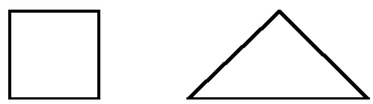
Alcuni Elementi di Geometria Analitica

Le parti in piccolo accompagnate dalle doppie sbarrette sono facoltative: è consigliabile leggerle in fase di studio; si possono omettere in fase di ripasso. Si suppongono già acquisiti il simbolismo di base della teoria degli insiemi e i rudimenti dell'algebra lineare (spazi vettoriali, basi, componenti): talvolta, per maggiore chiarezza, nelle parti facoltative sono accennati dei richiami su tali argomenti.

1. Premesse.

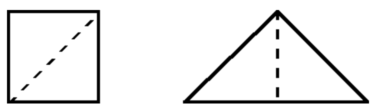
Come tutti sanno, la geometria elementare si occupa delle proprietà delle figure nello spazio reale; e qui la parola "reale" non ha niente a che fare (per adesso) con i numeri reali, ma vuole indicare lo spazio della nostra realtà, quello concreto, di cui abbiamo una immediata intuizione (soprattutto visiva, ma non solo).

Come primo esempio, guardiamo la figura qui sotto (dove il quadrato e il triangolo hanno la stessa altezza, ma il triangolo ha la base che è lunga il doppio del lato del quadrato) e rispondiamo alla seguente domanda: è più grande il quadrato o il triangolo?



Una maniera di rispondere potrebbe essere la seguente: detto l il lato del quadrato, l'area del quadrato è l^2, mentre quella del triangolo, dato che la base è $2l$ e l'altezza è l, vale $\frac{2l\times l}{2} = l^2$; dunque il triangolo e il quadrato hanno la stessa area.

Naturalmente questa risposta si presta a qualche critica. Per esempio, vengono accettati per buoni dei concetti e dei risultati studiati nella scuola elementare, ma ci potremmo chiedere come si arriva a tali risultati. Allora, potrebbe essere più convincente una risposta del tipo illustrato nella figura qui sotto, dove, tracciando le due linee tratteggiate risulta evidente che il triangolo e il quadrato sono entrambi costituiti dagli stessi due triangolini.



Ma anche ora, a voler essere pignoli, si potrebbero sollevare delle obiezioni del tipo: perché i triangoli piccoli della figura qui sopra sono tra di loro uguali? Ci potremmo chiedere cos'è di preciso l'area; o ancora, si potrebbe osservare che la domanda "chi è più grande?" potrebbe non riferirsi all'area (per esempio, il triangolo è comunque più "largo" del quadrato).

Questo esempio elementare ci serve per sottolineare alcuni fatti importanti. In geometria (come per il resto della matematica) si cerca di risolvere problemi, e per fare ciò è necessario fare delle affermazioni (*proposizioni*, o *teoremi*) che siano convincenti e precise:

— Affinché una proposizione sia convincente ha bisogno di una *dimostrazione*: una dimostrazione utilizza opportune considerazioni e deduzioni, per ricondurre la proposizione in questione ad affermazioni più convincenti, fino ad arrivare ad affermazioni così convincenti che non possano dare adito a (ragionevoli) dubbi, che siano cioè *evidenti*. Una affermazione considerata evidente prende il nome di *assioma* (o *postulato*).

— Affinché una proposizione sia precisa è opportuno che i concetti che si usano abbiano un significato chiaro, non ambiguo. C'è bisogno dunque di *definizioni*, che consistono in sostanza nel riportare i concetti trattati a concetti più semplici.

Per rispondere a queste esigenze, la matematica moderna riporta ogni cosa al concetto di insieme e di appartenenza, e ai concetti logici di base. Gli assiomi di una teoria vengono fissati in partenza, ed ogni proposizione o teorema deve essere una loro conseguenza; ogni dimostrazione dunque deve far uso solo della logica e degli assiomi fissati (o delle proposizioni precedentemente dimostrate). Non possiamo qui entrare nei dettagli di come questo possa essere realizzato: chi fosse interessato, può consultare un libro di logica matematica (in cui questi discorsi sulla formalizzazione sono portati alle estreme conseguenze, e molti dei concetti che qui abbiamo appena sfiorato assumono nuovi significati), e per quanto riguarda più in particolare la geometria, è interessante dare un'occhiata al libro di Hilbert - fondamenti della geometria (collocazione 27-H-10 della nostra biblioteca).

In questi appunti ci terremo ad un livello meno rigoroso (sebbene, speriamo, sufficientemente preciso): non fisseremo in partenza tutti gli assiomi, e useremo il linguaggio insiemistico in maniera non strettamente formale, cercando solo ogni tanto di dare un'idea di come le cose possano formalizzarsi più rigorosamente; faremo talvolta anche uso di qualche risultato noto dalle scuole superiori (per esempio il teorema di Talete).

