

Esempi di morfismi di varietà quasi-affini

Cominciamo richiamando le definizioni basilari che saranno ripetutamente usate nel seguito.

Varietà quasi-affine	=sottoinsieme aperto (nella topologia di Zariski indotta) di una varietà affine (cioè di un chiuso irriducibile di uno spazio affine $\mathbf{A}^n$).
----------------------	--

Funzione regolare in un punto P di una varietà quasi-affine $X \subseteq \mathbf{A}^n$	=funzione $\varphi : X \rightarrow k$, dove k è il campo base, tale che esistono un aperto $U \subseteq X$, con $P \in U$, e due polinomi $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$, tali che $\forall Q \in U$, $\varphi(Q) = \frac{f(Q)}{g(Q)}$, dove $f(Q)$ significa $f(\bar{x}, \dots, \bar{x})$, con $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ coordinate di Q in $\mathbf{A}^n$ (infatti $Q \in U \subseteq X \subseteq \mathbf{A}^n$).
--	--

Funzione regolare definita su una varietà quasi-affine X	= funzione $\varphi : X \rightarrow k$ che è regolare in ogni $P \in X$.
--	---

Morfismo di due varietà quasi-affini	=applicazione $\varphi : X \rightarrow Y$, continua e tale che per ogni funzione regolare $f : Y \rightarrow k$, $f \circ \varphi$ è regolare su X .
--------------------------------------	--

Nota: c'è un'altra definizione di morfismo, che viene usata anche per definire i morfismi di varietà proiettive, che richiede che per ogni funzione regolare $f : U \rightarrow k$ dove U è un aperto di Y , $f \circ \varphi$ sia regolare sull'aperto $\varphi^{-1}(U)$ di X . Nel caso affine e quasi-affine questa definizione coincide con quella data.

1: L'identità $\text{id}_X : X \rightarrow X$, per qualsiasi varietà quasi-affine X è un mor-

fismo.

Dimostrazione. È continua perché, come per ogni spazio topologico, se U è aperto in X $\text{id}_X^{-1}(U) = U$, e dunque è aperto in X . Se poi prendiamo una funzione regolare $f : X \rightarrow k$, $f \circ \text{id}_X = f$ ed è quindi regolare.

2: Le applicazioni affini (simmetrie, proiezioni, traslazioni, rotazioni, omotetie, ecc.) di spazi affini sono morfismi.

Dimostrazione.

Ricordiamo che ogni applicazione affine è del tipo

$$\varphi : \mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{A}^m \quad \text{con} \quad \varphi((x_1, \dots, x_n)) = (x'_1, \dots, x'_m)$$

dove

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1$$

$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x'_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + b_m$$

con $b_i, a_{ij} \in k$.

Queste applicazioni sono continue: Dimostriamo che la controimmagine di un chiuso è un chiuso.

Se C è un chiuso di $\mathbf{A}^m$, allora è l'insieme degli zeri di un sistema di polinomi $\{p'_i\}_{i \in I}$ (dove I è un insieme di indici e dove, come prima, indichiamo con $x'_1, \dots, x'_m$ le variabili), dunque:

$$C = V(\{p'_i(x'_1, \dots, x'_m)\}_{i \in I})$$

(dove $V(\quad)$ indica appunto l'insieme degli zeri comuni). Ora, se $P \in \mathbf{A}^n$ ($P = (x_1, \dots, x_n)$).

$$P \in \varphi^{-1}(C) \Leftrightarrow \varphi(P) \in C \Leftrightarrow \forall i \quad p'_i(\varphi(P)) = 0$$

ma si ha:

$$\begin{aligned} p'_i(\varphi(P)) &= p'_i((a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_1, \dots, a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + b_m)) = \\ &= p_i((x_1, \dots, x_n)) \quad \forall i, \end{aligned}$$

dove p_i è il polinomio ottenuto da p'_i è il polinomio ottenuto da p'_i sostituendo i polinomi $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_1$, ecc., al posto delle variabili x'_1 , ecc. (per

esempio, se $p'_i = x'_1 + x'_2$ e $\begin{cases} x'_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x'_2 = x_3 + 1 \end{cases}$, p_i sarà $(x_1 + 2x_2 + x_3) + (x_3 + 1)^2 = \boxed{x_3^2 + x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 1}$).

Dunque, ricapitolando:

$$P \in \varphi^{-1}(C) \Leftrightarrow p_i(P) = 0 \quad \forall i$$

cioè

$$\varphi^{-1}(C) = V(\{p_i\}_{i \in I})$$

ed è dunque chiuso, essendo l'insieme degli zeri di un sistema di polinomi.

