

Questi sono alcuni esercizi indicativi. Vedere anche [Franchetta-Morelli].

CONICHE

Esercizio 1 *Fissato nell'ampliamento proiettivo complesso del piano un sistema di coordinate omogenee, classificare (dal punto di vista affine reale) le seguenti coniche reali non degeneri studiando la sezione con la retta impropria (senza quindi calcolare direttamente $|A_{33}|$):*

$$\gamma_1 : x_1^2 - 3x_1x_2 - 4x_2^2 + x_3^2 = 0;$$

$$\gamma_2 : x_1^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 = 0;$$

$$\gamma_3 : x_1^2 + x_2^2 + x_1x_3 = 0;$$

$$\gamma_4 : x_1x_2 + x_3^2 = 0;$$

$$\gamma_5 : 4x_1^2 + 12x_1x_2 + 9x_2^2 + 3x_2x_3 = 0;$$

$$\gamma_6 : x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2 = 0.$$

Soluzione. Le intersezioni di γ_1 con la retta impropria D sono date dal sistema

$$\begin{cases} x_1^2 - 3x_1x_2 - 4x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

Sostituendo $x_3 = 0$ nella prima equazione, si ottiene l'equazione omogenea nelle due variabili x_1 e x_2 :

$$x_1^2 - 3x_1x_2 - 4x_2^2 = 0.$$

Quindi si ha

$$x_1 = \frac{3x_2 \pm \sqrt{9x_2^2 - 4(-4x_2^2)}}{2} = \begin{cases} 4x_2 \\ -x_2 \end{cases}$$

(sempre con $x_3 = 0$).

Le soluzioni sono $\{(4t, t), (-t, t)\}$ e quindi le intersezioni di γ_1 con la retta impropria sono $P_1(4, 1, 0)$ e $P_2(-1, 1, 0)$. Essendo questi due punti reali distinti, γ_1 è un'iperbole (per definizione di iperbole, tenendo presente che γ_1 è effettivamente non degenera, come affermato nel testo, in quanto la sua

matrice $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante $-\frac{25}{4} \neq 0$).

Analogamente si svolgono gli altri:

$$\gamma_2 \cap D : \begin{cases} x_1^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow x_1^2 = 0 \longrightarrow P_1 = P_2(0, 1, 0) \longrightarrow \text{parabola.}$$

$$\gamma_3 \cap D : \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_1x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 0 \longrightarrow P_1(i, 1, 0), P_2(-i, 1, 0) \longrightarrow \text{ellisse.}$$

L'ellisse è ordinaria perché contiene il punto reale $(1, 0, -1)$.

$$\gamma_4 \cap D : \begin{cases} x_1x_2 + x_3^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow x_1x_2 = 0 \longrightarrow P_1(1, 0, 0), P_2(0, 1, 0) \longrightarrow \text{iperbole.}$$

$$\gamma_5 \cap D : \begin{cases} 4x_1^2 + 12x_1x_2 + 9x_2^2 + 3x_2x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow 4x_1^2 + 12x_1x_2 + 9x_2^2 = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow P_1 = P_2(3, -2, 0) \longrightarrow \text{parabola.}$$

$$\gamma_6 \cap D : \begin{cases} x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0 \longrightarrow P_1(\sqrt{3}i - 1, 2, 0), P_2(-\sqrt{3}i - 1, 2, 0) \longrightarrow \text{ellisse.}$$

L'ellisse è ordinaria perché contiene il punto reale $(1, 0, -1)$.

