quad (6)$$

Per la Proposizione 131, le coordinate di  $Q_0$  sono  $(x_0 + l, y_0 + m, z_0 + n)$ , dunque

$$Q_0 \in \pi \iff a(x_0 + l) + b(y_0 + m) + c(z_0 + n) + d = 0 . \quad (7)$$

Siccome  $P_0 \in \pi$  abbiamo

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 ,$$

e quindi

$$\begin{aligned} & a(x_0 + l) + b(y_0 + m) + c(z_0 + n) + d = \\ & = (al + bm + cn) + (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) = al + bm + cn . \end{aligned} \quad (8)$$

Da (6), (7), (8) si deduce subito

$$\mathbf{v} \text{ è parallelo a } \pi \iff al + bm + cn = 0 ,$$

come volevamo.

□

**Proposizione 142** (*Condizione di parallelismo tra retta e piano*). *Sia  $r$  una retta e sia  $\pi$  un piano. Fissato un riferimento dello spazio, siano  $(l, m, n)$  i numeri direttori di  $r$  ed  $(a, b, c)$  i parametri di giacitura di  $\pi$ . Si ha:*

$$r \text{ e } \pi \text{ sono paralleli} \iff al + bm + cn = 0 .$$

*Dimostrazione.* Siccome  $(l, m, n)$  sono numeri direttori di  $r$ , il vettore  $\mathbf{v}$  di componenti  $(l, m, n)$  è parallelo ad  $r$ . Dunque  $r$  e  $\pi$  sono paralleli se e solo se  $\mathbf{v}$  e  $\pi$  sono paralleli. Dunque, l'asserto segue subito dalla Proposizione 141. □

## 79 Relazione tra prodotto scalare geometrico e numerico

Vediamo ora che collegamento c'è tra il prodotto scalare di vettori liberi e il prodotto scalare standard di vettori numerici.

**Osservazione 96** Sia  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$  un riferimento monometrico ortogonale dello spazio. Poiché il riferimento è monometrico, i vettori  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  sono versori, cioè hanno modulo 1. Tenendo presente la Proposizione 42, (2) a pag. 46, si ha

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1.$$

Inoltre, poiché gli assi sono a due a due ortogonali, tenendo presente la Proposizione 41 a pag. 46, si ha

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0$$

**Proposizione 143** Sia  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$  un riferimento dello spazio e siano  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  vettori liberi rispettivamente di componenti  $(l, m, n)$  e  $(l', m', n')$ . Se il riferimento è monometrico ortogonale, allora si ha

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = ll' + mm' + nn'$$

(in altre parole: in un riferimento monometrico ortogonale, il prodotto scalare di vettori liberi è uguale al prodotto scalare standard dei vettori delle componenti).

*Dimostrazione.* Per definizione di componenti, si ha

$$\mathbf{v} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = l'\mathbf{i} + m'\mathbf{j} + n'\mathbf{k}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= (l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}) \cdot (l'\mathbf{i} + m'\mathbf{j} + n'\mathbf{k}) = \\ &= ll'\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + lm'\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + ln'\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} + \\ &+ ml'\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + mm'\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + mn'\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} + \\ &+ nl'\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + nm'\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} + nn'\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \\ &\stackrel{\text{Oss. 96}}{=} ll' + mm' + nn', \end{aligned}$$

come volevamo.  $\square$

## 80 Componenti di un prodotto vettoriale

**Proposizione 144** Sia  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$  un riferimento monometrico ortogonale tale che  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  sia concorde all'orientazione fissata, sia  $\mathbf{v}$  un vettore di componenti  $(l, m, n)$  e  $\mathbf{w}$  un vettore di componenti  $(l', m', n')$ . Allora le componenti di  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$  sono

$$\left( \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} m & n \\ m' & n' \end{array} \right|, & - \left| \begin{array}{cc} l & n \\ l' & n' \end{array} \right|, & \left| \begin{array}{cc} l & m \\ l' & m' \end{array} \right| \end{array} \right),$$

cioè i tre minori di ordine due, con il secondo cambiato di segno, della matrice che ha per righe le componenti di  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ .

*Dimostrazione.* Dalla definizione del prodotto vettoriale, tenendo presente che  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  sono versori a due a due ortogonali, e che l'orientazione di  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  è concorde all'orientazione fissata (rispetto a cui facciamo il prodotto vettoriale), si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{0}, & \quad \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{0}, & \quad \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{0} \\ \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}, & \quad \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i}, & \quad \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \end{aligned}$$

Dunque, per la Proposizione 102 (pag. 97), abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} &= (l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}) \wedge (l'\mathbf{i} + m'\mathbf{j} + n'\mathbf{k}) = \\ &= ll' \mathbf{i} \wedge \mathbf{i} + lm' \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} + ln' \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} + \\ &\quad + ml' \mathbf{j} \wedge \mathbf{i} + mm' \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} + mn' \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} + \\ &\quad + nl' \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} + nm' \mathbf{k} \wedge \mathbf{j} + nn' \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = \\ &= (mn' - m'n)\mathbf{i} - (ln' - l'n)\mathbf{j} + (lm' - l'm)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Quindi le componenti di  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$  sono

$$( \quad mn' - m'n, \quad -(ln' - l'n), \quad lm' - l'm \quad )$$

come volevamo.  $\square$

## 81 Formula per il modulo di un vettore libero

**Proposizione 145** *Sia fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ . Per ogni vettore libero  $\mathbf{v}$ , dette  $(l, m, n)$  le sue componenti, si ha*

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}.$$

*Dimostrazione.* Basta osservare che

$$|\mathbf{v}| \stackrel{\text{Prop. 42, (2)}}{=} \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \stackrel{\text{Prop. 143}}{=} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}.$$

## 82 Distanza tra due punti

**Definizione 180** *Si dice distanza tra due punti  $A$  e  $B$  il modulo del segmento  $\overline{AB}$ . Tale distanza sarà indicata con  $d(A, B)$ .*

**Proposizione 146** *Sia fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ . Se  $P$  e  $P'$  sono punti di coordinate rispettivamente  $(x, y, z)$  ed  $(x'; y'; z')$  allora la distanza tra  $P$  e  $P'$  è data da*

$$d(P, P') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

*Dimostrazione.* Si ha

$$d(P, P') = |\overline{PP'}| = |P' - P| \stackrel{\text{Eser. 52, Prop. 145}}{=} \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2},$$

come volevamo.  $\square$

### 83 Coseni direttori

Per descrivere numericamente la direzione di una retta  $r$ , abbiamo introdotto i numeri direttori, e abbiamo visto che le terne di numeri direttori sono infinite e proporzionali tra loro. Se il riferimento scelto è monometrico ortogonale, per alcuni tipi di problemi di carattere metrico (riguardanti cioè le distanze) risulta comoda una particolare scelta dei numeri direttori.

**Definizione 181** *Sia fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale. I coseni direttori di una retta  $r$  sono le componenti di un versore parallelo ad  $r$ . I coseni direttori di una retta orientata  $\vec{r}$  sono le componenti di un versore parallelo e concorde ad  $\vec{r}$ .*

Poiché un versore parallelo ad  $r$  è in particolare un vettore direzionale di  $r$ , una terna di coseni direttori  $(\lambda, \mu, \nu)$  è una particolare terna di numeri direttori. Dalla Proposizione 145 si ha subito che i coseni direttori di una retta non orientata sono numeri direttori caratterizzati dalla condizione

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

**Osservazione 97** *Una retta orientata ha un'unica terna di coseni direttori. Una retta non orientata ha due terne di coseni direttori, opposte tra loro (corrispondenti ai due versori paralleli ad essa, a loro volta corrispondenti ai due versi su di essa).*

Il nome “coseni” è dovuto al seguente fatto.

**Proposizione 147** *Sia  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$  un riferimento monometrico ortogonale, sia  $\vec{r}$  una retta orientata e siano  $(\lambda, \mu, \nu)$  i suoi coseni direttori. Detti  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  e  $\vec{z}$  i tre assi del riferimento (considerati come rette orientate), si ha:*

$$\lambda = \cos \widehat{\vec{r}\vec{x}}, \quad \mu = \cos \widehat{\vec{r}\vec{y}}, \quad \nu = \cos \widehat{\vec{r}\vec{z}}.$$

*Dimostrazione.* (semi-facoltativa da 3 punti).

Sia  $\mathbf{v}$  il versore parallelo e concorde ad  $\vec{r}$ , di modo che le sue componenti sono  $(\lambda, \mu, \nu)$ . Per definizione di angolo tra vettori non nulli, si ha:

$$\widehat{\vec{r}\vec{x}} = \widehat{\mathbf{v}\mathbf{i}}, \quad \widehat{\vec{r}\vec{y}} = \widehat{\mathbf{v}\mathbf{j}}, \quad \widehat{\vec{r}\vec{z}} = \widehat{\mathbf{v}\mathbf{k}}. \quad (9)$$

Il versore  $\mathbf{i}$  ha componenti  $(1, 0, 0)$ , perché  $\mathbf{i} = 1 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}$ . Similmente i versori  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  hanno componenti, rispettivamente,  $(0, 1, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ . Applicando la Proposizione 143 si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} &= (\lambda, \mu, \nu) \cdot (1, 0, 0) = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 + \nu \cdot 0 = \lambda \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} &= (\lambda, \mu, \nu) \cdot (0, 1, 0) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 + \nu \cdot 0 = \mu \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} &= (\lambda, \mu, \nu) \cdot (0, 0, 1) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 + \nu \cdot 1 = \nu.\end{aligned}\tag{10}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\cos \widehat{r\vec{x}} &\stackrel{(9)}{=} \cos \widehat{\mathbf{v}\mathbf{i}} \stackrel{\text{Oss. 33}}{=} \mathbf{v} \cdot \mathbf{i} \stackrel{(10)}{=} \lambda \\ \cos \widehat{r\vec{y}} &\stackrel{(9)}{=} \cos \widehat{\mathbf{v}\mathbf{j}} \stackrel{\text{Oss. 33}}{=} \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} \stackrel{(10)}{=} \mu \\ \cos \widehat{r\vec{z}} &\stackrel{(9)}{=} \cos \widehat{\mathbf{v}\mathbf{k}} \stackrel{\text{Oss. 33}}{=} \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} \stackrel{(10)}{=} \nu,\end{aligned}$$

come volevamo.

□

Riassumendo, i coseni direttori di una retta  $r$  sono particolari numeri direttori, e in quanto tali determinano la direzione di  $r$ . Dunque la direzione di una retta può essere determinata tramite i coseni dei tre angoli formati con gli assi del riferimento (fatto del resto abbastanza intuitivo).

## 84 Ortogonalità per rette e piani

In questa sezione conviene tenere sempre presente che due vettori liberi sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo (vedi Proposizione 41 a pag. 46).

La Proposizione 39 a pag. 45 assicura che i riferimenti ortogonali in un piano esistono (fatto intuitivamente ovvio, ma che non è immediato dimostrare a partire dagli assiomi).

Nello spazio (anche usando la Proposizione 39), non è facile dimostrare direttamente l'esistenza di tre rette a due a due perpendicolari (sebbene anche questo sia abbastanza intuitivo). Dunque, a rigore, non siamo ancora sicuri che esista un riferimento ortogonale dello spazio. Usando le proprietà del prodotto scalare, la cosa diventa facile, come vediamo ora nella proposizione seguente.

**Proposizione 148** *Esistono tre versori  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  a due a due ortogonali tra loro (nello spazio dei vettori liberi).*

*Dimostrazione.* (semi-facoltativa da 4 punti).

Sia  $\mathbf{u}'$  un qualunque vettore non nullo. Ponendo

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{u}'|} \mathbf{u}'$$

si ottiene un versore  $\mathbf{u}$ .

Sia ora  $\mathbf{v}''$  un vettore che non dipende da  $\mathbf{u}$  e poniamo

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}'' - (\mathbf{v}'' \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}.$$

Questo vettore è non nullo, altrimenti si avrebbe

$$\mathbf{v}'' = (\mathbf{v}'' \cdot \mathbf{u})\mathbf{u},$$

mentre  $\mathbf{v}''$  non dipende da  $\mathbf{u}$ . Notiamo che

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{v}'' - (\mathbf{v}'' \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{v}'' \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{v}'' \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 0$$

(poiché  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$ ). Quindi  $\mathbf{v}'$  è ortogonale ad  $\mathbf{u}$ . Ponendo

$$\mathbf{v} = \frac{1}{|\mathbf{v}'|} \mathbf{v}'$$

si ottiene un versore  $\mathbf{v}$  ortogonale ad  $\mathbf{u}$ .

Poiché lo spazio dei vettori liberi ha dimensione tre, esiste un vettore  $\mathbf{w}''$  che non dipende da  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ .

Poniamo

$$\mathbf{w}' = \mathbf{w}'' - (\mathbf{w}'' \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} - (\mathbf{w}'' \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}.$$

Questo vettore è non nullo, altrimenti si avrebbe

$$\mathbf{w}'' = (\mathbf{w}'' \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} + (\mathbf{w}'' \cdot \mathbf{v})\mathbf{v},$$

mentre  $\mathbf{w}''$  non dipende da  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .

Quindi si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{w}' \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{w}'' \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{w}'' \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{w}'' \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = \\ &= \mathbf{w}'' \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{w}'' \cdot \mathbf{u}) \cdot 1 - (\mathbf{w}'' \cdot \mathbf{v}) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{w}' \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{w}'' \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{w}'' \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{w}'' \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \\ &= \mathbf{w}'' \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{w}'' \cdot \mathbf{u}) \cdot 0 - (\mathbf{w}'' \cdot \mathbf{v}) \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Dunque il vettore  $\mathbf{w}'$  è ortogonale ad  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ . Ponendo

$$\mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{w}'|} \mathbf{w}'$$

si ottiene un versore  $\mathbf{w}$  ortogonale ad  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .

□

La dimostrazione fatta in questa maniera è valida per ogni spazio euclideo di dimensione almeno tre. Anzi, in uno spazio euclideo  $(V, s)$  di dimensione  $n$ , questo metodo (che porta il nome di procedimento di Gram-Schmidt) permette

di trovare  $n$  vettori  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  a due a due ortogonali (cioè i vettori sono tali che  $s(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) = 1$  e  $s(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0$  per  $i \neq j$ ).

È possibile trovare nello spazio quattro rette a due a due perpendicolari? Intuitivamente, no. Ma per essere proprio sicuri, meglio dimostrare la seguente proposizione.

**Proposizione 149** *Siano  $S = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  e  $T = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$  due sistemi di vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale euclideo  $(V, s)$ . Se per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $j \in \{1, \dots, m\}$  si ha*

$$s(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j) = 0,$$

*allora il sistema “unione”  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$  è anch’esso linearmente indipendente.*

*Dimostrazione.* (semi-facoltativa da 3 punti).

Per comodità, dati due vettori qualunque  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , indicheremo con

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

lo scalare

$$s(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Consideriamo una combinazione lineare nulla dei vettori del sistema “unione”:

$$h_1 \mathbf{v}_1 + \dots + h_n \mathbf{v}_n + k_1 \mathbf{w}_1 + \dots + k_m \mathbf{w}_m = \mathbf{0}.$$

Dunque abbiamo

$$h_1 \mathbf{v}_1 + \dots + h_n \mathbf{v}_n = -k_1 \mathbf{w}_1 - \dots - k_m \mathbf{w}_m.$$

Se poniamo

$$\mathbf{u} = h_1 \mathbf{v}_1 + \dots + h_n \mathbf{v}_n,$$

abbiamo anche

$$\mathbf{u} = -k_1 \mathbf{w}_1 - \dots - k_m \mathbf{w}_m.$$

Tenendo presente che  $s$  è bilineare, lo sviluppo di

$$s(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (h_1 \mathbf{v}_1 + \dots + h_n \mathbf{v}_n) \cdot (-k_1 \mathbf{w}_1 - \dots - k_m \mathbf{w}_m)$$

consiste in una somma di termini del tipo

$$-h_i k_j \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{w}_j,$$

che sono tutti nulli. Dunque  $s(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ , e siccome  $s$  è definito positivo questo implica che  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

Quindi

$$h_1 \mathbf{v}_1 + \dots + h_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

e

$$-k_1 \mathbf{w}_1 - \dots - k_m \mathbf{w}_m = \mathbf{0}.$$

Siccome i sistemi  $S$  e  $T$  sono indipendenti, gli scalari  $h_i$  e gli scalari  $k_j$  sono tutti nulli. Questo dimostra che il sistema “unione” è indipendente, come volevamo.

□

A questo punto è facile dimostrare che non possono esistere quattro rette a due a due ortogonali. Infatti, se queste esistessero, prendendo un vettore direzionale per ciascuna otterremmo quattro vettori non nulli a due a due ortogonali,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ . Per la Proposizione 149 i sistemi  $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  e  $T = (\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$  sono indipendenti. Ancora per la Proposizione 149, il sistema  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$  sarebbe indipendente. Ma questo è impossibile perché lo spazio dei vettori liberi ha dimensione 3.

**Definizione 182** *Un vettore libero si dice ortogonale ad un piano  $\pi$  se è ortogonale a tutti i vettori paralleli a  $\pi$ . Un vettore ortogonale a  $\pi$  che sia non nullo, sarà detto normale al piano. Una retta si dice ortogonale, o normale, o perpendicolare, ad un piano  $\pi$  se è ortogonale a tutte le rette contenute in  $\pi$ .*

Per noi dunque un vettore normale a  $\pi$  è un vettore non nullo ortogonale a  $\pi$ . Avvertiamo che in qualche testo è possibile trovare “la normale a  $\pi$ ”, col significato di versore (cioè vettore di modulo 1) ortogonale a  $\pi$ . Inoltre, attenzione a non far confusione col termine “normalizzare” che vuol dire dividere un vettore per il suo modulo (ottenendo così un versore).

Naturalmente, il vettore nullo, essendo ortogonale a qualsiasi vettore, è ortogonale a qualsiasi piano. Tuttavia è bene puntualizzare il fatto, peraltro abbastanza intuitivo, che per ogni piano ci sono vettori non nulli ad esso ortogonali.

**Proposizione 150** *Sia  $\pi$  un piano. Allora esiste un vettore normale a  $\pi$ .*

Proponiamo, come lavoro semi-facoltativo da 4 punti, due dimostrazioni (se vengono scelte per l’esame, vanno esposte entrambe, ma senza l’obbligo di studiare i riferimenti alla dimostrazione della Proposizione 148).

*Prima dimostrazione.* Possiamo certamente trovare due versori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  paralleli a  $\pi$  e ortogonali tra loro (ragionando come nella dimostrazione della Proposizione 148, oppure usando la Proposizione 39 a pag. 45). Ragionando come nella dimostrazione della Proposizione 148, troviamo un vettore  $\mathbf{n}$  non nullo e ortogonale ad  $\mathbf{u}$  e a  $\mathbf{v}$ . Siccome lo spazio direttore  $\mathcal{W}$  di  $\pi$  ha dimensione due, e i vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  sono non nulli e non paralleli (quindi indipendenti),  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  è una base di  $\mathcal{W}$ .

Se quindi  $\mathbf{w}$  è un qualsiasi vettore parallelo a  $\pi$  (cioè appartenente a  $\mathcal{W}$ ), esso è combinazione lineare di  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{w} = h\mathbf{u} + k\mathbf{v} .$$

Dunque si ha

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{n} \cdot (h\mathbf{u} + k\mathbf{v}) = h\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} + k\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 .$$

Quindi  $\mathbf{n}$  è ortogonale a  $\mathbf{w}$ , che era un arbitrario vettore parallelo a  $\pi$ . E allora  $\mathbf{n}$ , essendo ortogonale a qualsiasi vettore parallelo a  $\pi$ , è normale a  $\pi$ , come richiesto.

*Seconda dimostrazione.* Fissiamo un riferimento monometrico ortogonale (che certamente esiste), siano  $(a, b, c)$  parametri di giacitura di  $\pi$  e sia  $\mathbf{n}$  il vettore di componenti  $(a, b, c)$ .

Poiché  $(a, b, c)$  non sono tutti nulli (cfr. Osservazione 95), il vettore  $\mathbf{n}$  è non nullo. Se  $\mathbf{w}$  è un qualsiasi vettore parallelo a  $\pi$ , dette  $(l, m, n)$  le sue componenti, abbiamo

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} \stackrel{\text{Prop. 143}}{=} al + bm + cn \stackrel{\text{Prop. 141}}{=} 0 .$$

Dunque,  $\mathbf{n}$  è ortogonale ad un arbitrario vettore  $\mathbf{w}$  parallelo a  $\pi$ , cioè è normale a  $\pi$  come richiesto.

La seconda dimostrazione mostra anche che *in un riferimento monometrico ortogonale* i parametri di giacitura di un piano  $\pi$  sono le componenti di un vettore normale a  $\pi$ .

**Proposizione 151** *I vettori normali ad uno stesso piano sono tutti paralleli tra loro.*

*Dimostrazione.* (semi-facoltativa da 3 punti).

Supponiamo per assurdo che esistano due vettori  $\mathbf{n}$  ed  $\mathbf{n}'$  normali ad un piano  $\pi$ , ma non paralleli tra loro. Siano  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  due vettori paralleli a  $\pi$ , non paralleli tra loro. Dunque i sistemi  $S = (\mathbf{n}, \mathbf{n}')$  e  $T = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$  sono indipendenti. Inoltre, poiché  $\mathbf{n}$  ed  $\mathbf{n}'$  sono normali a  $\pi$  e  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  sono paralleli a  $\pi$ , ogni vettore di  $S$  è ortogonale a ogni vettore di  $T$ .

Per la Proposizione 149, avremmo che il sistema  $(\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{u}, \mathbf{v})$  sarebbe linearmente indipendente, che è assurdo perché lo spazio dei vettori liberi ha dimensione 3. Questo prova che non possono esistere due vettori  $\mathbf{n}$  ed  $\mathbf{n}'$  normali a  $\pi$  ma non paralleli tra loro, come volevamo.

□

Poiché i vettori normali ad un piano sono tutti paralleli tra loro, le loro componenti sono tutte multiple l'una dell'altra. Inoltre poco fa abbiamo detto che in un riferimento monometrico ortogonale, i parametri di giacitura di un piano  $\pi$  sono le componenti di un vettore normale a  $\pi$ . Poiché anche i parametri di giacitura sono tutti multipli l'uno dell'altro (cfr. Osservazione 95 a pag. 147), otteniamo subito la seguente proposizione.

**Proposizione 152** *Sia  $\pi$  un piano e  $(a, b, c)$  le componenti di un vettore  $\mathbf{v}$  rispetto ad un riferimento monometrico ortogonale. Abbiamo che*

$$(a, b, c) \text{ parametri di giacitura di } \pi \iff \mathbf{v} \text{ vettore normale a } \pi .$$

**Proposizione 153** *Sia  $P$  un punto e  $\pi$  un piano. Allora esiste una ed una sola retta passante per  $P$  e ortogonale a  $\pi$ .*

*Dimostrazione.* Una retta è normale ad un piano se e solo se lo è il suo vettore direzionale. Basta quindi prendere l'unica retta passante per  $P$  e avente come vettore direzionale un qualunque vettore normale a  $\pi$ . □

**Proposizione 154** *Sia  $P$  un punto ed  $r$  una retta. Esiste uno ed un solo piano passante per  $P$  ed ortogonale ad  $r$ .*

**Esercizio 55** (facoltativo). *Dimostrare la proposizione di sopra.*

Quand'è che due piani si dicono ortogonali? Sicuramente non è possibile che tutte le rette di un piano siano ortogonali a tutte le rette dell'altro, dobbiamo quindi "accontentarci" di una proprietà più debole. Per descriverla, stabiliamo la seguente proposizione.

**Proposizione 155** *Siano  $\pi$  e  $\pi'$  piani. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

1.  *$c$ 'è una retta contenuta in  $\pi$  e normale a  $\pi'$ ;*
2.  *$c$ 'è una retta contenuta in  $\pi'$  e normale a  $\pi$ ;*
3. *una retta normale a  $\pi$  e una retta normale a  $\pi'$  sono ortogonali*

*(dire che le affermazioni sono equivalenti, vuol dire che sono o tutte vere o tutte false, a seconda della scelta dei piani  $\pi$  e  $\pi'$ ).*

*Dimostrazione.* (semi-facoltativa da 4 punti).

Supponiamo che sia vera la (1), cioè che esista una retta  $r$  contenuta in  $\pi$  e normale a  $\pi'$ . Se  $s$  è una retta normale a  $\pi$ , essa è per definizione ortogonale a tutte le rette contenute in  $\pi$ , in particolare ad  $r$ . Quindi  $r$  ed  $s$  sono ortogonali, e rispettivamente normali a  $\pi'$  e a  $\pi$ . Dunque la (3) è vera.

Viceversa, supponiamo che la (3) sia vera: esiste quindi una normale  $t$  a  $\pi$  e una normale  $t'$  a  $\pi'$ , tali che  $t$  e  $t'$  siano ortogonali tra loro. Siano  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{u}'$  vettori direzionali rispettivamente di  $t$  e  $t'$ , e sia  $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  una base dello spazio direttore di  $\pi$ . Il sistema  $S = (\mathbf{u})$  è linearmente indipendente e il suo unico vettore è ortogonale a tutti i vettori del sistema  $T = (\mathbf{u}', \mathbf{v}, \mathbf{w})$ . Se dunque  $T$  fosse indipendente, la Proposizione 149 implicherebbe che i quattro vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}, \mathbf{w}$  sarebbero indipendenti, il che è assurdo perché lo spazio dei vettori liberi ha dimensione 3. Dunque  $T$  è dipendente.

Tenendo presente che  $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  una base dello spazio direttore di  $\pi$ , e la Proposizione 70 a pag. 68, abbiamo che  $\mathbf{u}'$  è parallelo a  $\pi$ . Quindi  $t'$  è parallela a  $\pi$ . Possiamo allora trovare una retta  $t''$  contenuta in  $\pi$  e parallela a  $t'$ . Siccome  $t$  e  $t'$  sono ortogonali, la retta  $t'' \subset \pi$ , essendo parallela a  $t'$ , è ortogonale a  $t$ , come richiesto da (1).

Abbiamo dimostrato che (1) e (3) sono equivalenti. Allo stesso modo si dimostra che (2) e (3) sono equivalenti. Dunque le tre affermazioni sono tutte equivalenti, come volevamo.