Prendiamo ora una funzione regolare $f : \mathbf{A}^m \rightarrow k$ e dimostriamo che $f \circ \varphi : \mathbf{A}^n \rightarrow k$ è regolare.

Preso $P \in \mathbf{A}^n$, consideriamo $P' = \varphi(P)$; poiché f è regolare, è regolare in P' , e quindi esisterà un aperto $U' \subseteq \mathbf{A}^m$ con $P' \in U'$, e due polinomi $p'(x'_1, \dots, x'_m)$, $q'(x'_1, \dots, x'_m)$ tali che, $\forall Q' \in U'$, $f(Q') = \frac{p'(Q')}{q'(Q')}$.

Ma allora, se poniamo $U = \varphi^{-1}(U')$, U è aperto (perché abbiamo dimostrato che φ è continua), e contiene P (perché $U' \ni P' = \varphi(P)$); inoltre, $\forall Q \in U$ si ha

$$(f \circ \varphi)(Q) = f(\varphi(Q)) = \frac{p'(\varphi(Q))}{q'(\varphi(Q))}$$

Ora, come nella prima parte della dimostrazione, $p'(\varphi(Q))$ e $q'(\varphi(Q))$ sono dei polinomi $p(x_1, \dots, x_n)$, $q(x_1, \dots, x_n)$ (quelli ottenuti sostituendo le espressioni $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_1$ al posto delle x'_1 , ecc.), e allora abbiamo trovato questo aperto $U \ni P$, e questi polinomi p e q tali che

$$\forall Q \in U \quad (f \circ \varphi)(Q) = \frac{p(Q)}{q(Q)},$$

cioè $(f \circ \varphi)$ è regolare in P .

Ma P era un qualsiasi punto di $\mathbf{A}^n$, dunque $(f \circ \varphi)$ è regolare in ogni punto, e dunque è regolare. Quindi φ , essendo continuo, e “trasportando” funzioni regolari in funzioni regolari, è un morfismo. C.V.D.

Se osserviamo la dimostrazione precedente, vediamo che perché si ottengano dei polinomi p_i dai p'_i , dopo la sostituzione delle x' , basta che le espressioni che danno le x' in funzione delle x siano dei polinomi, non necessariamente lineari. Quindi la stessa dimostrazione va bene per dire che:

3: Se φ è un'applicazione $\mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{A}^m$, definita da

$$\varphi((x_1, \dots, x_n)) = (x'_1, \dots, x'_m)$$

con

$$x'_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n)$$

.....

$$x'_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n) ,$$

dove $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ sono polinomi di $k[x_1, \dots, x_n]$, allora φ è un morfismo.

Nota 1: Si potrebbe dimostrare che ogni morfismo $\varphi : \mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{A}^m$ deve essere di questo tipo, e anzi ancora di più: ogni morfismo $\varphi : \mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{A}^m$ è rappresentato nella maniera descritta sopra, da una sola n -pla di polinomi $\varphi_1, \dots, \varphi_m$.

Nota 2: La sostituzione delle espressioni $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ al posto delle variabili $x'_1, \dots, x'_m$ nei polinomi $p'_i(x'_1, \dots, x'_m)$, si può facilmente vedere che dà luogo ad un omomorfismo di k -algebre $k[x'_1, \dots, x'_m] \rightarrow k[x_1, \dots, x_n]$ (quello appunto che ad ogni p'_i associa il p_i ottenuto dalla sostituzione); poiché dall'algebra si sa che ogni omomorfismo $k[x'_1, \dots, x'_m] \rightarrow k[x_1, \dots, x_n]$ è determinato univocamente dalle $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ (e viceversa), otteniamo che i morfismi $\mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{A}^m$ sono in corrispondenza biunivoca naturale con gli omomorfismi $k[x'_1, \dots, x'_m] \rightarrow k[x_1, \dots, x_n]$ (in simboli:

$$\mathcal{H}\text{om}(\mathbf{A}^n, \mathbf{A}^m) \simeq \mathcal{H}\text{om}(k[x'_1, \dots, x'_m], k[x_1, \dots, x_n]),$$

fatto, questo, che è un caso particolare di un teorema più generale sulle varietà affini.