Esercizio 2 *Fissato nell'ampliamento proiettivo complesso del piano un sistema di coordinate omogenee, classificare (dal punto di vista affine reale) le seguenti coniche degeneri determinandone le componenti:*

$$\gamma'_1 : x_1^2 - x_2^2 = 0;$$

$$\gamma'_2 : x_1^2 - x_1x_2 + 3x_1x_3 = 0;$$

$$\gamma'_3 : 2x_1^2 - x_1x_2 - 3x_2^2 - 2x_1x_3 + 3x_2x_3 = 0;$$

$$\gamma'_4 : x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 = 0;$$

$$\gamma'_5 : x_1x_3 - \sqrt{2}x_3^2 = 0;$$

$$\gamma'_6 : x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2 = 0;$$

$$\gamma'_7 : x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2 = 0;$$

Soluzione. Ricordiamo brevemente il metodo generale per la determinazione delle componenti di una conica degenera γ .

Detta D la retta impropria ($x_3 = 0$) e A la matrice di γ , se $\gamma \cap D$ è costituita da due punti distinti $P(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ e $P'(\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \bar{x}'_3)$, allora le due tangenti in P e P' sono le volute componenti; quindi le equazioni sono (tenendo conto

dell'equazione della tangente):

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0; \quad (\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \bar{x}'_3) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Se invece l'intersezione è costituita da un solo punto, allora si prova con l'asse x ($x_2 = 0$) invece di D (questo va bene anche se l'intersezione è tutta la retta impropria, ma in realtà, in tal caso l'equazione è divisibile per x_3 , e quindi la decomposizione è immediata). Se dunque $\gamma \cap$ asse x è costituita da due punti $P(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ e $P'(\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \bar{x}'_3)$ allora, come prima, le due componenti sono

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0; \quad (\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \bar{x}'_3) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Se invece anche l'asse x incontra γ in un solo punto (se l'intersezione è tutto l'asse x , allora come sopra, basta scomporre mettendo x_2 in evidenza), si prova con l'asse y ($x_1 = 0$). Se $\gamma \cap$ asse y è costituita da due punti $P(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ e $P'(\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \bar{x}'_3)$ allora, come prima, le due componenti sono

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0; \quad (\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \bar{x}'_3) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Se invece anche questa terza intersezione è costituita da un solo punto (o è tutto l'asse y), allora vuol dire che γ è doppiamente degenera, cioè è un'unica retta (“doppia”), quindi il rango di A è uno, dunque le tre righe sono proporzionali. Allora i coefficienti di una qualsiasi riga (o colonna) non nulla di A determinano l'equazione dell'unica componente (cioè, se ad esempio è non nulla la prima riga, la componente è $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$).

Una volta note le componenti, la classificazione affine reale è immediata (si tratta di dire se è la retta impropria “doppia”, o una retta reale propria e la retta impropria, o una retta reale propria “doppia”, o due rette reali proprie distinte con intersezione propria, o due rette reali proprie distinte con intersezione impropria, o due rette non reali coniugate con intersezione propria, o due rette non reali coniugate con intersezione impropria).

Naturalmente si tenga presente che se l'esercizio richiedesse la sola classificazione, questa spesso può essere ottenuta immediatamente, senza il calcolo effettivo delle componenti.

Applichiamo dunque quanto detto alle coniche date (tenendo presente che già è noto che sono degeneri, come affermato nel testo dell'esercizio, e come d'altronde è facile constatare, verificando l'annullamento del determinante).

Per γ'_1 la decomposizione è evidente, comunque procediamo lo stesso per illustrare il metodo sopra esposto.

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \longrightarrow P(1, 1, 0), P'(1, -1, 0) \longrightarrow$$

$$(1, 1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0; (1, -1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\longrightarrow x_1 - x_2 = 0; x_1 + x_2 = 0 \longrightarrow \text{due rette reali distinte con intersezione propria (è il punto } (0, 0, 1), \text{ e comunque tale classificazione era già determinabile dal solo calcolo di } P \text{ e } P', \text{ o anche solo dal segno di } |A_{33}|).$$