2. Rette, piani e segmenti.

Dovrebbe essere a tutti chiaro il concetto di *punto*. Possiamo quindi innanzitutto stabilire che

— *Lo spazio è un insieme di punti.*

Le figure geometriche possono essere definite come dei sottoinsiemi dello spazio.

a b c d

Osserviamo le figure qui sopra.

Qual è la più semplice, quella che sapremmo riprodurre con facilità? Certamente la (a). Dal punto di vista insiemistico, non c'è una maniera per distinguere i sottoinsiemi dello spazio, se non per il numero di punti, mentre è un dato di fatto che tra i sottoinsiemi dello spazio ce ne sono alcuni particolari, che chiamiamo *rette*. Una retta è una figura come la (a), che però prolunghiamo all'infinito in entrambi i sensi. Stabiliamo dunque che

—*Ci sono dei particolari sottoinsiemi dello spazio: le rette.*

Le rette hanno particolari proprietà evidenti, che assumiamo come assiomi:

— *Su ogni retta esistono almeno due punti, e presi due punti distinti, esiste una e una sola retta che li contiene entrambi.*

Quest'ultima asserzione si può anche esprimere (in maniera più geometricamente intuitiva, ma meno precisa) dicendo che per due punti distinti passa una sola retta, oppure che esiste una sola retta che congiunge due punti dati.

Un'altra proprietà elementare che viene usata (a volte implicitamente) in molte delle dimostrazioni che si studiano nella scuola media, è il fatto che ogni retta può essere percorsa in due possibili versi; il che si può esprimere dicendo che i punti di una retta possono essere ordinati in due maniere naturali, l'una opposta dell'altra. Naturalmente esistono infiniti modi di ordinare infiniti punti, ma questi due sono "naturali", così come le rette sono particolari tra tutti i sottoinsiemi dello spazio.

Il concetto di "verso" si può esprimere in maniera rigorosa in termini di insiemi: esso è infatti una *relazione d'ordine totale* definita tra i punti della retta: fissare un verso infatti, significa poter dire, per ogni coppia di punti distinti, che uno dei due precede l'altro (e non viceversa). Vale inoltre la relazione transitiva: se P precede Q e Q precede R, allora P precede R. Il fatto che i due possibili versi sono tra di loro opposti significa che se in un verso P precede Q, allora nel verso opposto è Q a precedere P. Dunque:

— *Esistono su ogni retta due particolari ordinamenti totali, detti versi, l'uno opposto dell'altro.*

Vediamo in dettaglio come si definisce una relazione, in termini di teoria degli insiemi. Innanzitutto cerchiamo di dare una definizione di *coppia ordinata* (a, b). Certamente non possiamo dire che (a, b) è l'insieme $\{a, b\}$, in quanto sappiamo che (se $a \neq b$) (a, b) deve essere un oggetto diverso da (b, a), mentre $\{a, b\}$ e $\{b, a\}$ sono due modi diversi di scrivere lo stesso insieme: quello costituito dai due elementi in questione. Per individuare (a, b) dobbiamo individuare chi è il primo e chi è il secondo elemento: una maniera per farlo è porre $(a, b) = \{\{a, b\}, a\}$; infatti, con questa definizione, si ha $(a, b) = (c, d) \iff a = c \quad \text{e} \quad b = d$ (dimostrarlo per esercizio). Naturalmente, si potrebbero anche usare altre definizioni (per esempio $(a, b) = \{\{a, b\}, b\}$, oppure $\{\{a, b\}, \{a\}\}$), l'importante è che si abbia $(a, b) = (c, d) \iff a = c \quad \text{e} \quad b = d$. Se A e B sono due insiemi, l'insieme di tutte le coppie il cui primo elemento è un elemento di A e il secondo è un elemento di B si chiama *prodotto cartesiano di* A e B e si indica con $A \times B$ (più sinteticamente, $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$)