□

**Definizione 183** *Due piani si dicono ortogonali se sono verificate le affermazioni della Proposizione 155.*

## 85 Condizioni di ortogonalità

**Proposizione 156** (condizione di ortogonalità tra rette). Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, siano  $r$  ed  $r'$  rette, con numeri direttori rispettivamente  $(l, m, n)$  ed  $(l', m', n')$ . Allora si ha:

$$r \text{ ed } r' \text{ ortogonali} \iff ll' + mm' + nn' = 0 .$$

*Dimostrazione.* Siano  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}'$  i vettori rispettivamente di componenti  $(l, m, n)$  ed  $(l', m', n')$ , così che  $\mathbf{v}$  è un vettore parallelo a  $r$  e  $\mathbf{v}'$  è un vettore parallelo ad  $r'$ . Si ha:

$$\begin{aligned} r \text{ ed } r' \text{ ortogonali} &\iff \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{v}' \text{ ortogonali} \stackrel{\text{Prop. 41}}{\iff} \\ &\iff \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = 0 \stackrel{\text{Prop. 143}}{\iff} ll' + mm' + nn' = 0 , \end{aligned}$$

come volevamo.  $\square$

**Proposizione 157** (condizione di ortogonalità tra piani). Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, siano  $\pi$  e  $\pi'$  piani, con parametri di giacitura rispettivamente  $(a, b, c)$  ed  $(a', b', c')$ . Allora si ha:

$$\pi \text{ e } \pi' \text{ ortogonali} \iff aa' + bb' + cc' = 0 .$$

*Dimostrazione.* Siano  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}'$  i vettori rispettivamente di componenti  $(a, b, c)$  ed  $(a', b', c')$ . Per la Proposizione 152,  $\mathbf{v}$  è un vettore normale a  $\pi$  e  $\mathbf{v}'$  è un vettore normale a  $\pi'$ . Per definizione,  $\pi$  e  $\pi'$  sono ortogonali se e solo se verificano una (e quindi tutte) le condizioni della Proposizione 155. Usando la condizione (3), otteniamo

$$\begin{aligned} \pi \text{ e } \pi' \text{ ortogonali} &\iff \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{v}' \text{ ortogonali} \stackrel{\text{Prop. 41}}{\iff} \\ &\iff \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = 0 \stackrel{\text{Prop. 143}}{\iff} aa' + bb' + cc' = 0 , \end{aligned}$$

come volevamo.  $\square$

**Proposizione 158** (condizione di ortogonalità tra una retta e un piano). Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, sia  $r$  una retta di numeri direttori  $(l, m, n)$  e  $\pi$  un piano di parametri di giacitura  $(a, b, c)$ . Si ha:

$$r \text{ e } \pi \text{ sono ortogonali} \iff (l, m, n) \text{ ed } (a, b, c) \text{ sono proporzionali.}$$

*Dimostrazione.* Sia  $\mathbf{v}$  il vettore direzionale di  $r$  di componenti  $(l, m, n)$ . Si ha

$$\begin{aligned} r \text{ e } \pi \text{ sono ortogonali} &\iff \mathbf{v} \text{ normale a } \pi \stackrel{\text{Prop. 152}}{\iff} \\ &\iff (l, m, n) \text{ parametri di giacitura di } \pi \stackrel{\text{Oss. 95}}{\iff} \\ &\iff (l, m, n) \text{ ed } (a, b, c) \text{ sono proporzionali ,} \end{aligned}$$

come volevamo.  $\square$

## 86 Esercizi riassuntivi di geometria analitica nello spazio.

**Esercizio 56** Sia fissato un riferimento nello spazio. Scrivere un'equazione cartesiana del piano di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 + t - s \\ y = 3 + 4t \\ z = 1 + 3t + 2s \end{cases}$$

Proponiamo vari possibili procedimenti per la soluzione.

*Primo procedimento.* Il piano in questione è quello che passa per il punto di coordinate  $(2, 3, 1)$  ed è parallelo ai vettori di componenti  $(1, 4, 3)$  e  $(-1, 0, 2)$  (cfr. Osservazione 94). Tenendo presente la dimostrazione della Proposizione 136, un'equazione cartesiana

$$ax + by + cz + d = 0$$

si ottiene subito ponendo

$$a = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad b = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad d = -a \cdot 2 - b \cdot 3 - c \cdot 1.$$

Facendo i conti, si ha l'equazione voluta:

$$8x - 5y + 4z - 5 = 0.$$

*Variante del primo procedimento.* Invece di applicare direttamente le formule, può essere più semplice ricordare la condizione da cui vengono fuori:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

sviluppando il determinante nella maniera che si preferisce, si ottiene ancora l'equazione

$$8x - 5y + 4z - 5 = 0.$$

*Secondo procedimento.* Supponiamo che  $(x, y, z)$  siano le coordinate di un punto appartenente al piano. Dunque, per definizione di rappresentazione parametrica, esistono dei numeri reali  $t$  ed  $s$  tali che

$$\begin{cases} x = 2 + t - s \\ y = 3 + 4t \\ z = 1 + 3t + 2s \end{cases} \quad (11)$$

Dalla prima uguaglianza si ha

$$t = x + s - 2. \quad (12)$$

sostituendo nella seconda si ha

$$y = 3 + 4 \cdot (x + s - 2) \Rightarrow 4x + 4s - 5 - y = 0 \Rightarrow s = -x + \frac{1}{4}y + \frac{5}{4}.$$

Sostituendo nella (12) l'espressione ora trovata per  $s$  abbiamo

$$t = x + (-x + \frac{1}{4}y + \frac{5}{4}) - 2 = \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}.$$

Sostituendo nell'ultima delle uguaglianze (11) le espressioni ora trovate per  $t$  ed  $s$ , otteniamo

$$z = 1 + 3(\frac{1}{4}y - \frac{3}{4}) + 2(-x + \frac{1}{4}y + \frac{5}{4}) \Rightarrow 2x - \frac{5}{4}y + z - \frac{5}{4} = 0.$$

Concludiamo quindi che tutti i punti del piano hanno coordinate  $(x, y, z)$  che soddisfano la condizione

$$2x - \frac{5}{4}y + z - \frac{5}{4} = 0.$$

Poiché tale equazione rappresenta un piano, e poiché non esistono piani propriamente contenuti in altri piani, l'equazione deve per forza rappresentare il piano dato. Notiamo che l'equazione non coincide con quella trovata con l'altro procedimento (ma questo non è un problema: essendo proporzionali, rappresentano lo stesso piano).

Questo secondo procedimento può risultare più familiare per gli studenti, in quanto ricorda da vicino la risoluzione "per sostituzione" di un sistema lineare. Però, è evidentemente più faticoso rispetto al primo. Inoltre, sebbene in linea di principio funzioni sempre, in alcuni casi richiede di cambiare l'ordine con cui si fanno le sostituzioni.

Per semplificare questo secondo procedimento, possiamo cominciare a notare che effettivamente può essere descritto in termini di sistemi lineari: abbiamo studiato per quali valori di  $x, y, z$  le equazioni parametriche, considerate come un sistema lineare in  $s, t$ , sono compatibili. Tenendo presente questo, e ricordando che il metodo di Gauss è molto più rapido rispetto al metodo "per sostituzione", avremmo potuto procedere come segue.

*Miglioramento del secondo Procedimento.* Sulla base delle equazioni parametriche si può subito scrivere la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & x-2 \\ 4 & 0 & y-3 \\ 3 & 2 & z-1 \end{pmatrix}.$$

Effettuiamo il procedimento di riduzione a scalini, considerando  $x, y, z$  come

numeri:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & x-2 \\ 4 & 0 & y-3 \\ 3 & 2 & z-1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mathbf{a}_2 \rightarrow \mathbf{a}_2 - 4\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \rightarrow \mathbf{a}_3 - 3\mathbf{a}_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & x-2 \\ 0 & 4 & -4x+y+5 \\ 0 & 5 & -3x+z+5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mathbf{a}_3 \rightarrow 4\mathbf{a}_3 - 5\mathbf{a}_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & x-2 \\ 0 & 4 & -4x+y+5 \\ 0 & 0 & 8x-5y+4z-5 \end{pmatrix}$$

Imponendo che l'ultima riga sia nulla, si ha la condizione

$$8x - 5y + 4z - 5 = 0,$$

che fornisce l'equazione voluta. Lasciamo come esercizio facoltativo di spiegare in dettaglio come mai questo procedimento funziona.

**Esercizio 57** *Sia fissato un riferimento nello spazio. Scrivere un'equazione cartesiana del piano che passa per il punto di coordinate  $(2, 3, 1)$  ed è parallelo ai vettori di componenti  $(1, 4, 3)$  e  $(-1, 0, 2)$ .*

Le risposte e i procedimenti possibili sono esattamente gli stessi di quelli dell'esercizio precedente.

**Esercizio 58** *Sia fissato un riferimento nello spazio. Scrivere un'equazione cartesiana del piano passante per i punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ , di coordinate rispettive  $(2, 3, 1)$ ,  $(3, 7, 4)$  e  $(1, 3, 3)$ .*

Soluzione. Il piano in questione deve essere parallelo ai vettori  $B - A$  e  $C - A$  (perché i segmenti orientati  $AB$  e  $AC$  devono essere contenuti nel piano, e quindi devono essere impropriamente paralleli). Per l'Esercizio 52, le componenti di tali vettori sono rispettivamente  $(1, 4, 3)$  e  $(-1, 0, 2)$ . Dunque, di nuovo, il piano è quello che passa per il punto di coordinate  $(2, 3, 1)$  ed è parallelo ai vettori di componenti  $(1, 4, 3)$  e  $(-1, 0, 2)$ . Dunque la risposta è di nuovo quella degli esercizi precedenti.

**Esercizio 59** *Sia fissato un riferimento dello spazio. Scrivere una rappresentazione cartesiana della retta  $r$  di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Ricordiamo che una rappresentazione cartesiana di una retta si ottiene mettendo a sistema le equazioni di due piani la cui intersezione sia la retta stessa. Naturalmente, una possibile via sarebbe quella di scegliere a piacere due tali piani, e poi applicare per ciascuno uno dei metodi visti per l'Esercizio 56. La cosa risulterebbe inutilmente lunga: per questo tipo di esercizi, il metodo

“per sostituzione” va bene (in quanto c’è un solo parametro da sostituire). Procediamo quindi così.

Ricaviamo la  $t$  dalla prima:

$$t = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}.$$

Sostituiamo nelle altre due:

$$y = 1 - 2\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \frac{2}{3}x + y - \frac{7}{3} = 0$$

$$z = 2 + \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \frac{1}{3}x - z + \frac{4}{3} = 0.$$

La rappresentazione voluta è

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + y - \frac{7}{3} = 0 \\ \frac{1}{3}x - z + \frac{4}{3} = 0 \end{cases}.$$

Naturalmente, per ricavare la  $t$  si può scegliere una qualunque delle tre equazioni parametriche (ad esempio, nel presente caso per semplificare i conti conveniva scegliere la terza), purché la  $t$  effettivamente compaia in essa (cioè abbia coefficiente non nullo).

**Esercizio 60** *Sia fissato un riferimento dello spazio. Scrivere una rappresentazione parametrica del piano di equazione*

$$3x - 2y + 4z - 2 = 0.$$

Soluzione. Se assegniamo valori a scelta alla  $y$  e alla  $z$ , diciamo rispettivamente  $t$  ed  $s$ , otteniamo la  $x$ :

$$x = \frac{2}{3}t - \frac{4}{3}s + \frac{2}{3}.$$

Quindi una rappresentazione parametrica è data da:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}t - \frac{4}{3}s + \frac{2}{3} \\ y = t \\ z = s \end{cases}.$$

Dunque passare da un’equazione cartesiana ad una rappresentazione parametrica, consiste sostanzialmente nel risolvere l’equazione.

**Esercizio 61** *Sia fissato un riferimento dello spazio. Scrivere una rappresentazione parametrica della retta di equazioni*

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -2x - y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$$

*Soluzione.* Risolviamo il sistema. Usando il metodo di Gauss, abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{a}_2 \rightarrow \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -5y + 5z = 5 \end{cases}$$

Possiamo assegnare a  $z$  un valore arbitrario, diciamo  $t$ , e sostituire a ritroso:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 & \rightarrow & x - 2(t - 1) + t = 0 & \rightarrow & x = t - 2 \\ -5y + 5t = 5 & \rightarrow & y = t - 1 \end{cases}$$

Questo ci assicura che le soluzioni del sistema, e quindi le coordinate dei punti di  $r$ , sono tutte quelle del tipo  $(t - 2, t - 1, t)$ , con  $t$  numero reale. In altre parole, una rappresentazione parametrica di  $r$  è

$$\begin{cases} x = t - 2 \\ y = t - 1 \\ z = t \end{cases}.$$

**Esercizio 62** *Fissato un riferimento nello spazio, trovare i numeri direttori della retta di equazioni*

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - 5y + z = -9 \end{cases}$$

*Soluzione.* Una possibilità è quella di trovare una rappresentazione parametrica, per poi prendere i tre coefficienti del parametro.

Alternativamente, si può osservare che un vettore di componenti  $(l, m, n)$  è parallelo alla retta se e solo se è parallelo ad entrambi i piani di cui la retta è intersezione. Quindi i numeri direttori devono soddisfare le due condizioni di parallelismo:

$$\begin{cases} 2l - m + n = 0 \\ l - 5m + n = 0 \end{cases}$$

A questo punto, una qualunque soluzione non nulla del sistema ora ottenuto, costituisce una terna di numeri direttori (basta dunque risolvere il sistema).

C'è anche una formula "bell'e pronta". Si può infatti considerare la matrice dei coefficienti (che è uguale alla matrice dei coefficienti del sistema che rappresenta la retta)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

e osservare che i due determinanti

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

sono nulli perché hanno righe uguali.

Sviluppando secondo la prima riga abbiamo:

$$2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - 1 \left( - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) + 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

e

$$1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - 5 \left( - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) + 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Questo significa proprio che una soluzione è data da

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} \quad - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$$

cioè dai tre minori della matrice dei coefficienti, con il secondo cambiato di segno:

$$(4, -1, -9).$$

**Esercizio 63** *Fissato un riferimento nello spazio, trovare i numeri direttori della retta di equazioni*

$$\begin{cases} x - 3y + 2z - 2 = 0 \\ 2x - y + 3z + 9 = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Se vogliamo usare la formula illustrata sopra, basta scrivere la matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

e prendere i tre minori (il secondo cambiato di segno)

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -7 \quad - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5.$$

Dunque i numeri direttori voluti sono

$$(-7, 1, 5).$$

**Esercizio 64** *Fissato un riferimento monometrico ortogonale dello spazio, trovare i coseni direttori della retta di equazioni*

$$\begin{cases} x - 3y + 2z - 2 = 0 \\ 2x - y + 3z + 9 = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Come abbiamo visto prima, una terna di numeri direttori è  $(-7, 1, 5)$ . Il modulo del vettore che ha queste componenti è

$$\sqrt{(-7)^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}.$$

Dunque i coseni direttori si ottengono dividendo  $(-7, 1, 5)$  per  $5\sqrt{3}$ :

$$\left( -\frac{7\sqrt{3}}{15}, \frac{\sqrt{3}}{15}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right).$$

**Esercizio 65** Fissato un riferimento monometrico ortogonale nello spazio, sia  $r$  la retta rappresentata da

$$\begin{cases} 2x + y + z - 2 = 0 \\ 2x + 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

e sia  $\pi$  il piano di equazione

$$y - 2z - 1 = 0 .$$

Dire se  $r$  e  $\pi$  sono ortogonali e se sono paralleli.