Le applicazioni affini hanno una precisa interpretazione geometrica: vediamo se qualche altra applicazione, definita “geometricamente”, è un morfismo:

4: La proiezione da un punto:

Consideriamo in $\mathbf{A}^2$ l'origine $O(0,0)$, e una retta non passante per O , per esempio la retta r , di equazione $x = 1$, questa retta, che è il chiuso $V(\{x - 1\})$, può essere pensata come un $\mathbf{A}^1$, identificando ogni punto con la sua ordinata (in realtà, per rendere più preciso il discorso, potremmo dimostrare che l'applicazione $r \rightarrow \mathbf{A}^1$ data da $(1, \bar{y}) \mapsto \bar{y}$ è un isomorfismo, cioè un morfismo biiettivo il cui inverso $(\bar{y} \mapsto (1, \bar{y}))$ è ancora un morfismo, ma si può anche fare a meno di questa osservazione). Definiamo la proiezione da O su r : la proiezione π_O è un'applicazione $\mathbf{A}^2 - Y \rightarrow \mathbf{A}^1$ (dove Y è l'asse y , cioè il chiuso $V(\{x\})$, e dove dunque $\mathbf{A}^2 - Y$, essendo un aperto di $\mathbf{A}^2$, è una varietà quasi affine) definita nella seguente maniera: se $P = (\bar{x}, \bar{y})$ è un punto di $\mathbf{A}^2 - Y$, si definisce $\varphi(P)$ come (l'ordinata del) punto di r , intersezione di r con la retta OP (questa intersezione esiste sempre perché OP , essendo $P \notin Y$, non è parallela ad r). Allora: π_O è un morfismo.

Dimostrazione. Cerchiamo innanzitutto di descrivere π_O con delle equazioni: se $P = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{A}^2 - Y$, allora $\bar{x} \neq 0$, e la retta OP ha equazione $y = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}x$. L'intersezione P' con r è data da:

$$\begin{cases} y = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}x \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow P' = \left(1, \frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right)$$

dunque $\pi_O(P) = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$.

Se usiamo le notazioni come in (2), π_O è data da $x' = \frac{y}{x}$ (nel senso che $\pi_O(x, y) = x'$ con $x' = \frac{y}{x}$). Adesso è più facile dimostrare che è un morfismo: π_O è continua (si potrebbe dimostrare osservando che le controimmagini dei gruppi di punti su $\mathbf{A}^1$ sono i chiusi di $\mathbf{A}^2 - Y$ indotti da gruppi di rette

per l'origine in $\mathbf{A}^2$, che è intuitivamente più chiaro, ma che ci obbliga a far riferimento a dei risultati precedenti, perciò facciamo una dimostrazione che ricalca ancora quella di (2)).

Se C è un chiuso di $\mathbf{A}^1$, allora $C = V(\{p'_i\}_{i \in I})$, dove i p'_i sono polinomi in x' . Come in (2), si ha che $\pi_O^{-1}(C)$ è l'insieme dei punti di $\mathbf{A}^2 - Y$ che annullano tutte le espressioni ottenute sostituendo $\frac{y}{x}$ nei p'_i , ma stavolta tali espressioni non sono più polinomi, ma (come ci si rende facilmente conto) funzioni razionali (cioè quozienti di polinomi) $\frac{p_i(x, y)}{x^h}$ (h numero naturale e p_i polinomio). Per esempio, se $p'_i = x'^2 + 2$, allora $p'_i \left(\frac{y}{x} \right) = \left(\frac{y}{x} \right)^2 + 2 = \frac{y^2 + 2x^2}{x^2}$ (e dunque $p_i = 2x^2 + y^2$ e $h = 2$).

Tali espressioni, come era da aspettarsi, sono definite in tutto $\mathbf{A}^2 - Y$ (perché in $\mathbf{A}^2 - Y$ è $x \neq 0$), e il loro annullarsi equivale all'annullarsi dei p_i , dunque $\pi_O^{-1}(C) = V(\{p_i\}) \cap (\mathbf{A}^2 - Y)$, che è un chiuso della topologia di Zariski indotta su $\mathbf{A}^2 - Y$, in quanto intersezione del nostro $\mathbf{A}^2 - Y$ con il chiuso (di tutto $\mathbf{A}^2$) $V(\{p_i\})$.