Passiamo alle relazioni. Nell'insieme dei numeri naturali, per esempio, c'è la relazione "essere maggiore di": data una coppia di numeri naturali, sappiamo decidere se il primo è maggiore del secondo (2 è maggiore di 1, 10 non è maggiore di 705, 3 non è maggiore di 3, 100000 è maggiore di 6, ecc.); oppure possiamo considerare la relazione "essere il doppio di" (4 è il doppio di 2, 9 non è il doppio di 8, ecc.). Cambiamo insieme: consideriamo l'insieme degli italiani. C'è per esempio la relazione "essere concittadino/a di", oppure "essere genitore di". Insomma ogniqualvolta in un insieme si considera una proprietà relativa a coppie ordinate di elementi, si dice che si è stabilito una relazione nell'insieme A. Una relazione è determinata dall'insieme delle coppie che la soddisfano, e quindi una definizione di relazione può essere la seguente: una *relazione* in un insieme A è un sottoinsieme di $A \times A$. Così la relazione "essere maggiore" non è altro che l'insieme $\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1), ecc.\ ecc.\}$: tale relazione si indica con $>$. Per dire che 4 è maggiore di 2 si potrebbe dunque dire $(4,2) \in >$, ma in realtà si preferisce dire $4 > 2$. In generale, se R è una relazione, la scrittura $a\ R\ b$ è un modo più espressivo per dire $(a,b) \in R$.
Una relazione d'ordine stretto è una relazione $\prec$ che ha la proprietà *antisimmetrica* (cioè se $a \prec b$ allora $b \not\prec a$) e *transitiva* (cioè se $a \prec b$ e $b \prec c$ allora $a \prec c$). Se $\prec$ è una relazione d'ordine stretto, la relazione $\preceq$ tale che $a \preceq b$ se e solo se $a \prec b$ oppure $a = b$, si chiama *relazione d'ordine largo*. Una relazione d'ordine largo è anche caratterizzata dalle proprietà *riflessiva* (cioè ogni a è in relazione con se stesso), *asimmetrica* (cioè se $a \preceq b$ e $b \preceq a$, allora $a = b$) e transitiva. Una relazione d'ordine $\prec$ si dice *totale* se comunque si prendano a e b, si ha che $a \prec b$ oppure $b \prec a$. Per esempio la relazione $<$ nei numeri naturali è una relazione di ordine stretto totale, mentre la relazione $\subset$ tra sottoinsiemi di un insieme, è una relazione d'ordine stretto non totale (se l'insieme dato ha più di un elemento).
Si può anche definire più in generale il concetto di relazione tra due insiemi diversi A e B: è un sottoinsieme R di $A \times B$. Veramente in qualche testo si preferisce definire una relazione tra A e B come una coppia $R = (A \times B, R)$ tale che S è un sottoinsieme di $A \times B$, e questo allo scopo di considerare come distinte relazioni che sono vere sulle stesse coppie, ma sono definite su insiemi distinti. Per esempio la relazione nell'insieme degli italiani data da $a\ R\ b \iff a$ e b si sono incontrati sulla luna, è data dall'insieme vuoto, come pure la relazione nell'insieme dei numeri interi positivi "essere opposto di", però conviene considerare distinte queste due relazioni ed infatti la coppia $(\{italiani\} \times \{italiani\}, \emptyset)$ è diversa da $(\{interi\ positivi\} \times \{interi\ positivi\}, \emptyset)$. Una relazione tra due insiemi A e B si chiama anche *corrispondenza* tra A e B. Una corrispondenza f tra A e B tale che ogni elemento di A è in corrispondenza con uno ed un solo elemento di B si chiama *applicazione* o *funzione* da A a B, e si indica con $f : A \to B$, e la scrittura $b = f(a)$ è un nuovo modo per scrivere $a\ f\ b$, che in molti casi è più espressivo.

Definizione 1. Dati due punti distinti A e B, e detta r l'unica retta che li contiene, si dice *segmento* di estremi A e B, e si indica con $\overline{AB}$, l'insieme dei punti compresi tra A e B, cioè, fissato il verso $\prec$ secondo cui $A \prec B$, $\overline{AB} = \{P \in r | A \preceq P \preceq B\}$ (dove $\preceq$ significa "precede o è uguale").

Il segmento definito sopra a volte viene anche chiamato segmento *chiuso* di estremi A e B; mentre se togliamo da $\overline{AB}$ gli estremi, otteniamo $\{P \in r | A \prec P \prec B\}$, che viene chiamato *segmento aperto* di estremi A e B. Attenzione: il segmento aperto di estremi A e B non è il segmento chiuso che ha per estremi "il punto subito dopo A" e "il punto subito prima di B", perché questi punti non esistono! Si possono anche definire in maniera ovvia i "segmenti chiusi a destra e aperti a sinistra" (o viceversa). Noi parleremo solo di segmenti chiusi.

E' opportuno definire anche il "segmento nullo", che è un insieme del tipo $\overline{AA} = \{P \in r | A \preceq P \preceq A\}$: tale insieme è sempre uguale ad $\{A\}$, qualsiasi sia la retta r che contiene il punto A, e qualsiasi sia il verso $\prec$ scelto su r. Riassumendo:

Definizione 2. Si dice *segmento nullo* di estremo A, l'insieme $\overline{AA} = \{A\}$.