Soluzione. Calcolando i numeri direttori di  $r$  come visto in precedenza, otteniamo  $(3, -4, -2)$ . I parametri di giacitura di  $\pi$  sono  $(0, 1, -2)$ . Poiché le due terne non sono proporzionali,  $r$  e  $\pi$  non sono ortogonali. Poiché

$$3 \cdot 0 + (-4) \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) = 0 - 4 + 4 = 0 ,$$

$r$  e  $\pi$  sono paralleli.

**Esercizio 66** Fissato un riferimento monometrico ortogonale nello spazio, sia  $r$  la retta rappresentata da

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 3t \\ z = t \end{cases}$$

e sia  $\pi$  il piano di equazione

$$y - z - 8 = 0 .$$

Dire se  $r$  e  $\pi$  sono ortogonali e se sono paralleli.

Soluzione. I numeri direttori di  $r$  sono dati dai tre coefficienti del parametro  $t$ :  $(-1, -3, 1)$ . I parametri di giacitura di  $\pi$  sono  $(0, 1, -1)$ . Poiché le due terne non sono proporzionali,  $r$  e  $\pi$  non sono ortogonali. Poiché

$$(-1) \cdot 0 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0 - 3 - 1 = -4 ,$$

$r$  e  $\pi$  non sono neppure paralleli.

**Esercizio 67** Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, sia  $r$  la retta rappresentata da

$$\begin{cases} x - y + z - 3 = 0 \\ 2x - y + 3z - 6 = 0 \end{cases}$$

ed  $r'$  la retta rappresentata da

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = 2 \end{cases} .$$

Le rette  $r$  ed  $r'$  sono ortogonali? Sono parallele? Sono sghembe?

Soluzione. I numeri direttori di  $r$  sono  $(-2, -1, 1)$  (calcolati come al solito coi tre minori). I numeri direttori di  $r'$  si hanno subito:  $(-2, 1, 0)$ . Poiché

$$(-2) \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 3,$$

le rette non sono ortogonali. Poiché le due terne non sono proporzionali, le rette non sono nemmeno parallele. Per controllare se sono sghembe, visto che sappiamo che non sono parallele, basta controllare che non siano incidenti. Per far questo, si può cercare un valore di  $t$  che dia luogo ad un punto che appartenga anche ad  $r$ :

$$\begin{cases} (1 - 2t) - (2 + t) + 2 - 3 = 0 \\ 2(1 - 2t) - (2 + t) + 3 \cdot 2 - 6 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} -3t - 2 = 0 \\ -3t = 0 \end{cases}.$$

poiché tale sistema è chiaramente incompatibile, le rette non sono incidenti. Quindi  $r$  ed  $s$  sono sghembe.

## 87 Geometria piana

Gli stessi ragionamenti usati per la geometria analitica delle rette e dei piani nello spazio, consentono (in maniera ancora più semplice) di trattare la geometria analitica delle rette in un piano. In questo paragrafo facciamo un elenco dei risultati e delle definizioni di base di geometria analitica piana. Le definizioni e le dimostrazioni sono analoghe a (e anzi più semplici di) quelle date per lo spazio. Al termine faremo anche vedere che, per il piano, il concetto elementare di coefficiente angolare gioca lo stesso ruolo dei numeri direttori.

**Definizione 184** Sia  $r$  una retta contenuta in un piano  $\pi$ . Fissato un riferimento  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$  di  $\pi$ , le componenti  $(l, m)$  di un vettore direzionale di  $r$  (rispetto al riferimento vettoriale  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ ) vengono dette numeri direttori (o parametri direttori) di  $r$ , rispetto al riferimento  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ .

**Osservazione 98** Le coppie di numeri direttori sono non nulle e tutte proporzionali tra loro.

**Proposizione 159** Sia  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$  un riferimento di un piano  $\pi$ , sia  $P_0$  un punto di coordinate  $(x_0, y_0)$ , sia  $\mathbf{v}$  un vettore non nullo di componenti  $(l, m)$  e sia  $r$  la retta contenente  $P_0$  e parallela a  $\mathbf{v}$ . Se  $P$  è un qualunque punto di  $\pi$  e  $(x, y)$  sono le sue coordinate, si ha

$$P \in r \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

**Definizione 185** L'affermazione

$$P \in r \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

viene sinteticamente espressa dicendo che

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

sono le equazioni parametriche (o una rappresentazione parametrica) della retta  $r$  rispetto al riferimento  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ , con parametro  $t$ .

**Osservazione 99** Fissato un riferimento  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$  di un piano  $\pi$ , ogni retta  $r \subset \pi$  può essere rappresentata con delle equazioni parametriche.

**Osservazione 100** Se  $x_0, y_0, l, m$  sono numeri reali, con  $l, m$  non entrambi nulli, allora scrivendo

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

si ottiene sempre una rappresentazione parametrica di qualche retta: di quella passante per il punto di coordinate  $(x_0, y_0)$  e parallela al vettore di componenti  $(l, m)$ .

**Proposizione 160** Sia  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$  un riferimento di un piano  $\pi$  e sia  $r \subset \pi$  una retta. Allora esistono  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tali che, se  $P$  è un qualunque punto di  $\pi$  e  $(x, y)$  sono le sue coordinate, si ha

$$P \in r \iff ax + by + c = 0.$$

Inoltre  $a$  e  $b$  non possono essere entrambi nulli.

**Definizione 186** Nella situazione della proposizione ora dimostrata, l'affermazione

$$P \in r \iff ax + by + c = 0,$$

viene sinteticamente espressa dicendo che

$$ax + by + c = 0$$

è un'equazione cartesiana (ordinaria) della retta  $r$  nel riferimento  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ .

In sintesi, l'insieme delle terne di coordinate dei punti di  $r$  coincide con l'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare

$$ax + by + c = 0.$$

**Proposizione 161** Una qualsiasi equazione del tipo  $ax + by + c = 0$ , in un fissato riferimento di un piano  $\pi$ , con  $(a, b) \neq (0, 0)$  rappresenta sempre una retta contenuta in  $\pi$ , e se due equazioni di questo tipo rappresentano lo stessa retta allora sono l'una multiplo dell'altra.

**Proposizione 162** Siano  $r$  ed  $r'$  rette contenute in un piano  $\pi$ . Fissato un riferimento di  $\pi$ , sia  $(l, m)$  una coppia di numeri direttori di  $r$  e sia  $(l', m')$  una coppia di numeri direttori di  $r'$ . Si ha:

$$r \text{ ed } r' \text{ sono parallele} \iff (l, m) \text{ ed } (l', m') \text{ sono proporzionali.}$$

**Proposizione 163** Fissato un riferimento di un piano  $\pi$ , sia  $r$  una retta contenuta in  $\pi$  con numeri direttori  $(l, m)$  e sia  $s$  una retta contenuta in  $\pi$  di equazione cartesiana  $ax + by + c = 0$ .

Si ha:

$$r \text{ ed } r' \text{ sono parallele} \iff al + bm = 0.$$

**Proposizione 164** Fissato un riferimento di un piano  $\pi$ , siano  $r$  ed  $r'$  rette contenute in  $\pi$  di equazioni cartesiane rispettivamente

$$ax + by + c = 0 \quad \text{e} \quad a'x + b'y + c' = 0.$$

Si ha:

$$r \text{ ed } r' \text{ sono parallele} \iff (a, b) \text{ ed } (a', b') \text{ sono proporzionali.}$$

**Definizione 187** Sia fissato in un piano  $\pi$  un riferimento monometrico ortogonale. I coseni direttori di una retta  $r$  contenuta in  $\pi$  sono le componenti di un versore parallelo ad  $r$ . I coseni direttori di una retta orientata  $\vec{r}$  contenuta in  $\pi$  sono le componenti di un versore parallelo e concorde ad  $\vec{r}$ .

**Proposizione 165** Sia  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$  un riferimento monometrico ortogonale di un piano  $\pi$ , sia  $\vec{r}$  una retta orientata contenuta in  $\pi$  e siano  $(\lambda, \mu)$  i suoi coseni direttori. Detti  $\vec{x}, \vec{y}$  i due assi del riferimento (considerati come rette orientate), si ha:

$$\lambda = \cos \widehat{\vec{r}\vec{x}}, \quad \mu = \cos \widehat{\vec{r}\vec{y}}.$$

**Definizione 188** Se  $r$  è una retta contenuta in un piano  $\pi$ , un vettore non nullo ortogonale ad  $r$  e parallelo a  $\pi$ , sarà detto normale ad  $r$  in  $\pi$ .

**Proposizione 166** Fissato un riferimento monometrico ortogonale in un piano  $\pi$ , sia  $r$  una retta contenuta in  $\pi$ . Una coppia  $(a, b)$  è la coppia di componenti di un vettore normale ad  $r$  in  $\pi$  se e solo se  $r$  ha un'equazione cartesiana con  $(a, b)$  rispettivamente coefficienti di  $x$  e  $y$  (cioè  $ax + by + c = 0$ ).

**Proposizione 167** Fissato in un piano  $\pi$  un riferimento monometrico ortogonale, siano  $r$  ed  $r'$  rette contenute in  $\pi$ , con numeri direttori rispettivamente  $(l, m)$  ed  $(l', m')$ . Allora si ha:

$$r \text{ ed } r' \text{ perpendicolari} \iff ll' + mm' = 0.$$

**Proposizione 168** Fissato in un piano  $\pi$  un riferimento monometrico ortogonale, sia  $r$  una retta contenuta in  $\pi$  con numeri direttori  $(l, m)$  e sia  $s$  una retta di equazione cartesiana  $ax + by + c = 0$ .

Si ha:

$$r \text{ ed } r' \text{ perpendicolari} \iff (a, b) \text{ ed } (l, m) \text{ sono proporzionali.}$$

**Proposizione 169** Fissato in un piano  $\pi$  un riferimento monometrico ortogonale, siano  $r$  ed  $r'$  rette contenute in  $\pi$  di equazioni cartesiane rispettivamente

$$ax + by + c = 0 \quad e \quad a'x + b'y + c' = 0 .$$

Allora si ha:

$$r \text{ ed } r' \text{ perpendicolari} \iff aa' + bb' = 0 .$$

**Proposizione 170** Sia fissato in un piano  $\pi$  un riferimento monometrico ortogonale. Per ogni vettore libero  $\mathbf{v}$  parallelo a  $\pi$ , dette  $(l, m)$  le sue componenti, si ha

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{l^2 + m^2} .$$

**Proposizione 171** Sia fissato in un piano  $\pi$  un riferimento monometrico ortogonale. Se  $P$  e  $P'$  sono punti di  $\pi$ , di coordinate rispettivamente  $(x, y)$  ed  $(x', y')$  allora la distanza tra  $P$  e  $P'$  è data da

$$d(P, P') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} .$$

**Osservazione 101** Sia fissato in un piano  $\pi$  un riferimento, sia  $r$  una retta contenuta in  $\pi$  non parallela all'asse  $y$  e sia  $(l, m)$  una coppia di numeri direttori di  $r$ . Siccome  $r$  non è parallela all'asse  $y$ , si ha  $l \neq 0$ . Dunque ha senso il rapporto

$$\frac{m}{l} .$$

Poiché le coppie di numeri direttori di  $r$  sono tutte proporzionali, tale numero non dipende dalla scelta di  $(l, m)$ , ma solo dalla retta  $r$  (e dal riferimento fissato).

**Definizione 189** Sia fissato in un piano  $\pi$  un riferimento e sia  $r$  una retta contenuta in  $\pi$  non parallela all'asse  $y$ . Allora il numero reale

$$\frac{m}{l}$$

si dice coefficiente angolare di  $r$  rispetto al riferimento fissato.

Per le rette parallele all'asse  $y$ , si può assumere coefficiente angolare infinito.

**Osservazione 102** Una retta  $r$  ha coefficiente angolare  $m$  se e solo se  $(1, m)$  è una coppia di numeri direttori di  $r$ .

**Osservazione 103** Sia fissato un riferimento in un piano  $\pi$  e sia  $r$  una retta contenuta in  $\pi$  non parallela all'asse  $y$ . Per la Proposizione 163, se  $r$  ha equazione cartesiana  $ax + by + c = 0$ , allora il coefficiente angolare di  $r$  è dato da

$$-\frac{a}{b} .$$

Dalla Proposizione 162 discende subito la seguente proposizione.

**Proposizione 172** *Siano  $r$  ed  $r'$  rette con rispettivi coefficienti angolari  $m$  ed  $m'$ . Allora  $r$  ed  $r'$  sono parallele se e solo se  $m = m'$ .*

Dalla Proposizione 167 discende subito la seguente proposizione.

**Proposizione 173** *Siano  $r$  ed  $r'$  rette con rispettivi coefficienti angolari  $m$  ed  $m'$ . Allora  $r$  ed  $r'$  sono perpendicolari se e solo se  $mm' = -1$ .*

## 88 Coniche

**Definizione 190** *Sia  $\pi$  un piano, siano  $F_1$  ed  $F_2$  punti di  $\pi$  e sia  $a$  un numero reale tale che*

$$a > \frac{1}{2}d(F_1, F_2).$$

*L'insieme*

$$E = \{P \in \pi : d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$$

*si chiama ellisse di fuochi  $F_1, F_2$  e semiasse maggiore  $a$ .*

**Osservazione 104** *Un'ellisse con i fuochi coincidenti si riduce ad una circonferenza.*

**Proposizione 174** *Sia  $E$  un'ellisse in un piano  $\pi$ , di fuochi  $F_1, F_2$  e semiasse maggiore  $a$ . Sia  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$  un riferimento monometrico ortogonale in  $\pi$  con origine uguale al punto medio di  $F_1, F_2$  (cioè l'unico punto allineato con tali punti ed equidistante da essi) e con versore  $\mathbf{i}$  parallelo al vettore  $F_2 - F_1$  (cioè con l'asse  $x$  contenente i fuochi). Allora un punto  $P$  di coordinate  $(x, y)$  appartiene ad  $E$  se e solo se*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

*con*

$$b^2 = a^2 - \left(\frac{1}{2}d(F_1, F_2)\right)^2.$$

Tralasciamo la dimostrazione.