Per γ'_2 (anche qui la decomposizione è in realtà immediata):

$$\begin{cases} x_1^2 - x_1x_2 + 3x_1x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow x_1^2 - x_1x_2 = 0 \longrightarrow P(0, 1, 0), P'(1, 1, 0) \longrightarrow$$

$$(0, 1, 0) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0; (1, 1, 0) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$0 \longrightarrow -\frac{1}{2}x_1 = 0; \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 0 \longrightarrow x_1 = 0; x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \longrightarrow \text{due rette reali distinte con intersezione propria } ((0, 3, 1), \text{ e comunque tale classificazione era già determinabile dal solo calcolo di } P \text{ e } P', \text{ o anche solo dal segno di } |A_{33}|).$$

Per γ'_3 :

$$\begin{cases} 2x_1^2 - x_1x_2 - 3x_2^2 - 2x_1x_3 + 3x_2x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow 2x_1^2 - x_1x_2 - 3x_2^2 = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow P(3, 2, 0), P'(-1, 1, 0) \longrightarrow$$

$$(3, 2, 0) \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & -3 & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0; (-1, 1, 0) \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & -3 & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$0 \longrightarrow 5x_1 - \frac{15}{2}x_2 = 0; -\frac{5}{2}x_1 - \frac{5}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 = 0 \longrightarrow 2x_1 - 3x_2 = 0; x_1 + x_2 - x_3 = 0 \longrightarrow \text{due rette reali distinte con intersezione propria } ((3, 2, 5), \text{ e comunque tale classificazione era già determinabile dal solo calcolo di } P \text{ e } P', \text{ o anche solo dal segno di } |A_{33}|).$$

Per γ'_4 :

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow P(1+i, 1, 0), P'(1-i, 1, 0) \longrightarrow$$

$$(1+i, 1, 0) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0; \quad (1-i, 1, 0) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

0

$\longrightarrow ix_1 + (1-i)x_2 - x_3 = 0; -ix_1 + (1+i)x_2 - x_3 = 0 \longrightarrow$ due rette non reali coniugate con intersezione propria $((1, 1, 1))$, e comunque tale classificazione era già determinabile dal solo calcolo di P e P' , o anche solo dal segno di $|A_{33}|$.

Per γ'_5 (decomposizione in realtà immediata):

$$\begin{cases} x_1x_3 - \sqrt{2}x_3^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow 0 = 0 \longrightarrow D \subseteq \gamma'_5 \longrightarrow x_3 = 0; \quad x_1 - \sqrt{2}x_3 =$$

0 \longrightarrow retta reale propria e retta impropria.

Per γ'_6 :

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 0 \longrightarrow P = P'(1, -1, 0).$$

Allora

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow x_1^2 - x_3^2 = 0 \longrightarrow P(1, 0, 1); P'(1, 0, -1) \longrightarrow$$

$$(1, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0; \quad (1, 0, -1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

0

$\longrightarrow x_1 + x_2 - x_3 = 0; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \longrightarrow$ due rette reali con intersezione impropria $((1, -1, 0))$

Per γ'_7 :

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 =$$

0 \longrightarrow

$$\longrightarrow P = P'(1, 1, 0).$$

Allora

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2 =$$

0 $\longrightarrow P = P'(1, 0, 1).$

Allora

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \longrightarrow x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 = 0$$

$0 \longrightarrow P = P'(0, 1, -1).$

Ciò significa che la conica è doppiamente degenera, e infatti $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ha rango uno (naturalmente, in genere ci si accorge subito quando il rango è uno, dunque non è necessario calcolare come sopra le tre intersezioni). L'unica retta è dunque $x_1 - x_2 - x_3 = 0$. La classificazione è: retta reale propria "doppia".

Esercizio 3 Effettuare, mediante lo studio della matrice associata, la classificazione affine reale delle coniche degli esercizi 1 e 2.