Un altro dato fondamentale dell'esperienza, è il concetto di lunghezza. Dati due segmenti nello spazio, sappiamo confrontarli: il procedimento consiste nel trasportarli l'uno sull'altro (pensiamo a due bastoncini), e vedere quale dei due è "contenuto" nell'altro. A partire da questa idea, si può anche definire il concetto di misura, che si fonda sulla possibilità di riportare consecutivamente dei segmenti di fissata lunghezza. Tutto questo discorso può essere formalizzato in varie maniere: una è quella di richiedere per assioma (postulare) l'esistenza di particolari funzioni dello spazio in se, detti movimenti rigidi (il che traduce il trasporto dei bastoncini), un'altra è quella di postulare l'esistenza di una relazione di equivalenza tra segmenti (la congruenza, cioè l'avere la stessa lunghezza), con particolari proprietà di trasporto. Seguiamo questa seconda strada.

— *Esiste una particolare relazione di equivalenza nell'insieme dei segmenti, detta congruenza.*

Una *relazione di equivalenza* $\sim$ in un insieme è una relazione che ha le proprietà riflessiva, *simmetrica* (cioè se $a \sim b$ allora $b \sim a$) e transitiva. Le relazioni di equivalenza sono importanti, perché servono a definire rigorosamente molte "proprietà". Prendiamo per esempio la relazione "avere lo stesso colore" definita nell'insieme O di tutti gli oggetti colorati uniformemente; si verifica subito che questa è una relazione di equivalenza: ogni oggetto ha lo stesso colore di se stesso (riflessività), se a ha lo stesso colore di b allora b ha lo stesso colore di a (simmetria), e se a ha lo stesso colore di b e b ha lo stesso colore di c, allora a ha lo stesso colore di c (transitività). Notiamo che l'insieme O si suddivide in tanti insiemi, ciascuno costituito da tutti gli oggetti che hanno un certo colore: questi insiemi chiaramente non hanno elementi in comune, e uniti insieme danno tutto l'insieme O: si dice che costituiscono una *partizione*. Inoltre i suddetti insiemi sono tanti quanti i colori esistenti, così che possiamo pensare di dare una definizione insiemistica di "colore": ad esempio potremmo identificare il colore giallo con l'insieme degli oggetti che sono gialli: in questo contesto la cosa non sembra di molta utilità, perché ciascuno ha un'idea ben chiara di "giallo", ma in contesti più astratti, questa idea apre la strada alla definizioni di molte "proprietà" che altrimenti sarebbe difficile descrivere. Vediamo un esempio.
Iniziamo ad osservare che ogni relazione di equivalenza $\sim$ definisce una partizione. Infatti se $a \in A$, indichiamo con $[a]$ l'insieme degli elementi equivalenti ad a (cioè che stanno nella relazione $\sim$ con a). Si dimostra facilmente che $a \sim b \iff [a] = [b]$, da cui si ottiene che gli insiemi del tipo $[a]$, che si chiamano le *classi di equivalenza*, formano una partizione. Poniamoci ora il seguente problema: come definire un *numero naturale*? Una maniera potrebbe essere la seguente. Un'applicazione $f : A \to B$ si dice *biettiva* se ogni elemento di B è il corrispondente di uno ed un solo elemento di A, e se una tale applicazione esiste si dice che A è equipotente a B. Si vede facilmente che l'equipotenza è una relazione di equivalenza. Potremmo allora definire il numero 1 come la classe di equivalenza $[\{a\}]$ (intuitivamente potremmo dire che il numero 1 è "quello che hanno in comune" gli insiemi $\{a\}$, $\{b\}$ $\{\bullet\}$, $\{*\}$, ecc.); il numero 2 può essere definito come la classe di equivalenza $[\{a, b\}]$, dove $a \neq b$, eccetera (in effetti, in questo caso, il metodo di definizione adottato presenta degli inconvenienti, che qui non possiamo approfondire: il dover utilizzare "l'insieme di tutti gli insiemi" comporta dei problemi logici).
Con la stessa tecnica possiamo definire cos'è una *lunghezza*: non è altro che una classe di segmenti congruenti.

Come al solito, non ci preoccupiamo qui di elencare tutti gli assiomi della congruenza, ci limitiamo per ora ad enunciare il seguente fatto evidente

Proposizione 3. *Fissati un segmento $\overline{AB}$, una retta r, un verso su r e un punto $C \in r$, esiste uno ed un solo punto $D \in r$ che segue C e tale che $\overline{CD}$ è congruente ad $\overline{AB}$.*

Questa proprietà permette il confronto di segmenti, e il "riporto consecutivo", che apre la strada alla definizione di somma di due segmenti (o meglio di due lunghezze) e quindi alla definizione di *misura* di un segmento rispetto ad un altro. Naturalmente c'è bisogno anche di altri assiomi, che riguardino la compatibilità della congruenza rispetto al riporto consecutivo (riportando segmenti congruenti si ottengono segmenti congruenti, fatto che tra l'altro ci consente di dire che i segmenti nulli formano una classe di segmenti congruenti), le proprietà di continuità della retta (data una famiglia infinita numerabile di segmenti l'uno contenuto nel successivo, l'intersezione è sempre non vuota), l'assioma di Archimede (dati due segmenti, esiste sempre un multiplo del primo che contiene il secondo). Non possiamo addentrarci nei dettagli della costruzione, ma visto che il concetto di misura dovrebbe essere familiare a tutti, potremo considerare come evidenti molte sue proprietà. Quindi, possiamo cominciare ad assumere che:

— *Dato un segmento $\overline{AB}$ ed un segmento non nullo u esiste un determinato numero reale non negativo $|\overline{AB}|^u$, detto misura di $\overline{AB}$ rispetto ad u.*

Spesso si sottointende di aver fissato un segmento non nullo u (detto unità di misura) e, parlando di misura di $\overline{AB}$, si sottoindende "rispetto ad u", e si usa il simbolo $|\overline{AB}|$. Tra le proprietà fondamentali segnaliamo che per ogni numero reale non negativo x, esiste sempre un segmento la cui misura è x; un segmento è nullo se e solo se la sua misura è zero; la misura di u è 1, e inoltre, dati due segmenti v e w si ha $|w| = |v| \cdot |w|^v$, da cui si ricava poi che due segmenti sono congruenti se e solo se hanno la stessa misura. Infine, se $A \preceq B \preceq C$ sono tre punti su una retta orientata, si ha $|\overline{AC}| = |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$.

Torniamo a parlare di sottoinsiemi dello spazio. Oltre alle rette, ci sono degli altri sottoinsiemi dello spazio molto semplici e particolari, di cui alle scuole medie si parla poco, forse perché sono figure che non si disegnano su un foglio, infatti *sono* il foglio: stiamo parlando dei *piani*. Intuitivamente, un piano è un foglio (non spiegazzato) prolungato all'infinito in ogni direzione. Dunque:

— *Esistono dei particolari sottoinsiemi dello spazio detti piani.*

Postuliamo che

— *Su ogni piano ci sono almeno tre punti non allineati (cioè non contenuti in una stessa retta), e dati tre punti non allineati, questi sono contenuti in uno ed un solo piano.*

— *Se un piano contiene due punti distinti, allora contiene la retta che li congiunge.*

Parliamo ora di rette parallele. Siamo abituati a dire che due rette sono parallele quando non si incontrano (o che si incontrano all'infinito, ma di questo si parlerà alla fine del corso di Geometria), però questo è giusto solo quando si sottointende che le rette siano sullo stesso piano (come avviene quasi sempre nei problemi trattati alle superiori), infatti se pensiamo ad una gamba della sedia su cui siamo seduti e ad un lato del foglio che stiamo leggendo, questi non si incontrano, anche se li prolunghiamo all'infinito (a meno che non si stia in una posizione molto particolare), eppure non sono due rette parallele.

Definizione 4. Due rette si dicono *propriamente parallele* se sono contenute in un piano e non hanno punti in comune; si dicono *impropriamente parallele* se coincidono. Due rette si dicono *parallele*, se lo sono propriamente o impropriamente. Due rette che non sono contenute entrambe in uno stesso piano, si dicono *sghembe*.

Si dimostra facilmente che due rette sghembe non possono avere punti in comune (infatti se P fosse un tale punto, basta prendere altri due punti, ciascuno su una retta, e osservare che per quanto detto sui piani, il piano contenente questi tre punti deve contenere tutte e due le rette, che non sarebbero quindi sghembe). Dunque abbiamo il seguente quadro della situazione. Se due rette non si incontrano, possono essere propriamente parallele o sghembe. Se due rette sono contenute in uno stesso piano, o si incontrano (si dice che sono *incidenti*), o sono propriamente parallele; se sono incidenti e parallele, allora coincidono (sono cioè impropriamente parallele).

Chiaramente, due segmenti non nulli saranno detti paralleli se lo sono le rette che li contengono, e un segmento non nullo sarà detto parallelo ad una retta se lo è la retta che lo contiene. Per i piani la situazione è più semplice.

Definizione 5. Due piani si dicono *propriamente paralleli* se non hanno punti in comune; si dicono *impropriamente paralleli* se coincidono. Una retta e un piano si dicono *propriamente paralleli* se non hanno punti in comune; si dicono *impropriamente paralleli* se la retta è contenuta nel piano.

Riguardo ai piani, postuliamo infine che

— *Dato un piano π, esiste un punto non contenuto nel piano, e due piani non paralleli si incontrano in una retta.*

> In effetti basterebbe richiedere che due piani che si incontrano in un punto, si incontrano in almeno un altro punto, infatti da questa affermazione e dai fatti che abbiamo enunciato più sopra si può dedurre che due piani non paralleli si incontrano in una retta.