**Definizione 191** *Sia  $\pi$  un piano, siano  $F_1$  ed  $F_2$  punti di  $\pi$  e sia  $a$  un numero reale tale che*

$$0 < a < \frac{1}{2}d(F_1, F_2).$$

*L'insieme*

$$I = \{P \in \pi : |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$$

*si chiama iperbole di fuochi  $F_1, F_2$  e semiasse  $a$ .*

**Proposizione 175** *Sia  $I$  un'iperbole in un piano  $\pi$ , di fuochi  $F_1, F_2$  e semiasse  $a$ . Sia  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$  un riferimento monometrico ortogonale in  $\pi$  con origine uguale al punto medio di  $F_1, F_2$  e con versore  $\mathbf{i}$  parallelo al vettore  $F_2 - F_1$ . Allora un punto  $P$  di coordinate  $(x, y)$  appartiene ad  $I$  se e solo se*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 ,$$

con

$$b^2 = \left( \frac{1}{2}d(F_1, F_2) \right)^2 - a^2 .$$

Tralasciamo la dimostrazione.

**Osservazione 105** *Siano  $P$  un punto ed  $r$  una retta contenuti in un piano  $\pi$ , con  $F \notin r$ . Detta  $s$  l'unica retta passante per  $P$  e perpendicolare ad  $r$ , sia  $H$  il punto d'intersezione di  $r$  ed  $s$ . Per il teorema di Pitagora, la distanza di  $P$  da  $H$  è minore della distanza di  $P$  da ogni altro punto di  $r$ .*

**Definizione 192** *Siano  $P, r$  ed  $H$  come prima. Si definisce distanza di  $P$  da  $r$  la distanza di  $P$  da  $H$ . Tale distanza sarà denotata con  $d(P, r)$ .*

**Definizione 193** *Sia  $\pi$  un piano, sia  $F$  un punto ed  $r$  una retta contenuti in  $\pi$ , con  $P \notin r$ . L'insieme*

$$C = \{P \in \pi : d(P, F) = d(P, r)\}$$

*si chiama parabola di fuoco  $F$  e direttrice  $r$ .*

**Proposizione 176** *Sia  $C$  una parabola in un piano  $\pi$ , di fuoco  $F$  e direttrice  $r$ . Detto  $H$  il punto d'intersezione di  $r$  con la perpendicolare ad  $r$  passante per  $F$ , sia  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$  un riferimento monometrico ortogonale in  $\pi$  con origine uguale al punto medio di  $F$  ed  $H$  e con versore  $\mathbf{i}$  parallelo e concorde ad  $F - H$ . Allora un punto  $P$  di coordinate  $(x, y)$  appartiene a  $C$  se e solo se*

$$2px - y^2 = 0 ,$$

con

$$p = d(F, r) .$$

Tralasciamo la dimostrazione.

**Osservazione 106** *Abbiamo visto che ellissi, iperboli e parabole sono tutte rappresentate, in opportuni riferimenti, da equazioni di secondo grado in due variabili. Tenendo presenti le formule del cambio di riferimento (cfr. Proposizione 132 a pag. 139), che sono date da polinomi di primo grado, si ha che in un riferimento qualunque, ellissi iperboli e parabole sono ancora rappresentate da equazioni di secondo grado.*

**Definizione 194** Consideriamo un polinomio in due variabili di grado minore o uguale a 2, cioè una funzione

$$p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

del tipo

$$(x, y) \longmapsto ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

con  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ ,  $a, b, c$  non tutti nulli.

Fissato un riferimento di un piano, chiameremo conica l'insieme  $\Gamma$  di tutti i punti le cui coordinate sono soluzioni dell'equazione

$$p(x, y) = 0 .$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}$$

si dice matrice associata a  $p$ , o anche matrice associata a  $\Gamma$ .

**Esempio 71** Fissato un riferimento in un piano, consideriamo il polinomio  $p$  dato da

$$p(x, y) = xy .$$

La conica rappresentata dall'equazione  $p(x, y) = 0$  è chiaramente l'unione dei due assi del riferimento. La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

**Osservazione 107** Sia  $A$  la matrice associata ad un polinomio  $p$  in due variabili di grado minore o uguale a 2, e sia  $q$  la forma quadratica su  $\mathbb{R}^3$  data da

$$q(X) = X^t A X$$

(considerando i vettori  $X \in \mathbb{R}^3$  come matrici colonna).

Allora si ha

$$p(x, y) = q(x, y, 1) .$$

Molte proprietà della conica di equazione  $p(x, y) = 0$  possono essere dedotte dalle proprietà della forma quadratica  $q$ . Altre importanti informazioni possono essere dedotte da un'altra forma quadratica su  $\mathbb{R}^2$  che si può associare a  $p$ .

**Osservazione 108** Siano  $p, q$  ed  $A$  come nell'osservazione precedente. L'applicazione

$$q' : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

data da

$$q'(x, y) = q(x, y, 0) .$$

è una forma quadratica: infatti posto  $A' = A_{\{1,2\},\{1,2\}}$  e  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , si ha

$$q'(x, y) = X^t A' X .$$

Notiamo inoltre che se  $p$  è dato da

$$(x, y) \mapsto ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

allora  $q'$  è dato da

$$(x, y) \mapsto ax^2 + bxy + cy^2 ,$$

cioè dai termini di secondo grado del polinomio  $p$ .

**Proposizione 177** *Siano  $p$ ,  $q$  e  $q'$  come prima, e sia  $\Gamma$  la conica data dall'equazione*

$$p(x, y) = 0 .$$

Allora  $\Gamma$  è un'ellisse, un'iperbole o una parabola se e solo se  $q$  è non degenera e  $\Gamma$  è non vuota. Inoltre in tal caso si ha:

- $\Gamma$  è un'ellisse  $\iff$  la segnatura di  $q'$  è  $(2, 0)$  o  $(0, 2)$
- $\Gamma$  è un'iperbole  $\iff$  la segnatura di  $q'$  è  $(1, 1)$
- $\Gamma$  è una parabola  $\iff$  la segnatura di  $q'$  è  $(1, 0)$  o  $(0, 1)$

Tralasciamo la dimostrazione.

È anche utile la seguente proposizione.

**Proposizione 178** *Siano  $p$ ,  $q$  e  $q'$  come prima, e sia  $\Gamma$  la conica data dall'equazione*

$$p(x, y) = 0 .$$

Se  $q$  è non degenera e la segnatura di  $q'$  è  $(1, 0)$ , o  $(0, 1)$ , oppure  $(1, 1)$ , allora  $\Gamma$  è non vuota.

Nello spazio, gli insiemi rappresentati da equazioni di secondo grado in tre variabili si chiamano *quadriche*. Lo studio delle quadriche è analogo a (ma più ricco di) quello delle coniche: lo strumento principale per tale studio sono ancora le forme quadratiche.

Le condizioni espresse nella Proposizione 178, utili al riconoscimento del tipo di conica, sono espresse in termini di segnatura, in quanto questa forma è quella che, generalizzata per le dimensioni superiori, permette una migliore classificazione. Nel caso delle coniche (e solo in questo caso), detta  $A'$  la matrice associata a  $q'$  (cioè  $A' = A_{\{1,2\},\{1,2\}}$ , con  $A$  matrice associata a  $q$ ), queste condizioni sulla segnatura di  $q'$  sono equivalenti alle seguenti, più semplici:

- $\Gamma$  è un'ellisse  $\iff |A'| > 0$
- $\Gamma$  è un'iperbole  $\iff |A'| < 0$
- $\Gamma$  è una parabola  $\iff |A'| = 0$

## 89 Esempi di prove d'esame

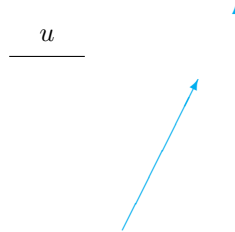
**Esempio 72** Entro due ore e mezza, si risponda ai quesiti da 1 a 9 e ci si prepari ad esporre oralmente le dimostrazioni richieste nei punti da 10 a 12. È permesso consultare gli appunti delle lezioni. Sono a disposizione righello numerato e squadretta per i quesiti "grafici".

1. Siano  $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{b} = (0, 1, -2)$ ,  $\mathbf{c} = (3, 0, 1)$  vettori dello spazio  $\mathbb{R}^3$ .  
Calcolare

$$2\mathbf{a} + 2(\mathbf{c} - 3\mathbf{b})$$

[1 punto]

2. Fissata come unità di misura la lunghezza del segmento  $u$  indicato qui sotto, determinare il prodotto scalare (geometrico) dei vettori liberi rappresentati dai segmenti orientati disegnati qui sotto.



[2 punti]

3. Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, sia  $r$  la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$$

e sia  $\pi$  il piano di equazione

$$2x - y + 3z + 9\sqrt{2} = 0.$$

La retta  $r$  e il piano  $\pi$  sono paralleli? Sono ortogonali? [1 punto]

4. Calcolare il seguente determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

[2 punti]

5. Risolvere col metodo di Gauss il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 3 \\ 2x + y - 3z = -1 \\ 4x - y - 2z = 2 \end{cases}$$

[2 punti]

6. Sia

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

l'applicazione data da

$$(x, y, z) \xrightarrow{f} (x + y - 2z, 3y).$$

Dire se  $f$  è un'applicazione lineare, motivando la risposta. In caso affermativo, scrivere la matrice associata ad  $f$  rispetto alle basi

$$\mathcal{B} = ( (2, 1, 3), (0, 1, 0), (1, 1, 2) ) \quad e \quad \mathcal{B}' = ( (1, 1), (0, 2) ).$$

[4 punti]

7. Dire (motivando la risposta) se la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile.

[3 punti]

8. Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, sia  $P$  il punto di coordinate  $(1, 2, 1)$  e  $\pi$  il piano di equazione

$$2x - y + z + 2 = 0.$$

Scrivere delle equazioni parametriche della retta  $r$  perpendicolare a  $\pi$  e passante per  $P$  e un'equazione cartesiana del piano contenente  $r$  e parallelo al vettore di componenti  $(1, 1, 1)$ .

[4 punti]

9. Siano  $\alpha$  e  $\beta$  due piani propriamente paralleli, sia  $r$  una retta contenuta in  $\alpha$  ed  $s$  una retta contenuta in  $\beta$ . Quale delle seguenti eventualità è esclusa? Perché?

- $r$  ed  $s$  sono parallele.
- $r$  ed  $s$  sono incidenti.
- $r$  ed  $s$  sono sghembe.

[2 punti]

10. Sia  $V$  uno spazio vettoriale e sia  $S = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  un sistema di vettori linearmente indipendenti. Dimostrare che se la dimensione di  $V$  è uguale al numero  $n$  di vettori di  $S$ , allora  $S$  è una base di  $V$ . [3 punti]

11. Siano  $V$  e  $W$  spazi vettoriali finitamente generati, sia  $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  una base di  $V$  e sia  $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$  un qualunque sistema di vettori di  $W$ . Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare  $f : V \rightarrow W$  tale che

$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, \quad \dots, \quad f(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n.$$

[3 punti]

12. Esporre una dimostrazione semi-facoltativa (degli appunti del corso) a scelta. [punteggio indicato negli appunti]

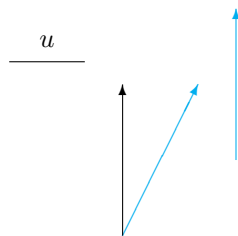
Riportiamo uno svolgimento del compito riportato sopra. Si tenga presente che alcune domande ammettono diverse possibili risposte e che anche quando la risposta è unica, ci si può arrivare in diversi modi. Infine, poiché la prova d'esame viene discussa subito, è inutile dilungarsi a scrivere: basta riportare i punti salienti per ogni quesito. Qui riportiamo qualche spiegazione in più, per scopi didattici.

1.

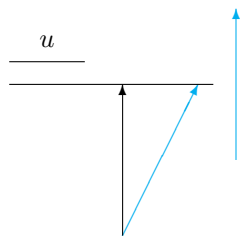
$$\begin{aligned} 2\mathbf{a} + 2(\mathbf{c} - 3\mathbf{b}) &= (2, 2, 0) + 2((3, 0, 1) - (0, 3, -6)) = \\ &= (2, 2, 0) + 2(3, -3, 7) = (2, 2, 0) + (6, -6, 14) = \end{aligned}$$

$$(8, -4, 14)$$

2. Con l'aiuto di righello numerato e squadretta, rappresentiamo i due vettori con la stessa origine (ad esempio, facendo scorrere la squadretta sul righello e poi misurando, disegniamo un segmento equipollente al secondo avente la stessa origine del primo).



Poi disegniamo la perpendicolare ad uno dei due segmenti, ad esempio quello ora disegnato, passante per la punta di quello rappresentante l'altro vettore (basta disporre il righello lungo il primo segmento e far scorrere la squadretta in modo da intercettare la punta del secondo).