Soluzione. Il procedimento consiste nel calcolare $|A|$ e $|A_{33}| (= a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$, e seguire poi lo schemetto

	$ A_{33} > 0$	$ A_{33} < 0$	$ A_{33} = 0$
$ A \neq 0$	ellisse ordinaria o ellisse immaginaria	iperbole	parabola
$ A = 0$	coppia di rette non reali coniugate con intersezione propria.	coppia di rette reali proprie (distinte) con intersezione propria.	cinque casi possibili

Nel caso $|A| \neq 0$ e $|A_{33}| > 0$, bisogna distinguere se l'ellisse è ordinaria o immaginaria, allora basta utilizzare la proposizione 22.2 del capitolo 3 di [Esposito-Russo, parte II], tenendo presente che già abbiamo verificato $|A_{33}| > 0$. Dunque:

ellisse ordinaria $\iff a_{11}$ è discorde con $|A|$.

ellisse immaginaria $\iff a_{11}$ è concorde con $|A|$.

Nel caso $|A| = 0$ e $|A_{33}| = 0$ bisogna distinguere tra i cinque casi possibili (cioè retta impropria "doppia", o una retta reale propria e la retta impropria, o una retta reale propria "doppia", o due rette reali proprie distinte con intersezione impropria, o due rette non reali coniugate con intersezione impropria). A questo scopo si possono studiare le componenti con il metodo dell'esercizio 2, partendo direttamente con l'asse x (poiché $|A_{33}| = 0$, l'intersezione con la retta impropria non è sicuramente costituita da due punti distinti).

Non sarebbe difficile costruire uno schemetto apposito, che utilizzi la matrice A (e precisamente il rango di A , $|A_{11}| + |A_{22}|$ e la condizione matriciale $A_{33} = 0$), ma questo lo lasciamo come esercizio per i più volenterosi.

Applichiamo quanto detto alle coniche assegnate.

Per γ_1 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies |A| = -\frac{25}{4} \neq 0, |A_{33}| = -\frac{25}{4} < 0 \implies \text{iperbole.}$$

Per γ_2 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \implies |A| = -1 \neq 0, |A_{33}| = 0 \implies \text{parabola.}$$

Per γ_3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies |A| = -\frac{1}{4} \neq 0, |A_{33}| = 1 > 0, a_{11} = 1 > 0 \text{ (discorde}$$

con $|A| \implies$ ellisse ordinaria.

Per γ_4 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies |A| = -\frac{1}{4} \neq 0, |A_{33}| = -\frac{1}{4} < 0 \implies \text{iperbole.}$$

Per γ_5 :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 9 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \implies |A| = -9 \neq 0, |A_{33}| = 0 \implies \text{parabola.}$$

Per γ_6 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies |A| = -\frac{1}{4} \neq 0, |A_{33}| = \frac{3}{4} > 0, a_{11} = 1 > 0$$

(discorde con $|A| \implies$ ellisse ordinaria.

Per γ'_1 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies |A| = 0, |A_{33}| = -1 < 0 \implies \text{coppia di rette reali}$$

proprie (distinte) con intersezione propria.

Per γ'_2 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies |A| = 0, |A_{33}| = -\frac{1}{4} < 0 \implies \text{coppia di rette}$$

reali proprie (distinte) con intersezione propria.

Per γ'_3 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & -3 & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \implies |A| = 0, |A_{33}| = -\frac{25}{4} < 0 \implies \text{coppia di rette}$$

reali proprie (distinte) con intersezione propria.

Per γ'_4 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \implies |A| = 0, |A_{33}| = 1 > 0 \implies \text{coppia di rette non}$$

reali coniugate con intersezione propria.

Per le rimanenti abbiamo $|A| = 0, |A_{33}| = 0$, dunque si ricorra ai metodi usati nell'esercizio 2.

QUADRICHE

Esercizio 4 Sia Q una quadrica reale degenera e supponiamo che esista un piano reale proprio che intersechi Q in una parabola.

- (a) Q può essere un paraboloido?
- (b) Q può essere un cilindro parabolico?
- (c) Q può essere un cono a falda immaginaria?
- (d) Q può essere un cono a falda reale?