È importante infine il seguente *assioma delle parallele.*

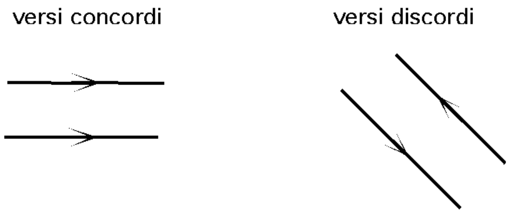
—*Dati una retta r e un punto P, esiste un unica retta passante per P e parallela ad r.*

Nell'insieme di tutte le rette, la relazione di parallelismo è una relazione di equivalenza.

> È un simpatico esercizio provare a dimostrare quest'ultimo fatto a partire dai precedenti: lo lasciamo al lettore interessato.
> Esaminiamo ora un po' più a fondo il concetto di "direzione". Per dire che due rette sono parallele, si può dire anche che hanno "la stessa direzione". Una direzione (da non confondere con un verso, come si fa nel linguaggio comune), è "quello che hanno in comune" le rette di

un insieme che sono tutte parallele tra di loro. Conosciamo già un modo tecnicamente preciso per definire un tale concetto (cfr. il discorso fatto sulle relazioni di equivalenza): una classe di equivalenza rispetto al parallelismo viene detta una *direzione*.

Ora che abbiamo introdotto il parallelismo, possiamo parlare di un'altra proprietà elementare che ci servirà in seguito: la possibilità di confrontare i versi su rette parallele. Infatti se r ed s sono due rette parallele, dato un verso su r, è intuitivo (vedi figura qui sotto) che uno dei versi di s è *concorde* con il verso scelto, mentre l'altro è *discorde*.



— *Nell'insieme di tutti i versi di una classe di rette parallele, esiste una relazione di equivalenza (concordanza), tale che i due versi opposti di ciascuna retta sono discordi (cioè non concordi), e che se due versi sono discordi da un terzo, allora sono tra di loro concordi.*

3. Vettori liberi ordinari.

Per descrivere molte situazioni è utile utilizzare delle frecce (in fisica, per esempio, servono per indicare forze, velocità, spostamenti, ecc.). Una maniera rigorosa di descrivere una freccia, è la definizione di segmento orientato: vediamo di che si tratta. Dato un segmento non nullo $\overline{AB}$, se si fissa un verso sulla retta che lo contiene, si avrà automaticamente un *verso* sul segmento, cioè lo stesso ordinamento, considerato però limitatamente ai punti del segmento (più precisamente dovremmo parlare di *restrizione* ad $\overline{AB}$ del verso fissato sulla retta). Se abbiamo invece un segmento nullo $\overline{AA}$, qualsiasi sia la retta che lo contiene e qualsiasi sia il verso scelto su di essa, si ottiene sempre lo stesso ordinamento su $\overline{AA}$ (d'altra parte, c'è un unico modo di ordinare un insieme fatto da un solo punto). Quindi possiamo dire che su un segmento nullo c'è un unico verso, coincidente col suo opposto.

Definizione 1. Un *segmento orientato* è una coppia costituita da un segmento e da un verso su di esso. Un segmento orientato non nullo costituito da $\overline{AB}$, con il verso rispetto al quale $A \prec B$, verrà indicato con AB, e il segmento orientato BA (cioè quello dato sempre da $\overline{AB}$, ma con il verso opposto) viene detto *opposto* ad AB. Il segmento orientato nullo di estremo A verrà indicato con AA, e coincide con il suo opposto.

Ogni segmento orientato AB è individuato dalla sua origine A e dal suo estremo B, e viceversa ogni coppia di punti individua un segmento orientato. Si dice anche che il segmento $\overline{AB}$ è il *sostegno* del segmento orientato AB (e ovviamente anche di BA).

Naturalmente la relazione di concordanza tra i versi su rette parallele induce una relazione di concordanza tra i versi di segmenti (non nulli) paralleli, dunque potremo chiamare concordi due segmenti orientati paralleli se lo sono i loro versi.

> Abbiamo parlato di segmenti orientati paralleli: si potrebbe obiettare che la definizione di parallelismo è stata data per i segmenti semplici, non per i segmenti orientati, sarebbe più preciso dire segmenti orientati *con sostegni paralleli.* Tuttavia riguardo ai segmenti orientati, parleremo spesso di congruenza, di lunghezza, sottointendendo che ci stiamo riferendo ai sostegni.

Diamo ora una definizione importante.

Definizione 2. Due segmenti orientati si dicono *equipollenti* se sono congruenti e inoltre, nel caso siano non nulli, sono paralleli e concordi.

Poiché la congruenza tra segmenti, il parallelismo e la concordanza tra versi sono tutte relazioni di equivalenza, si dimostra subito che anche l'equipollenza è una relazione di equivalenza.