In questo caso, la perpendicolare incontra la retta contenente il primo segmento, esattamente nella punta di tale segmento. La lunghezza del primo segmento rispetto ad  $u$  è 2 (basta ad esempio dividere la lunghezza in centimetri di detto segmento per la lunghezza in centimetri di  $u$ ). Dunque il voluto prodotto scalare è dato dal prodotto di 2 ancora per 2. Quindi la risposta è

4

3. I numeri direttori della retta  $r$  sono dati, nell'ordine, dai tre coefficienti del parametro  $t$ :

$$(-2, -1, 1) .$$

I parametri di giacitura del piano  $\pi$  sono dati, nell'ordine, dai tre coefficienti delle incognite:

$$(2, -1, 3) .$$

Per controllare se  $r$  e  $\pi$  sono paralleli, basta usare la Proposizione 142 a pag. 149:

$$(-2) \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = -4 + 1 + 3 = 0 .$$

Poiché la condizione è verificata,  $r$  e  $\pi$

sono paralleli .

Essendo paralleli,  $r$  e  $\pi$

non sono ortogonali .

Naturalmente, l'ortogonalità può anche essere controllata usando la Proposizione 158 a pag. 159: poiché non esiste nessun numero  $h$  tale che

$$(-2, -1, 1) = h(2, -1, 3)$$

(le condizioni  $-2 = 2h$ ,  $-1 = -h$  e  $3h = 1$  sono evidentemente incompatibili), le due terne non sono proporzionali, e quindi  $r$  e  $\pi$  non sono ortogonali.

4. Naturalmente, si può sviluppare il determinante come si preferisce (purché lo sviluppo sia corretto). In questo caso, suggeriamo di osservare che la terza e la quarta riga hanno molti termini uguali. Per la Proposizione 60 a pag. 60, si ha

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

e per la Proposizione 58 a pag. 60 l'ultimo determinante è nullo. Dunque basta calcolare

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

che è più comodo perché ha la quarta riga con molti zeri<sup>6</sup>.

Sviluppiamo dunque secondo la quarta riga:

$$\begin{aligned} -0 + 0 - 0 + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} &= \\ &= 2 \cdot \left( 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = 2 \cdot (4 - 8) = \\ & \quad -8 \end{aligned}$$

5. La matrice completa è

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Riduciamo a scalini:

$$\begin{array}{l} \mathbf{a}_2 \rightarrow \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \rightarrow \mathbf{a}_3 - 2\mathbf{a}_1 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mathbf{a}_3 \rightarrow \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

<sup>6</sup>Il ragionamento ora fatto mostra, più in generale, che una trasformazione elementare di terzo tipo lascia invariato il determinante. Attenzione però: questo non vale per le trasformazioni di primo tipo e per quelle descritte nell'Osservazione 84 a pag. 122, le quali hanno invece l'effetto di moltiplicare il determinante per  $h$ . Le trasformazioni di secondo tipo (su righe distinte) hanno l'effetto di cambiare il segno del determinante.

Dunque il sistema ridotto a scalini è

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 3 \\ 3y - 4z = -4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo a ritroso:

$$\begin{aligned} z &= t \\ y &= -\frac{4}{3} + \frac{4}{3}t \\ 2x - 2\left(-\frac{4}{3} + \frac{4}{3}t\right) + t &= 3 \rightarrow x = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}t \end{aligned}$$

L'insieme delle soluzioni è quindi

$$\left\{ \left( \frac{1}{6} + \frac{5}{6}t, -\frac{4}{3} + \frac{4}{3}t, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

6. L'applicazione  $f$  è uguale all'applicazione di moltiplicazione per la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

dunque è lineare per l'Esempio 45 a pag. 89.

Per costruire la matrice associata basta tenere presente la Proposizione 95 a pag. 91. Le immagini dei vettori di  $\mathcal{B}$  sono:

$$f(2, 1, 3) = (-3, 3), \quad f(0, 1, 0) = (1, 3), \quad f(1, 1, 2) = (-2, 3).$$

Calcoliamo le componenti di  $(-3, 3)$  rispetto a  $\mathcal{B}'$ . Dobbiamo trovare  $h, k$  tali che

$$(-3, 3) = h(1, 1) + k(0, 2).$$

Siccome

$$h(1, 1) + k(0, 2) = (h, h + 2k),$$

dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} h = -3 \\ h + 2k = 3 \end{cases}$$

Abbiamo

$$h = -3 \quad k = 3.$$

Dunque la prima colonna della matrice voluta è

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Allo stesso modo, per le componenti di  $(1, 3)$  dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} h = 1 \\ h + 2k = 3 \end{cases}$$

Abbiamo

$$h = 1 \quad k = 1 .$$

Per le componenti di  $(-2, 3)$  otteniamo (sempre allo stesso modo)

$$h = -2 \quad k = \frac{5}{2} .$$

Dunque la voluta matrice associata è

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} .$$

Come metodo alternativo, visto che abbiamo già osservato che  $f$  è la moltiplicazione per la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} ,$$

e visto che allora  $A$  è la matrice associata ad  $f$  rispetto alle basi standard, possiamo calcolare il prodotto

$$BAC ,$$

dove  $B$  è la matrice del cambio di base dalla base standard di  $\mathbb{R}^2$  alla base  $\mathcal{B}'$  e  $C$  è la matrice del cambio di base dalla base  $\mathcal{B}$  alla base standard di  $\mathbb{R}^3$ . La matrice  $C$  è quindi semplicemente quella che ha per colonne (nell'ordine) i vettori di  $\mathcal{B}$ :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

La matrice  $B$  si può anche ottenere come matrice inversa della matrice che ha per colonne i vettori di  $\mathcal{B}'$ . Tenendo presente la Proposizione 66 a pag. 62, si ha

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Calcoliamo quindi il prodotto  $BAC$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

7. Conviene usare la Proposizione 110 a pag. 103. Troviamo quindi gli autovalori. Il polinomio caratteristico è dato dal determinante

$$\begin{vmatrix} 1-t & 4 & 2 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & -4 & -2-t \end{vmatrix}.$$

Sviluppando nel modo che si preferisce, otteniamo il polinomio

$$-t^3 - t^2 + 6t.$$

Le radici sono 0, 2 e  $-3$  ciascuna con molteplicità 1 (non ci sono quindi radici complesse non reali). Dunque gli autovalori sono 0, 2 e  $-3$ , ciascuno con molteplicità algebrica 1. Le molteplicità geometriche devono essere allora tutte  $\leq 1$ , ma poiché non possono essere nulle (perché gli autospazi sono per forza non nulli), esse sono tutte uguali ad 1, e quindi uguali alle rispettive molteplicità algebriche. La Proposizione 110 a pag. 103 assicura dunque che la matrice

è diagonalizzabile

8. I parametri di giacitura di  $\pi$  sono  $(2, -1, 1)$ . Siccome il riferimento è monometrico ortogonale, per la Proposizione 158 a pag. 159, la retta  $r$  deve avere numeri direttori proporzionali a  $(2, -1, 1)$ . Basta dunque considerare la retta passante per  $P$  e avente numeri direttori  $(2, -1, 1)$ , le cui equazioni parametriche si scrivono subito (cfr. Osservazione 91 a pag. 142):

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}.$$

Il piano contenente  $r$  e parallelo al vettore di componenti  $(1, 1, 1)$  deve passare per  $P$  ed essere parallelo (oltre che al vettore di componenti  $(1, 1, 1)$ ) al vettore di componenti  $(2, -1, 1)$ . Viceversa, un tale piano contiene sicuramente  $r$ . Dunque basta trovare un'equazione del piano passante per  $P$  (di coordinate  $(1, 2, 1)$ ) e parallelo ai vettori di componenti  $(2, -1, 1)$  e  $(1, 1, 1)$ . Come abbiamo visto per l'Esercizio 56 a pag. 160, tale equazione si può ottenere calcolando il determinante

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Sviluppando nel modo che si preferisce, si ha

$$-2x - y + 3z + 1 = 0$$

9. La prima eventualità si può certamente presentare: se  $\pi$  è un qualunque piano non parallelo ad  $\alpha$  e  $\beta$ , le intersezioni di  $\pi$  con  $\alpha$  e  $\beta$  sono rette parallele (sono contenute entrambe in  $\pi$  e non si incontrano perché  $\alpha$  e  $\beta$  non si incontrano).

La seconda eventualità non si può presentare, perché  $\alpha$  e  $\beta$  non si incontrano (un punto comune ad  $r$  ed  $s$  sarebbe anche comune ad  $\alpha$  e  $\beta$ ).

La terza eventualità si può presentare: se  $r$  è una qualunque retta in  $\alpha$ , basta prendere  $s \subset \beta$  non parallela ad  $r$  (essendo quindi  $r$  ed  $s$  non incidenti e non parallele, esse sono sghembe).

10. (orale) È l'Esercizio 46 a pag. 98. Seguendo il suggerimento dato subito dopo, la dimostrazione non presenta difficoltà (in caso di problemi, consultare il docente in orario di spiegazioni).
11. (orale) Vedi Proposizione 96 a pag. 91.
12. (orale)

**Esempio 73** Entro due ore e mezza, si risponda ai quesiti da 1 a 9 e ci si prepari ad esporre oralmente le dimostrazioni richieste nei punti da 10 a 12. È permesso consultare gli appunti delle lezioni. Sono a disposizione righello numerato e squadretta per i quesiti "grafici".

1. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare

$$CA - 2CB.$$

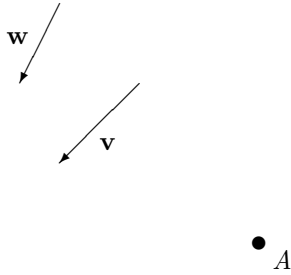
[2 punti]

2. Detti  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  i vettori liberi rappresentati dai segmenti orientati disegnati qui di seguito, disegnare un rappresentante del vettore

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - 2\mathbf{w}$$

e il punto

$$B = A - \mathbf{u}$$



[1 punto]

3. Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, siano  $r$  ed  $s$  rappresentate da

$$r : \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 - t \\ z = 2 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4t \\ z = 1 - t \end{cases} .$$

Le rette  $r$  ed  $s$  sono parallele? Sono ortogonali? [1 punto]

4. Calcolare il rango della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

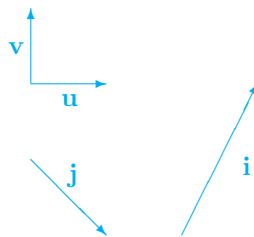
[2 punti]

5. Risolvere col metodo di Gauss il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 3x - 2y - z = -4 \\ 2x + y - 3z = -5 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

[2 punti]

6. Sia  $\mathcal{W}$  lo spazio direttore del piano contenente il presente foglio. Scrivere la matrice del cambio di base da  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  a  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , dove tali vettori sono rappresentati dai segmenti orientati disegnati qui di seguito.



[4 punti]

7. Dire (motivando la risposta) se l'endomorfismo

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

dato da

$$(x, y) \xrightarrow{f} (0, x)$$

è diagonalizzabile.

[3 punti]

8. Fissato in un piano un riferimento monometrico ortogonale, determinare il punto d'intersezione  $P$  delle rette

$$r : x - y - 2 = 0, \quad s : 2x + y - 7 = 0$$

e trovare uno dei punti che hanno distanza 2 da  $P$ .

[3 punti]

9. Sia  $\mathcal{V}$  lo spazio dei vettori liberi, siano fissate un'orientazione e un'unità di misura e sia  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$  un riferimento monometrico ortogonale tale che la base  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  sia concorde all'orientazione fissata. Trovare la matrice associata alla forma bilineare

$$\phi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

data da

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \xrightarrow{\phi} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{i}) \cdot \mathbf{v},$$

rispetto alla base  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ .

[3 punti]

10. Sia  $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$  un riferimento dello spazio e siano  $P, P'$  punti di coordinate rispettivamente  $(x, y, z)$  e  $(x', y', z')$ . Dimostrare che le componenti del vettore  $P' - P$  sono

$$(x' - x, y' - y, z' - z).$$

[3 punti]

11. Sia  $V$  uno spazio vettoriale, sia  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  un sistema di vettori e sia  $\mathbf{v}$  un vettore di  $V$ . Supponiamo che si abbia:

- il sistema  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  è linearmente indipendente;
- il sistema  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v})$  è linearmente dipendente.

Dimostrare che il vettore  $\mathbf{v}$  dipende dal sistema  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ . [3 punti]

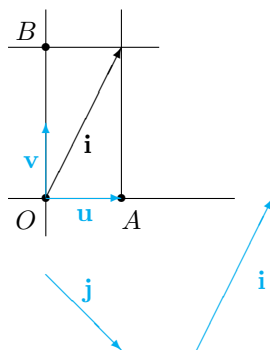
12. Esporre una dimostrazione semi-facoltativa (degli appunti del corso) a scelta. [punteggio indicato negli appunti]

Per questo compito e per i successivi riporteremo uno svolgimento solo per alcuni esercizi. Inoltre, per alcuni degli altri riporteremo solo la risposta (o, nel caso di più risposte possibili, una risposta).

1. Risposta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

6. È utile tenere presente l'Osservazione 57 a pag. 93. Dunque tutto sta a trovare le componenti di  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  rispetto alla base  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ . Con l'aiuto di righello e squadretta, riportiamo dei segmenti rappresentanti  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  tutti con la stessa origine (chiamiamola  $O$ ), tracciamo le rette contenenti i rappresentanti di  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , e le rispettive parallele passanti per la punta del rappresentante di  $\mathbf{i}$ :



Detti  $A$  e  $B$  i punti indicati in figura, misurando  $\overline{OA}$  rispetto alla lunghezza di  $\mathbf{u}$  e  $\overline{OB}$  rispetto alla lunghezza di  $\mathbf{v}$ , e tenendo presenti i versi, otteniamo

$$\mathbf{i} = \mathbf{u} + 2\mathbf{v} .$$

Quindi le componenti di  $\mathbf{i}$  rispetto alla base  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  sono

$$(1, 2) .$$

Allo stesso modo si trovano le componenti di  $\mathbf{j}$ :

$$(1, -1) .$$

Dunque, per l'Osservazione 57 a pag. 93, la voluta matrice del cambio di base è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

7. La matrice associata ad  $f$  rispetto alla base standard di  $\mathbb{R}^2$  è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Detta  $A_t$  la matrice definita come nell'Osservazione 68 a pag. 100, il polinomio caratteristico è dato da

$$|A_t| = \begin{vmatrix} -t & 0 \\ 1 & -t \end{vmatrix} = t^2 .$$

L'unica radice è 0, con molteplicità 2. Dunque c'è solo l'autovalore 0 con molteplicità algebrica 2. La molteplicità geometrica è data da

$$2 - \text{rk } A_0 .$$

Poiché  $A_0 = A$ , ed  $A$  ha rango 1, la molteplicità geometrica dell'autovalore 0 è 1. Dunque, sebbene non esistano radici non reali del polinomio caratteristico, una molteplicità geometrica non è uguale alla rispettiva molteplicità algebrica. Dunque non è soddisfatta la seconda condizione della Proposizione 110 a pag. 103, quindi l'endomorfismo  $f$

non è diagonalizzabile .