Supponendo poi che la conica γ_∞ sia degenera, classificare Q (dal punto di vista affine reale).

Soluzione. (a) No, perché Q è degenera.

(b) Sì (le sezioni non degeneri reali di un cilindro parabolico sono parabole).

(c) No (le sezioni non degeneri reali proprie di un cono a falda immaginaria sono ellissi immaginarie).

(d) Sì (le sezioni non degeneri reali proprie di un cono a falda reale possono essere parabole, ellissi ordinarie o iperboli).

Notiamo che siccome esiste una sezione non degenera, Q non può essere riducibile, ed essendo degenera è per forza un cono o un cilindro. Se γ_∞ è degenera, allora Q è un cilindro, obbligatoriamente parabolico (perché gli altri tipi di cilindro non possono avere una parabola come sezione). Dunque, se γ_∞ è degenera, la classificazione affine reale di Q è: cilindro parabolico.

Esercizio 5 Sia Q una quadrica reale tale che γ_∞ sia priva di punti reali e tale che esista una sezione reale propria che sia un'ellisse ordinaria. Classificare Q (dal punto di vista affine reale).

Soluzione. Poiché esiste una sezione non degenera, la quadrica è irriducibile. Poiché γ_∞ è priva di punti reali, se Q è non degenera allora è un ellissoide, se Q è degenera allora è un cono a falda immaginaria. Poiché le sezioni non degeneri reali di un cono a falda immaginaria sono tutte ellissi immaginarie, allora Q è un ellissoide, ed è necessariamente un ellissoide ordinario in quanto quelli immaginari hanno anch'essi come sezioni non degeneri reali solo ellissi immaginarie. Dunque la classificazione affine reale di Q è: ellissoide ordinario.

Esercizio 6 Sia Q un cilindro ellittico a falda reale, e siano γ_1 e γ_2 due sezioni non degeneri di Q con due piani reali propri π_1 e π_2 . Esiste un'affinità di π_1 in π_2 che manda γ_1 in γ_2 ?

Soluzione. Poiché le sezioni sono per ipotesi non degeneri, essendo Q un cilindro ellittico a falda reale, γ_1 e γ_2 sono entrambe ellissi ordinarie. Dunque la voluta affinità esiste.

Esercizio 7 Fissato un sistema di coordinate omogenee dell'ampliamento complesso proiettivo dello spazio, sia

$$Q : x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 2x_3x_4 - 2x_4^2 = 0.$$

- (a) Determinare γ_∞ e classificarla (dal punto di vista proiettivo reale).
- (b) Esistono piani reali propri che intersecano Q in una parabola?
- (c) Quali sono le classi di equivalenza affine reale a cui Q potrebbe appartenere, compatibilmente con il risultato del punto (a)?
- (d) Classificare Q .

Soluzione. (a) La conica γ_∞ è l'intersezione col piano improprio $x_4 = 0$. Effettuando la sostituzione $x_4 = 0$ otteniamo

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0.$$

La matrice di tale conica è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché il determinante è -2 ($\neq 0$), la conica è non degenera. Poiché $a_{11} = 1$ è discorde col determinante, allora la conica è dotata di punti reali (anche se il minore $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ è positivo, cfr. [Esposito-Russo parte II, capitolo 3, proposizione 22.2]). Quindi γ_∞ è: conica non degenera dotata di punti reali.

(b) Si (basta considerare un piano proprio reale non tangente a Q , la cui retta impropria sia tangente a γ_∞ : in tal caso la sezione sarà non degenera con un unico punto all'infinito, e dunque sarà una parabola).

(c) Poiché esistono sezioni non degeneri (γ_∞), Q è irriducibile. Se Q è degenera, allora, essendo γ_∞ non degenera dotata di punti reali, Q è un cono a falda reale. Se Q è non degenera, essendo γ_∞ non degenera dotata di punti reali, allora Q è un iperboloido. Dunque le possibili classificazioni sono tre: cono a falda reale, iperboloido a punti iperbolici, iperboloido a punti ellittici.