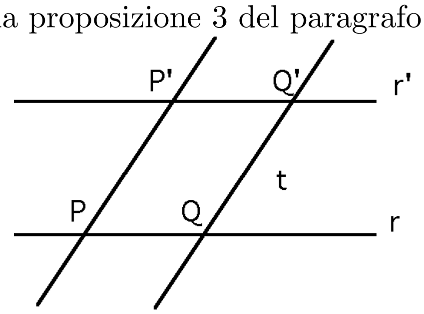
Definizione 3. Una classe di segmenti orientati equipollenti si chiama *vettore libero ordinario* (o semplicemente vettore libero). Se AB è un segmento orientato, il vettore da esso individuato (cioè l'insieme dei segmenti ad esso congruenti) sarà indicato con $[AB]$, e si dirà che AB è un *rappresentante* di $[AB]$.

I segmenti orientati nulli formano una classe di equipollenza: tale vettore si chiama *vettore nullo*, e si indica con $\mathbf{0}$. Se due segmenti orientati sono equipollenti, anche i loro opposti lo sono, dunque per ogni vettore $[AB]$ c'è un vettore $[BA]$ che si chiama *opposto* di $[AB]$, che è costituito da tutti gli opposti dei segmenti orientati che costituiscono $[AB]$.

Dalla proposizione 3 del paragrafo 2 segue subito il seguente fatto.

Proposizione 3. *Dato un punto A ed un vettore libero $\mathbf{v}$, esiste uno e un solo punto B tale che $\mathbf{v} = [AB]$.*

Il nostro principale obiettivo, ora, è quello di dimostrare che l'insieme dei vettori liberi ordinari è uno spazio vettoriale sul campo dei numeri reali (storicamente, il nome di spazio vettoriale deriva proprio da questo fatto). Ci serve prima di tutto una caratterizzazione molto utile dell'equipollenza, basata sui parallelogrammi. Ricordiamo che un parallelogramma è un quadrilatero tale che lati opposti sono tra loro paralleli. È un fatto conosciuto fin dalle scuole medie che se un quadrilatero ha due lati opposti paralleli e congruenti, allora anche gli altri due lati opposti sono paralleli, cioè il quadrilatero è un parallelogramma. Questo può essere visto come un approfondimento della proposizione 3 del paragrafo 2:



Proposizione 4. *Siano r ed r' rette propriamente parallele, $P \in r$, $P' \in r'$, $Q' \in r'$. Sia t la retta per Q' e parallela alla retta passante per P e P'. Allora l'intersezione Q di t con r è l'unico punto di r tale che PQ è congruente a $P'Q'$, e che segue P nel verso concorde al verso di r' in cui Q' segue P'.*

Questa proposizione è di carattere molto elementare, tuttavia non sarebbe onesto considerala come evidente; comunque non possiamo entrare nei dettagli della sua dimostrazione, perché (proprio per il fatto che è molto elementare) avremmo bisogno di una trattazione più sistematica degli assiomi della geometria. Daremo per buona sia questa proposizione, sia un importante teorema elementare, che riguarda questioni simili: il teorema di Talete, che incontreremo più avanti.

Come accennato prima, dalla proposizione 4 si ottiene facilmente il fatto che se un quadrilatero ha due lati opposti paralleli e congruenti, allora è un parallelogramma, ma si ottiene di più:

Proposizione 5. *Due segmenti orientati AB e $A'B'$ sono equipollenti se e solo se il quadrilatero $ABB'A'$ è un parallelogramma.*

La dimostrazione è immediata, ma bisogna fare una precisazione: se i segmenti AB e $A'B'$ stanno su una stessa retta, non si può applicare la proposizione 4, ed anzi non si potrebbe dire nemmeno che $ABB'A'$ è un parallelogramma. Tuttavia, anche in questo caso vale il fatto che gli altri due "lati" AA' e BB' sono paralleli e congruenti, come si dimostra facilmente con le proprietà della congruenza. Conveniamo allora in questo caso di dire che "$AA'B'B$ è un parallelogramma degenere" (si pensi a cosa succede "schiacciando" un parallelogramma fatto con bastoncini rigidi, collegati con giunti snodabili nel piano).