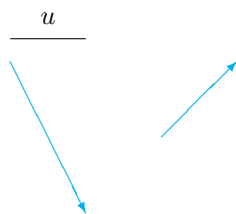
**Esempio 74** Entro due ore e mezza, si risponda ai quesiti da 1 a 9 e ci si prepari ad esporre oralmente le dimostrazioni richieste nei punti da 10 a 12. È permesso consultare gli appunti delle lezioni. Sono a disposizione righello numerato e squadretta per i quesiti "grafici".

1. Siano  $\mathbf{a} = (1, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (0, 2)$ ,  $\mathbf{c} = (-4, 3)$  vettori dello spazio  $\mathbb{R}^2$ . Calcolare

$$((\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}$$

[1 punto]

2. Fissata l'unità di misura  $u$  indicata, determinare il modulo del prodotto vettoriale dei vettori liberi rappresentati dai segmenti orientati disegnati qui di seguito.



[2 punti]

3. Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, trovare i coseni direttori della retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = \sqrt{2} - 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

[1 punto]

4. Trovare le componenti del vettore numerico  $(1, 2, 1)$  rispetto alla base

$$((3, 0, 2), (1, 1, 1), (0, 4, 1))$$

(assumendo per dato che è effettivamente una base di  $\mathbb{R}^3$ ). [2 punti]

5. Risolvere con la regola di Cramer il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ x + y + 3z = 8 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

[2 punti]

6. Sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  dato dalla moltiplicazione per la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Trovare una base del nucleo di  $f$  e una base dell'immagine di  $f$ . [4 punti]

7. Trovare autovalori ed autovettori dell'endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  dato da

$$(x, y) \mapsto (2x - 3y, -2x - 3y)$$

e dire se è diagonalizzabile (motivando la risposta). [3 punti]

8. Fissato un riferimento monometrico ortogonale dello spazio, sia  $P$  il punto di coordinate  $(1, 0, 0)$  e siano  $r$  e  $\pi$  la retta e il piano rappresentati da

$$r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y = 2 \end{cases} \quad \pi : \begin{cases} x = 1 + 4t + s \\ y = t - s \\ z = 5 - s \end{cases}.$$

Rappresentare la retta passante per  $P$ , ortogonale ad  $r$  e parallela a  $\pi$ . [4 punti]

9. Scrivere una matrice a scalini (diversa da quelle riportate negli appunti) e una matrice non a scalini. [2 punti]
10. Dimostrare che il nucleo di un'applicazione lineare  $f$  è un sottospazio del dominio di  $f$ . [3 punti]

11. Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare biettiva. Dimostrare che l'applicazione inversa  $f^{-1} : W \rightarrow V$  è lineare. [3 punti]
12. Esporre una dimostrazione semi-facoltativa (degli appunti del corso) a scelta. [punteggio indicato negli appunti]

Alcuni svolgimenti e risposte:

1. Risposta:

$$12$$

2. Risposta:

$$3$$

3. Una risposta (le possibili terne sono due):

$$\left( -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

- 4.

$$(1, -2, 1).$$

6. Il nucleo è semplicemente l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ y + 3z = 0 \\ 2x - 3y - 6z = 0 \end{cases}.$$

Basta usare il metodo del Paragrafo 69. Le soluzioni del sistema sono

$$\left\{ \left( -\frac{3}{2}t, -3t, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Poiché

$$\left( -\frac{3}{2}t, -3t, t \right) = t \left( -\frac{3}{2}, -3, 1 \right),$$

Una base del nucleo è

$$\left( \left( -\frac{3}{2}, -3, 1 \right) \right).$$

Per l'immagine, notiamo che un qualunque vettore di  $\text{Im } f$  è del tipo

$$f(x, y, z) = (2x - y, y + 3z, 2x - 3y - 6z).$$

Poiché

$$(2x - y, y + 3z, 2x - 3y - 6z) = x(2, 0, 2) + y(-1, 1, -3) + z(0, 3, -6),$$

abbiamo che

$$((2, 0, 2), (-1, 1, -3), (0, 3, -6))$$

è un sistema di generatori dell'immagine. Non sappiamo però se il sistema è linearmente indipendente. Basta allora usare i metodi esposti nel Paragrafo 44: se consideriamo la matrice che ha per righe i vettori  $(2, 0, 2)$ ,  $(-1, 1, -3)$  e  $(0, 3, -6)$ , un sistema massimo di righe darà una base.

In effetti, se notiamo che il sistema ottenuto è proprio il sistema delle colonne della matrice data (ci si poteva arrivare anche ragionando come per la Proposizione 98 pag. 92), basta trovare un sistema massimo di colonne di

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Usando il teorema degli orlati, abbiamo che una base di  $\text{Im } f$  è data da

$$((2, 0, 2), (-1, 1, -3)).$$

Le osservazioni ora fatte valgono in generale: per trovare una base dell'immagine dell'omomorfismo di moltiplicazione per una matrice  $A$ , basta trovare col teorema degli orlati un sistema massimo di colonne di  $A$ .

Infine, tornando all'esercizio presente, possiamo notare che in questo caso la base si poteva trovare anche in maniera più veloce. Infatti, siccome la dimensione di  $\text{Ker } f$  è 1, la dimensione di  $\text{Im } f$  deve essere  $3 - 1 = 2$ . Dunque bastava prendere due qualunque colonne non proporzionali tra loro.

7. Detto  $f$  l'endomorfismo, la matrice associata ad  $f$  rispetto alla base standard di  $\mathbb{R}^2$  è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Detta  $A_t$  la matrice definita come nell'Osservazione 68 a pag. 100, il polinomio caratteristico è dato da

$$|A_t| = \begin{vmatrix} 2-t & -3 \\ -2 & -3-t \end{vmatrix} = t^2 + t - 12$$

Le radici sono

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2},$$

cioè 3 e  $-4$ . Quindi gli autovalori sono

$$3 \quad \text{e} \quad -4,$$

ciascuno con molteplicità algebrica 1.

Per l'Osservazione 67 a pag. 99, gli autovettori relativi a 3 sono i vettori non nulli del nucleo di  $f_3$ . Poiché  $f_3$  è la moltiplicazione per la matrice

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

basta trovare le soluzioni non nulle del sistema

$$\begin{cases} -x - 3y = 0 \\ -2x - 6y = 0 \end{cases} .$$

Risolvendo, si ha che l'insieme degli autovettori relativi a 3 è

$$\{ (-3h, h) : h \in \mathbb{R} - \{0\} \} .$$

Per gli autovettori relativi a -4, si ha

$$A_{-4} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

e quindi basta trovare le soluzioni non nulle del sistema

$$\begin{cases} 6x - 3y = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases} ,$$

che sono

$$\left\{ \left( \frac{h}{2}, h \right) : h \in \mathbb{R} - \{0\} \right\} .$$

Poiché gli autospazi

$$\{ (-3h, h) : h \in \mathbb{R} \} .$$

e

$$\left\{ \left( \frac{h}{2}, h \right) : h \in \mathbb{R} \right\} .$$

hanno entrambi chiaramente dimensione 1, le molteplicità geometriche sono rispettivamente uguali a quelle algebriche. Non essendoci radici non reali del polinomio caratteristico, l'endomorfismo  $f$

è diagonalizzabile .

**Esempio 75** *Entro due ore e mezza, si risponda ai quesiti da 1 a 9 e ci si prepari ad esporre oralmente le dimostrazioni richieste nei punti da 10 a 12. È permesso consultare gli appunti delle lezioni. Sono a disposizione righello numerato e squadretta per i quesiti "grafici".*

1. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare

$$B^t AB.$$

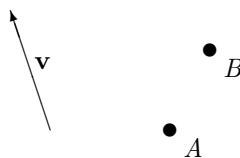
[2 punti]

2. Detto  $\mathbf{v}$  il vettore libero rappresentato dal segmento orientato disegnato nella figura qui di seguito, disegnare un rappresentante del vettore

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + (A - B)$$

e il punto

$$C = A - \mathbf{u}$$



[1 punto]

3. Fissato un riferimento dello spazio, trovare i parametri di giacitura del piano rappresentato da

$$\begin{cases} x = 2 - t + s \\ y = -3 + s \\ z = 1 + t + 2s \end{cases}.$$

[1 punto]

4. Dire se il seguente sistema di vettori è linearmente dipendente o indipendente:

$$((1, 2, 3, 4, 5), (2, 4, 6, 0, 2), (1, 2, 3, -12, 0)).$$

[2 punti]

5. Risolvere col metodo di Gauss il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y = 4 \\ x - y = 0 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$$

[2 punti]

6. Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alle basi

$$((1, 0, 1), (3, 1, 0), (1, 1, 0))$$

e

$$((2, 1), (0, 2))$$

è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcolare

$$f(1, 0, -1).$$

[4 punti]

7. Sia  $\mathcal{V}$  lo spazio dei vettori liberi, sia  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$  e sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathcal{V}$  dato da

$$\mathbf{v} \mapsto (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}.$$

Dire quali sono gli autovalori di  $f$  e quali sono le rispettive molteplicità geometriche.

[3 punti]

8. Fissato nello spazio un riferimento, trovare le coordinate del punto  $A$  d'intersezione del piano di equazione

$$x - y + 2z + 3 = 0$$

con la retta  $r$  di equazioni

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = -t \end{cases}.$$

Trovare poi l'equazione del piano  $\sigma$  passante per  $A$  e per i punti di coordinate  $(1, 0, 1)$  e  $(1, 1, 3)$ .

[4 punti]

9. Siano  $r$  ed  $s$  due rette incidenti, e sia  $t$  una retta sghemba con  $s$ . È possibile che  $r$  e  $t$  siano parallele?

[2 punti]

10. Siano  $V$  e  $W$  spazi vettoriali e sia  $f$  l'applicazione che ad ogni vettore di  $V$  associa il vettore nullo di  $W$ . Dimostrare che  $f$  è lineare.

[3 punti]

11. Siano  $A$  e  $B$  matrici di tipo  $m \times n$  tali che l'applicazione

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

che consiste nel moltiplicare per  $A$  è uguale all'applicazione che consiste nel moltiplicare per  $B$ . Dimostrare che  $A$  e  $B$  devono essere per forza uguali. [3 punti]

12. Esporre una dimostrazione semi-facoltativa (degli appunti del corso) a scelta. [punteggio indicato negli appunti]

Alcuni svolgimenti e risposte:

1. Risposta:

$$(5)$$

3. Una risposta (le possibili terne sono infinite):

$$(-1, 3, -1)$$

6. È utile tenere presente l'Osservazione 54 a pag. 90. Se dunque chiamiamo  $X$  la colonna delle componenti di  $(1, 0, -1)$  rispetto alla prima base, potremo ottenere la colonna  $Y$  delle componenti di  $f(1, 0, -1)$  (rispetto alla seconda base) semplicemente moltiplicando la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

per  $X$ . Troviamo quindi le componenti di  $(1, 0, 1)$  rispetto alla base

$$((1, 0, 1), (3, 1, 0), (1, 1, 0)) .$$

Bisogna calcolare gli scalari  $h, k, l$  tali che

$$(1, 0, -1) = h(1, 0, 1) + k(3, 1, 0) + l(1, 1, 0) .$$

Poiché

$$h(1, 0, 1) + k(3, 1, 0) + l(1, 1, 0) = (h + 3k + l, k + l, h) ,$$

basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} h + 3k + l = 1 \\ k + l = 0 \\ h = -1 \end{cases} .$$

La soluzione è data da

$$h = -1, \quad k = 1, \quad l = -1 .$$

Quindi

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dunque  $f(1, 0, -1)$  è il vettore che ha componenti  $(-2, -1)$  rispetto alla base

$$((2, 1), (0, 2)),$$

cioè

$$f(1, 0, -1) = -2(2, 1) + (-1)(0, 2) = \\ (-4, -4).$$

7. Anche se non è strettamente necessario per la soluzione, può essere d'aiuto visualizzare geometricamente l'applicazione  $f$ . Ricordiamo che il caso in cui  $\mathbf{u}$  sia un versore è stato già presentato nell'Esempio 36 a pag. 77. La descrizione riportata subito dopo ci dice che in questo caso  $f$  è una proiezione ortogonale vettoriale su una retta.

Poiché gli autovettori devono venire trasformati in vettori ad essi paralleli, non è difficile rendersi conto che quelli paralleli ad  $\mathbf{u}$  sono autovettori, e il loro autovalore è 1. Un vettore  $\mathbf{v}$  non parallelo ad  $\mathbf{u}$ , si deve trasformare in un vettore parallelo sia ad  $\mathbf{u}$  che a  $\mathbf{v}$ . La cosa sembra impossibile, ma dobbiamo ricordarci che il vettore nullo è parallelo ad ogni vettore. Quindi, sono autovettori di  $f$  anche tutti i vettori ortogonali a  $\mathbf{u}$ , e il loro autovalore è 0. Dunque, nel caso  $\mathbf{u}$  sia un versore, gli autovalori sono 1 e 0. L'autospazio relativo a 1 è lo spazio generato da  $\mathbf{u}$ , che quindi ha dimensione 1. L'autospazio relativo a 0 è l'insieme dei vettori ortogonali ad  $\mathbf{u}$ , cioè lo spazio dei vettori paralleli ad un qualunque piano ortogonale ad  $\mathbf{u}$ ; tale spazio ha dunque dimensione 2. In conclusione, se  $\mathbf{u}$  è un versore, la molteplicità geometrica di 1 è 1 e la molteplicità geometrica di 0 è 2.