(d) Per classificare Q , bisogna distinguere tra i tre casi determinati in (c). Basta calcolare il determinante della matrice di Q : se è nullo, allora è un cono a falda reale, se è positivo allora è un iperboloido a punti iperbolici, se è negativo allora è un iperboloido a punti ellittici.

Poiché il determinante è positivo, la classificazione è: iperboloido a punti iperbolici.

Esercizio 8 *Fissato un sistema di coordinate omogenee dell'ampliamento complesso proiettivo dello spazio, sia*

$$Q : -2x_1x_2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0.$$

e sia γ la sezione col piano xy .

- (a) Classificare γ (dal punto di vista affine reale).
- (b) La conica γ_∞ può essere priva di punti reali?
- (c) Quali sono le classi di equivalenza affine reale a cui Q potrebbe appartenere, compatibilmente con il risultato del punto (a)?
- (d) Classificare Q .

Soluzione. (a) Sostituendo $x_3 = 0$ (equazione del piano xy) si ha $\gamma : -2x_1x_2 - x_2^2 - x_4^2 = 0$.

Detta $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice di γ , poiché $|B| = 1 \neq 0$, γ è

non degenera, poiché $|B_{33}| = -1 < 0$, γ è un'iperbole.

(b) No, poiché γ_∞ contiene i due punti all'infinito di γ , che sono reali in quanto γ è un'iperbole.

(c) Poiché γ è non degenera, Q non può essere riducibile. Se Q è degenera, avendo un'iperbole come sezione, può essere un cono a falda reale o un cilindro iperbolico. Se Q è non degenera, avendo un'iperbole come sezione, può essere un paraboloida a punti iperbolici, o un iperboloide. Le possibili classificazioni (in base ad (a)) sono dunque cinque: cono a falda reale, cilindro iperbolico, paraboloida a punti iperbolici, iperboloide a punti iperbolici, iperboloide a punti ellittici.

(d) Poiché il determinante della matrice A di Q è diverso da zero, Q è non degenera. Poiché $|A_{44}| \neq 0$, Q è un iperboloide in quanto abbiamo già escluso in (c) che possa essere un ellissoide. Poiché il determinante di A è negativo, Q è a punti ellittici. Dunque la classificazione è: iperboloide a punti ellittici.

Esercizio 9 *Fissato un sistema di coordinate omogenee dell'ampliamento complesso proiettivo dello spazio, sia*

$$Q : x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_3 - x_3^2 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4 - x_4^2 = 0.$$

(a) Classificare γ_∞ (dal punto di vista proiettivo reale) e la sezione col piano xy (dal punto di vista affine reale).

(b) Quali sono le classi di equivalenza affine reale a cui Q potrebbe appartenere, compatibilmente con il risultato del punto (a)?

(c) Classificare Q .

Esercizio 10 *Fissato un sistema di coordinate omogenee dell'ampliamento complesso proiettivo dello spazio, sia*

$$Q : x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_4 - x_4^2 = 0.$$

Determinare le rette contenute in Q e passanti per il punto P di coordinate omogenee $(0, 1, 0, 1)$. Classificare Q .

Soluzione. Tali rette sono le componenti della sezione col piano tangente in $P \in Q$. Tale piano è

$$(0, 1, 0, 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0,$$

quindi $x_1 + x_2 - x_4 = 0$.

La sezione è data da

$$\begin{cases} x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_4 - x_4^2 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Ricavando x_1 dalla seconda e sostituendo nella prima abbiamo l'equazione in x_2, x_3, x_4 :

$$x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_4 + x_4^2 = 0.$$

calcolando le componenti (vedi esercizio 2 delle coniche) si ha:

$$x_2 + x_3 - x_4 = 0; \quad x_2 - x_3 - x_4 = 0.$$

Queste due equazioni rappresentano le due rette nel riferimento del piano tangente, subordinato da quello del piano yz (perché abbiamo ricavato x_1 , e il piano yz è quello di equazione $x_1 = 0$). Come equazioni nello spazio, rappresentano perciò i due piani paralleli all'asse x passanti per le due rette in questione. Viste invece come equazioni di rette nel piano yz , rappresentano le proiezioni delle nostre rette.