Quindi π_O è continua; ora, prendiamo una funzione regolare f , definita su $\mathbf{A}^1$, e dimostriamo che $f \circ \pi_O$ è regolare in ogni punto $P \in \mathbf{A}^2 - Y$ (è tutto come in (2)):

Se $P \in \mathbf{A}^2 - Y$, consideriamo $P' = \pi_O(P)$; poiché f è regolare, è regolare in P' , e quindi esisterà un aperto $U' \subseteq \mathbf{A}^1$ con $P' \in U'$, e due polinomi $p'(x')$ e $q'(x')$ tali che, $\forall Q' \in U' f(Q') = \frac{p'(Q')}{q'(Q')}$; ma allora, se poniamo $U = \pi_O^{-1}(U')$, U è aperto (perché abbiamo dimostrato che π_O è continua), e contiene P (perché $U' \ni P' = \varphi(P)$); inoltre $(f \circ \pi_O)(Q) = f(\pi_O(Q)) = \frac{p'(\pi_O(Q))}{q'(\pi_O(Q))} \quad \forall Q \in U$ (perché $\pi_O(Q) \in U'$).

Ma ora, $p'(\pi_O(Q))$ e $q'(\pi_O(Q))$ sono del tipo $\frac{p(x, y)}{x^k}$, $\frac{q(x, y)}{x^h}$, e dunque $(f \circ \pi_O)(Q) = \frac{p(x, y)x^h}{q(x, y)x^k} \quad \forall Q \in U$, e cioè $f \circ \pi_O$ è regolare in P , e quindi, per l'arbitrarietà di P è regolare su tutto $\mathbf{A}^2 - Y$. C.V.D.

Nota: Ora, in questa dimostrazione, l'applicazione $k[x'_1, \dots, x'_m] \rightarrow k[x_1, \dots, x_m]$,

che ai polinomi p'_i associa i relativi p_i , non è più un omomorfismo: l'omomorfismo che invece si ottiene è quello che ai p'_i associa i $\frac{p_i}{x^h}$, che sono funzioni regolari su $\mathbf{A}^2 - Y$, cioè elementi dell'anello $\mathcal{O}(\mathbf{A}^2 - Y)$.

5: Come in (2), anche la precedente dimostrazione ci suggerisce una estensione che ci permette di avere altri esempi di morfismi. Se noi poniamo

$$\begin{array}{rcl} x'_1 & = & \frac{\varphi_1(x_1, \dots, x_n)}{\psi_1(x_1, \dots, x_n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ x'_m & = & \frac{\varphi_m(x_1, \dots, x_n)}{\psi_m(x_1, \dots, x_n)} \end{array}$$

con φ_i, ψ_i polinomi, questo, in generale, non potrà rappresentare un morfismo di $\mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{A}^m$, perché se un punto annulla uno dei polinomi ψ , non possiamo calcolare la sua immagine; però la stessa dimostrazione di sopra ci permette di affermare che queste equazioni definiscono (al solito modo) un morfismo dall'aperto $\mathbf{A}^n - \cup_i V(\{\psi_i\})$ in $\mathbf{A}^m$.

6: A parte l'identità, per ora siamo riusciti a costruire morfismi solo tra spazi affini, o aperti di questi; vorremmo ora degli esempi di morfismi tra varietà più complicate. Poiché le varietà quasi-affini sono sottoinsiemi di spazi affini, è naturale andare a considerare le restrizioni di morfismi.

Teorema: Se $\varphi : \mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{A}^m$ è un morfismo e $X \subseteq \mathbf{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbf{A}^m$ sono varietà quasi-affini tali che $\varphi(X) \subseteq Y$, allora la restrizione $\varphi|_{X,Y} : X \rightarrow Y$ (definita da $\varphi|_{X,Y}(P) = \varphi(P)$, $\forall P \in X$, che è ben posta perché, per le ipotesi, $\varphi(P) \in Y$, $\forall P \in X$), è un morfismo.

Dimostrazione. La continuità vale, perché tale teorema vale per gli spazi topologici (infatti se U è un aperto di Y , allora $U = Y \cap V$, con V aperto di $\mathbf{A}^m$, per definizione di topologia indotta; ora

$$\varphi|_{X,Y}^{-1}(U) = X \cap \varphi^{-1}(Y \cap V) = X \cap \varphi^{-1}(Y) \cap \varphi^{-1}(V) = X \cap \varphi^{-1}(V),$$

perché $X \subseteq \varphi^{-1}(Y)$, e dunque è aperto in X , essendo $\varphi^{-1}(V)$ un aperto di $\mathbf{A}^n$ per la continuità di φ .