Se si è compreso il (non difficile) meccanismo, si può allora dare subito la risposta nel caso generale: se  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  c'è solo l'autovalore 0 con molteplicità geometrica 3. Se  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ , gli autovalori sono 0 con molteplicità geometrica 2 ed  $|\mathbf{u}|^2$  con molteplicità geometrica 1.

Per i lettori ancora incerti, riportiamo anche due possibili svolgimenti dettagliati dell'esercizio, così come è stato assegnato. Il primo è un ragionamento diretto (sulla falsariga di quanto detto sopra), mentre il secondo è il metodo "standard".

Primo svolgimento (“diretto”). Dobbiamo trovare gli autovalori. Uno scalare  $h$  è un autovalore se e solo se esiste un vettore  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  tale che

$$f(\mathbf{v}) = h\mathbf{v} .$$

Si deve avere dunque

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} = h\mathbf{v} ,$$

e quindi

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} - h\mathbf{v} = \mathbf{0} .$$

Se  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  è linearmente indipendente, questa condizione è equivalente a

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad \text{e} \quad h = 0 .$$

Poiché esistono certamente vettori non nulli ortogonali a  $\mathbf{u}$ , abbiamo che 0 è sicuramente un autovalore. Inoltre abbiamo che l’autospazio relativo a 0 è l’insieme dei vettori ortogonali a  $\mathbf{u}$ .

Se invece  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  è linearmente dipendente, visto che  $\mathbf{v}$  deve essere non nullo, si ha  $\mathbf{u} = x\mathbf{v}$ , e dunque

$$(x^2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - h)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

da cui (sempre perché  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ )

$$x^2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - h = 0 .$$

L’altro possibile autovalore è quindi

$$h = x^2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 .$$

Se però  $\mathbf{u}$  è nullo, tale autovalore è ancora 0. In ogni caso, se  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  è linearmente dipendente, l’autospazio relativo a  $|\mathbf{u}|^2$  è l’insieme dei vettori paralleli ad  $\mathbf{u}$ .

Dunque, ricapitolando, se  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  c’è solo l’autovalore 0, se  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  gli autovalori sono 0 ed  $|\mathbf{u}|^2$ .

Calcoliamo le molteplicità geometriche. Se  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ , l’autospazio relativo a  $|\mathbf{u}|^2$ , essendo dato dai vettori paralleli ad  $\mathbf{u}$ , cioè dai multipli di  $\mathbf{u}$ , ha dimensione 1. L’autospazio relativo a 0, essendo dato dai vettori ortogonali ad  $\mathbf{u}$ , ha dimensione 2. Se invece  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , l’autospazio relativo all’unico autovalore 0, essendo dato dai vettori paralleli a  $\mathbf{0}$ , è tutto  $\mathcal{V}$ , che ha dimensione 3.

Ricapitolando, se  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  c’è solo l’autovalore 0 con molteplicità geometrica 3. Se  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ , gli autovalori sono 0 con molteplicità geometrica<sup>7</sup> 2 ed  $|\mathbf{u}|^2$  con molteplicità geometrica 1.

---

<sup>7</sup>Un’altro modo per calcolare la molteplicità geometrica di 0 è osservare che il suo autospazio è il nucleo di  $f_0 = f$  (cfr. Osservazione 67 a pag. 99). Dunque, usando la Proposizione 87 a pag. 84, e osservando che  $\text{Im } f = \langle (\mathbf{u}) \rangle$ , si ha subito che se  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , allora  $\dim \text{Im } f = 0$  e quindi  $\dim \text{Ker } f = 3$ , mentre se  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ , allora  $\dim \text{Im } f = 1$  e quindi  $\dim \text{Ker } f = 2$ .

Secondo svolgimento (“standard”). Fissiamo una base e troviamo la matrice associata. Se  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ , conviene scegliere una base che contiene  $\mathbf{u}$ :

$$\mathcal{B} = (\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{u}'').$$

Posto

$$a = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}, \quad a' = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}, \quad a'' = \mathbf{u}'' \cdot \mathbf{u},$$

La matrice associata ad  $f$  rispetto a  $\mathcal{B}$  è

$$\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è

$$-t^3 + at^2.$$

Dunque, siccome  $a \neq 0$ , ci sono gli autovalori 0 e  $a = |\mathbf{u}|^2$ . La molteplicità geometrica di 0 è

$$3 - \text{rk} \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

e la molteplicità geometrica di  $a = |\mathbf{u}|^2$  è

$$3 - \text{rk} \begin{pmatrix} 0 & a' & a'' \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} = 1.$$

Se invece  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , qualunque sia la base scelta la matrice associata è nulla, quindi il polinomio caratteristico è  $-t^3$ . C'è allora solo l'autovalore 0, di molteplicità geometrica

$$3 - \text{rk} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

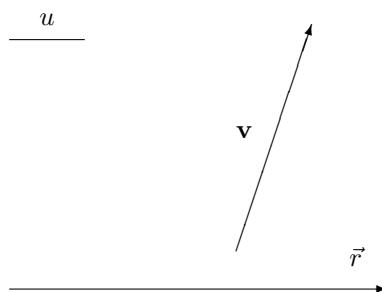
**Esempio 76** Entro due ore e mezza, si risponda ai quesiti da 1 a 9 e ci si prepari ad esporre oralmente le dimostrazioni richieste nei punti da 10 a 12. È permesso consultare gli appunti delle lezioni. Sono a disposizione righello numerato e squadretta per i quesiti “grafici”.

1. Siano  $\mathbf{a} = (1, 1, 2)$ ,  $\mathbf{b} = (3, -1, 0)$  vettori dello spazio  $\mathbb{R}^3$ . Calcolare

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$$

[1 punto]

2. Fissata l'unità di misura  $u$  indicata, sia  $\mathbf{v}$  il vettore libero rappresentato dal segmento orientato disegnato qui sotto ed  $\vec{r}$  la retta orientata indicata qui sotto. Determinare il modulo del prodotto vettoriale di  $\mathbf{v}$  per il versore parallelo e concorde ad  $\vec{r}$ .



[2 punti]

3. Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, sia  $\pi$  il piano di equazione

$$x + y + 2z + 11 = 0$$

e sia  $\sigma$  il piano di equazione

$$2x - y - 4z = 0.$$

I piani  $\pi$  e  $\sigma$  sono paralleli? Sono ortogonali?

[1 punto]

4. Trovare il rango della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

[2 punti]

5. Risolvere col metodo di Gauss il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ -2x + y = 4 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

[2 punti]

6. Trovare la matrice di passaggio dalla base standard di  $\mathbb{R}^3$  alla base

$$\mathcal{B} = ( (2, 5, 2), (1, 3, 1), (0, 1, 1) )$$

(suggerimento: conviene trovare prima la matrice inversa). [4 punti]

7. Trovare una base di autovettori della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

[4 punti]

8. Fissato in un piano un riferimento, scrivere una rappresentazione parametrica della retta  $r$  passante per il punto  $(2, 1)$  e avente  $(1, 3)$  come numeri direttori. Trovare poi l'intersezione di  $r$  con l'asse  $x$ . [3 punti]

9. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcolare il minore complementare (non il complemento algebrico!) del termine  $a_{12}$ . [2 punti]

10. Sia  $\mathbf{v}$  un vettore libero e  $x$  un numero reale  $\geq 0$ . Dimostrare che esiste un unico vettore libero  $\mathbf{w}$  parallelo e concorde a  $\mathbf{v}$  tale che

$$|\mathbf{w}| = x \cdot |\mathbf{v}|.$$

[3 punti]

11. Sia  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  un sistema di vettori linearmente dipendente di uno spazio vettoriale. Dimostrare che c'è almeno uno dei vettori che dipende dai rimanenti. [3 punti]

12. Esporre una dimostrazione semi-facoltativa (degli appunti del corso) a scelta. [punteggio indicato negli appunti]

Alcune risposte:

2. Risposta:

3

4. Risposta:

1

8. Una risposta (le possibili rappresentazioni parametriche sono molte):

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 3t \end{cases}, \quad \left(\frac{5}{3}, 0\right).$$

## Indice

<b>1</b>	<b>Premessa</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Richiami</b>	<b>3</b>
2.1	Insiemi . . . . .	3
2.2	Funzioni . . . . .	5
2.3	Coppie ordinate . . . . .	7
2.4	Relazioni . . . . .	7
2.5	Operazioni . . . . .	9
2.6	Numeri . . . . .	10
<b>3</b>	<b><i>n</i>-uple</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Successioni</b>	<b>14</b>
<b>5</b>	<b>Matrici</b>	<b>14</b>
<b>6</b>	<b>Spazio, rette e piani</b>	<b>16</b>
<b>7</b>	<b>Rette parallele</b>	<b>18</b>
<b>8</b>	<b>Parallelismo per i piani</b>	<b>20</b>
<b>9</b>	<b>Versi su una retta</b>	<b>21</b>
<b>10</b>	<b>Segmenti</b>	<b>22</b>
<b>11</b>	<b>Semipiani</b>	<b>23</b>
<b>12</b>	<b>Angoli</b>	<b>24</b>
<b>13</b>	<b>Congruenza tra segmenti. Lunghezze.</b>	<b>25</b>
<b>14</b>	<b>Congruenza tra angoli</b>	<b>28</b>
<b>15</b>	<b>Misura di lunghezze</b>	<b>31</b>
<b>16</b>	<b>Versi concordi</b>	<b>33</b>
<b>17</b>	<b>Vettori liberi ordinari</b>	<b>36</b>
<b>18</b>	<b>Parallelismo per i vettori</b>	<b>38</b>
<b>19</b>	<b>Somma di un punto con un vettore libero</b>	<b>38</b>
<b>20</b>	<b>Addizione tra vettori liberi</b>	<b>39</b>
<b>21</b>	<b>Prodotto di un numero reale per un vettore libero</b>	<b>42</b>

<b>22 Ortogonalità</b>	<b>43</b>
<b>23 Prodotto scalare tra vettori liberi</b>	<b>45</b>
<b>24 Misura di angoli</b>	<b>48</b>
<b>25 Seno e coseno</b>	<b>49</b>
<b>26 Vettori numerici reali</b>	<b>51</b>
<b>27 Prodotto scalare standard</b>	<b>52</b>
<b>28 Matrici sui reali</b>	<b>53</b>
<b>29 Prodotto righe per colonne</b>	<b>54</b>
<b>30 Matrice identica</b>	<b>55</b>
<b>31 Determinante</b>	<b>56</b>
<b>32 Sottomatrici</b>	<b>57</b>
<b>33 Minori</b>	<b>58</b>
<b>34 Sviluppo di Laplace</b>	<b>59</b>
<b>35 Proprietà del determinante</b>	<b>60</b>
<b>36 Matrice inversa</b>	<b>61</b>
<b>37 Spazi vettoriali</b>	<b>62</b>
<b>38 Proprietà elementari degli spazi vettoriali</b>	<b>64</b>
38.1 Combinazioni lineari . . . . .	64
38.2 Sistemi linearmente indipendenti . . . . .	66
38.3 Lemma di Steinitz . . . . .	69
38.4 Basi . . . . .	69
38.5 Dimensione . . . . .	71
38.6 Componenti . . . . .	71
38.7 Base standard . . . . .	72
<b>39 Sottospazi</b>	<b>72</b>
<b>40 Applicazioni lineari</b>	<b>74</b>
<b>41 Proprietà elementari delle applicazioni lineari</b>	<b>79</b>
<b>42 Isomorfismi</b>	<b>82</b>

43 Nucleo e Immagine	83
44 Dipendenza lineare per vettori numerici	85
45 Rango	88
46 Applicazioni lineari tra vettori numerici	89
47 Matrice associata	90
48 Cambio di base	93
49 Orientazione	94
50 Prodotto vettoriale	95
51 Endomorfismi	97
52 Autovalori ed autovettori	99
53 Diagonalizzazione	102
54 Applicazioni bilineari	104
55 Forme quadratiche	106
56 Spazi vettoriali euclidei	109
57 Equazioni lineari	110
58 Sistemi lineari	113
59 Forma matriciale dei sistemi lineari	114
60 Teorema di Rouché-Capelli	115
61 Sistema omogeneo associato	115
62 Regola di Cramer	117
63 Trasformazioni elementari	117
64 Matrici a scalini	122
65 Procedimento di riduzione a scalini	123
66 Metodo alternativo per il calcolo del rango	125

67	Risoluzione di un sistema con matrice completa a scalini	125
68	Metodo di Gauss	127
69	Calcolo di una base per lo spazio delle soluzioni di un sistema omogeneo	130
70	Metodo alternativo per la risoluzione dei sistemi lineari	131
71	Spazi affini	133
72	Riferimenti	136
73	Cambio di riferimento	139
74	Rappresentazione parametrica di una retta nello spazio	140
75	Rappresentazione parametrica di un piano	142
76	Equazione cartesiana di un piano	144
77	Rappresentazione cartesiana di una retta nello spazio	146
78	Condizioni di parallelismo	147
79	Relazione tra prodotto scalare geometrico e numerico	150
80	Componenti di un prodotto vettoriale	150
81	Formula per il modulo di un vettore libero	151
82	Distanza tra due punti	151
83	Coseni direttori	152
84	Ortogonalità per rette e piani	153
85	Condizioni di ortogonalità	159
86	Esercizi riassuntivi di geometria analitica nello spazio.	160
87	Geometria piana	167
88	Coniche	171

**89 Esempi di prove d'esame**

**175**