Se vogliamo le equazioni nello spazio delle rette volute, basta mettere a sistema con l'equazione del piano tangente:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Per classificare Q , osserviamo che il determinante della sua matrice è diverso da 0, dunque Q è non degenera. Poiché $|A_{44}| = 0$ è un paraboloido, che è a punti iperbolici in quanto il punto P abbiamo visto che è iperbolico, essendo reali le rette trovate (e infatti $|A| > 0$). Dunque Q è un paraboloido a punti iperbolici.

Esercizio 11 *Fissato un sistema di coordinate omogenee dell'ampliamento complesso proiettivo dello spazio, effettuare, mediante lo studio della matrice associata A , la classificazione affine reale delle seguenti quadriche:*

$$\begin{aligned}
 Q_1 & : 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + x_3^2 + 6x_3x_4 = 0; \\
 Q_2 & : -3x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_1x_3 + x_1x_4 + 2x_2x_4 - x_3x_4 = 0; \\
 Q_3 & : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0; \\
 Q_4 & : x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 2x_3x_4 - 2x_4^2 = 0; \\
 Q_5 & : -2x_1x_2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0; \\
 Q_6 & : x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_3 - x_3^2 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4 - x_4^2 = 0; \\
 Q_7 & : x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_4 - x_4^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Soluzione. In generale, ricordiamo che conviene calcolare i determinanti di A e A_{44} , tenendo presente il seguente schemetto:

	$ A > 0$	$ A < 0$	$ A = 0$
$ A_{44} \neq 0$	iperboloide iperbolico o ellissoide immaginario	iperboloide ellittico o ellissoide ordinario	cono
$ A_{44} = 0$	paraboloide iperbolico	paraboloide ellittico	cilindro o quadrica riducibile

Per distinguere, nel caso $|A| > 0$ e $|A_{44}| \neq 0$, l'ellissoide immaginario dall'iperboloide a punti iperbolici, bisogna controllare se la conica all'infinito è dotata o no di punti reali, utilizzando ad esempio la proposizione 22.2 del capitolo 3 di [Esposito-Russo, parte II]. Quindi, posto $B = A_{44}$, si ha:

ellissoide immaginario $\iff |B_{33}| > 0$ e b_{11} concorde con $|B|$.

iperboloide iperbolico $\iff |B_{33}| \leq 0$ oppure b_{11} discorde da $|B|$.

Analogamente si procede nel caso $|A| < 0$ e $|A_{44}| \neq 0$, per distinguere l'ellissoide ordinario dall'iperboloide a punti ellittici; e pure nel caso $|A| = 0$ e $|A_{44}| \neq 0$ per distinguere il cono a falda immaginaria da quello a falda reale.

Nel caso $|A| = 0$ e $|A_{44}| = 0$, si determina il rango di A . Se il rango è tre, allora è un cilindro (e allora bisogna distinguere tra i quattro tipi, studiando le componenti di γ_∞ o/e una sezione non degenere). Se il rango è due, allora la quadrica è doppiamente degenere, dunque sono due piani distinti, per determinare i quali, si possono prendere due punti semplici di intersezione con una retta non incidente la retta doppia, e determinarne i piani tangenti. Se il rango è uno, allora la quadrica è triplamente degenere, cioè è un piano

reale “doppio”, per determinare il quale basta considerare una riga non nulla della matrice (cfr. il caso delle coniche doppiamente degeneri dell’esercizio 2 delle coniche).

Si può ora applicare quanto detto alle quadriche assegnate (per verifica, si può tenere presente che le ultime quattro sono già state studiate negli esercizi precedenti).