Sia ora f una funzione regolare su Y , dobbiamo dimostrare che $f \circ \varphi|_{X,Y}$ è regolare su X ; preso $P \in X$, esiste un aperto U' di Y , contenente $\varphi(P)$, e due polinomi p', q' tali che $f(Q') = \frac{p'(Q')}{q'(Q')} \quad \forall Q' \in U'$; ma ora $p' \circ \varphi$ e $q' \circ \varphi$ sono funzioni regolari su $\mathbf{A}^n$, perché p' e q' sono chiaramente regolari su $\mathbf{A}^m$, allora c'è un aperto U_1 di $\mathbf{A}^n$ contenente P in cui $p' \circ \varphi = \frac{p_1}{q_1}$ (in realtà si potrebbe dimostrare, come detto nella nota alla fine di (3), che $p' \circ \varphi$ è un polinomio) e un aperto U_2 , sempre di $\mathbf{A}^n$ e contenente P , in cui $q' \circ \varphi = \frac{p_2}{q_2}$, allora è chiaro che $\forall Q$ nell'aperto $U_1 \cap U_2 \cap \varphi^{-1}(U')$ (il quale contiene P), $f \circ \varphi|_{X,Y} = \frac{p_1(Q)}{q_1(Q)} / \frac{p_2(Q)}{q_2(Q)} = \left(\frac{p_1 q_2}{q_1 p_2} \right) (Q)$, e dunque $f \circ \varphi|_{X,Y}$ è regolare in P . Da qui, come al solito, l'asserto.

E se invece di restringere morfismi $\mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{A}^m$, volessimo restringere dei morfismi tra due varietà quasi-affini qualsiasi? Diamo quest'altro teorema.

Teorema: Se $\varphi : X \rightarrow Y$ è un morfismo di varietà quasi-affini, e x' è una varietà quasi-affine contenuta in X , allora $\varphi|_{X'} : X' \rightarrow Y$ è un morfismo.

Dimostrazione. La continuità discende di nuovo dal risultato generale per gli spazi topologici visto all'inizio della dimostrazione del teorema precedente. Prendiamo allora una funzione f , regolare su Y : certamente $f \circ (\varphi|_{X'}) = (f \circ \varphi)|_{X'}$, ma $f \circ \varphi$ è regolare perché φ è un morfismo, quindi basta osservare che le restrizioni di funzioni regolari sono regolari: infatti $\forall P \in X' \subseteq X$ c'è un aperto U di X contenente P , in cui la funzione regolare $(f \circ \varphi)$ si esprime come rapporto di polinomi, e allora, nell'aperto $U \cap X'$ di X' , la restrizione $((f \circ \varphi)|_{X'})$ si esprimerà come rapporto degli stessi polinomi, e dunque è regolare su X' . Come al solito, concludiamo così che $\varphi|_{X'}$ è un morfismo. C.V.D.

Il primo teorema lavora sulle restrizioni di morfismi tra spazi affini, restrizioni che possono essere contemporaneamente sul dominio e sul codominio; mentre il secondo, che pure lavora su varietà quasi-affini qualsiasi, permette le restrizioni solo sul dominio. Ora, la dimostrazione del primo teorema è meno naturale, e questo ci fa capire che se volessimo dimostrare un teorema generale che dicesse che restrizioni di morfismi, sia sul dominio che sul codominio, di varietà quasi-affini qualsiasi sono morfismi (che pure è vero),

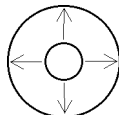
andremmo incontro a difficoltà di natura più elevata. Le dimostrazioni sulle restrizioni del codominio tornerebbero “naturali”, se si usasse la definizione di morfismo di cui si è parlato nella nota all’inizio degli appunti.

7: I teoremi precedenti ci consentono di trovare degli esempi non identici di morfismi tra varietà che non sono aperti di spazi affini:

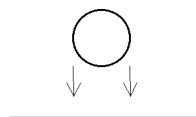
In $\mathbf{A}^2$, consideriamo le circonferenze Γ_1 , di equazione $x^2 + y^2 = 1$, e Γ_2 , di equazione $x^2 + y^2 = 4$; l’omotetia

$$\Theta : \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases} \quad \text{di } \mathbf{A}^2 \text{ in } \mathbf{A}^2$$

si restringe, grazie al teorema, ad un morfismo $\Theta|_{\Gamma_1, \Gamma_2} : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ (infatti $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Gamma_1 \Rightarrow \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1 \Rightarrow (2\bar{x})^2 + (2\bar{y})^2 = 4\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 = 4 \Rightarrow \Theta((\bar{x}, \bar{y})) \in \Gamma_2$): la figura è chiara, si tratta di due circonferenze concentriche, e il morfismo consiste nel “dilatare” la più piccola nella più grande.



Come altro esempio, restringiamo a Γ_1 la proiezione $\mathbf{A}^2 \rightarrow \mathbf{A}^1$, $\pi : x' = x$; per rappresentare geometricamente π , possiamo considerare l’asse x di $\mathbf{A}^2$ come un $\mathbf{A}^1$ (si identificano i punti dell’asse con la loro ascissa), e allora la proiezione π è l’ordinaria proiezione ortogonale sull’asse x ; attenzione però: se guardiamo al “disegno”, ci sembra che l’immagine di $\pi|_{\Gamma_1}$ sia un sottoinsieme proprio di $\mathbf{A}^1$ (un intervallo), invece si può facilmente vedere che $\pi|_{\Gamma_1}$ è suriettiva, in quanto siamo su un campo algebricamente chiuso (per esempio, sui complessi, il punto 2 di $\mathbf{A}^1$ è immagine di $(2, i\sqrt{3})$ e di $(2, -i\sqrt{3})$).



Vediamo ora cosa succede se cerchiamo di restringere alla circonferenza Γ_3 , di equazione $x^2 + y^2 - 2y = 0$ (di centro $(0, 1)$ e raggio 1), la proiezione

π_O , che abbiamo definito in (4):

Naturalmente non possiamo restringere π_O a tutta Γ_3 , poiché $\Gamma_3 \not\subseteq \mathbf{A}^2 - Y$, quello che si può fare, usando il secondo teorema, è restringere π_O a $\Gamma_3 - \{O, P\}$, dove $O = (0, 0)$ e $P = (0, 2)$ sono le intersezioni di Γ_3 con l'asse y ; chiamiamo φ questa restrizione. Dall'immagine reale sorge il sospetto che φ possa essere esteso anche all'origine; infatti, si vede che quando un punto tende all'origine, la retta proiettante tende alla tangente in O , e l'immagine del punto tende allo 0 di $\mathbf{A}^1$. È vero dunque che $\bar{\varphi} : \Gamma_3 - \{P\} \rightarrow \mathbf{A}^1$ definito

$$\text{da } \bar{\varphi}(Q) = \begin{cases} \varphi(Q) & \text{se } Q \neq O \\ 0 & \text{se } Q = O \end{cases} \quad \text{è un morfismo?}$$

Se, usando l'equazione $x' = \frac{y}{x}$, vogliamo percorrere il solito schema dimostrativo, ci fermiamo quando cerchiamo di dimostrare che per funzioni regolari f di $\mathbf{A}^1$, $f \circ \bar{\varphi}$ è regolare in O . Una maniera comoda per cavarsela è quella di “cambiare la rappresentazione” di $\bar{\varphi}$, sfruttando l'equazione di Γ_3 : si ha che $\bar{\varphi}(Q) : \frac{x}{2-y} \quad \forall Q \equiv (x, y) \in \Gamma_3 - \{P\}$. Infatti, se confrontiamo le

funzioni $\frac{x}{x}$ e $\frac{x}{2-y}$, otteniamo $\frac{x}{2-y} - \frac{y}{x} = \frac{x^2 - y(2-y)}{(2-y)x} = \frac{x^2 + y^2 - 2y}{(2-y)x}$, e questo è vero $\forall Q \in \Gamma_3 - \{O, P\}$, dunque $\frac{x}{2-y}$ è uguale a φ su $\Gamma_3 - \{O, P\}$,

e inoltre $\frac{x}{2-y} = 0$ per $(x, y) = O = (0, 0)$. Dunque $\bar{\varphi}$ è rappresentato da

$\frac{x}{2-y}$ ed è quindi un morfismo, perché restrizione del morfismo di equazione appunto $x' = \frac{x}{2-y}$ che sappiamo essere definito su $\mathbf{A}^2 - V - (\{2-y\})$.

Nota. Provare a verificare che $\bar{\varphi}$ coincide con la restrizione della proiezione da P sull'asse x , dove però su $x = \mathbf{A}^1$ si prende come unità il doppio dell'unità in $\mathbf{A}^2$.

Nota. Quanto osservato in questo esempio equivale al fatto che nel campo delle funzioni di Γ_3 , $K(\Gamma_3)$, visto come campo di quozienti di $\mathbf{A}(\Gamma_3)$ (vedere lezioni), $\frac{x}{2-y}$ e $\frac{y}{x}$ sono lo stesso elemento.