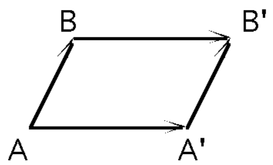
A questo punto possiamo cercare di approfondire il concetto di vettore libero. Un vettore libero, essendo una classe di segmenti orientati equipollenti, può essere pensato come quell'oggetto astratto che esprime ciò che hanno in comune segmenti equipollenti tra loro (così come ad esempio il numero 2 può essere pensato come l'ente astratto che esprime ciò che hanno in comune insiemi equipotenti come $\{\square,\circ\}$, $\{Napoli, Milano\}$, $\{bianco, azzurro\}$, ecc.). Questo concetto è molto più elementare di quanto a prima vista le definizioni date possano far pensare. Innanzitutto, abbiamo osservato che i segmenti orientati sono individuati dalla loro origine e dal loro estremo, cioè c'è una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei segmenti orientati e l'insieme delle coppie ordinate di punti; dunque si potrebbe prendere come *definizione* di segmento orientato AB semplicemente la coppia (A, B). Il fatto di aver definito un segmento orientato come una coppia data da un segmento e un verso, è dovuta ad alcuni motivi, anche di ordine psicologico, che qui non è il caso di approfondire. D'altra parte, anche in fisica certe volte è bene pensare ai vettori come coppie $(punto\ iniziale, punto\ finale)$: per esempio, se un punto materiale si muove nello spazio in un intervallo di tempo $[t_0, t_1]$, il *vettore spostamento* di tale moto è semplicemente quello che ha origine nella posizione iniziale ed estremo terminale nella posizione finale, indipendentemente dal fatto che il moto si svolga lungo il segmento congiungente o lungo un'altra traiettoria.
La relazione di equipollenza si potrebbe esprimere intutivamente dicendo che AB è equipollente a CD se quello che manca ad A per arrivare a B è uguale a quello che manca a C per arrivare a D: è questo il motivo per cui spesso un vettore libero $[AB]$ viene indicato con $B - A$.

Come ulteriore approfondimento, notiamo che c'è una notevole somiglianza tra il modo di definire i vettori liberi a partire dalle coppie di punti, e il modo di definire i numeri interi relativi a partire dai numeri naturali. Infatti, l'idea di numero negativo, nasce quando si vuole considerare, ad esempio, "quello che manca" a 10 per arrivare a 5, che è lo stesso di "quello che manca" a 7 per arrivare a 2, cioè, come si dice spesso, quando si vuole cercare di definire la sottrazione per ogni coppia di numeri. Tecnicamente la definizione si può dare così : nell'insieme delle coppie di numeri naturali, introduciamo la relazione di equivalenza secondo cui $(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$; un numero intero relativo è una classe di equivalenza rispetto a $\sim$. Analogamente, grazie alla proposizione 5, si può anche dire che un vettore libero è una classe di equivalenza di coppie di punti rispetto alla relazione secondo cui $(A, B) \sim (C, D) \iff ABDC$ è un parallelogramma. Naturalmente ci sono delle differenze: per esempio, è possibile identificare i numeri naturali con un sottoinsieme dei numeri relativi (un numero naturale a si identifica con il numero relativo dato dalle coppie del tipo $[x, x+a]$), mentre per i punti e i vettori non c'è una identificazione altrettanto naturale; quello che qualche volta però può essere conveniente, è fissare un punto O e considerare l'applicazione (biettiva, come segue dalla proposizione 3) che ad ogni punto P associa il vettore $[OP]$

Dalla proposizione 5 si ottiene che:

Corollario 6. *AB è equipollente ad $A'B'$ se e solo se AA' è equipollente a BB'.*

Dimostrazione. Il segmento orientato AB è equipollente ad $A'B'$ se e solo se $ABB'A'$ è un parallelogramma, mentre AA' è equipollente a BB' se e solo se $AA'B'B$ è un parallelogramma, ma ora basta osservare che $ABB'A'$ e $AA'B'B$ sono lo stesso quadrilatero! □



Si può introdurre una notazione più suggestiva: abbiamo già detto che un vettore $[AB]$ può essere anche indicato con $B - A$. Se A è un punto e $\mathbf{v}$ è un vettore, il punto B tale che $[AB] = \mathbf{v}$ (unico, per la proposizione 3) può essere indicato con $A + \mathbf{v}$. In questo modo si può anche scrivere

$$B - A = \mathbf{v} \iff B = A + \mathbf{v}.$$

È come se avessimo portato A al secondo membro, cambiando di segno!
Il corollario 6 si può esprimere così :

$$B - A = B' - A' \iff A' - A = B' - B,$$

come se avessimo effettuato dei passaggi algebrici!

Definizione 7. Fissata una unità di misura, si dice *modulo* di un vettore $\mathbf{v}$ la misura di un qualsiasi segmento che lo rappresenta.

La definizione data è "ben posta", cioè se cambiamo segmento rappresentativo del vettore, otteniamo sempre lo stesso numero, perché segmenti equipollenti sono congruenti, e hanno quindi la stessa misura.

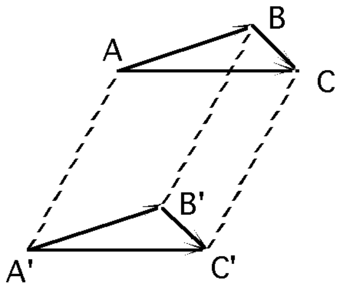
Si può dire che due vettori liberi sono uguali se e solo se hanno lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso (ecco perché in alcuni testi di fisica si trova scritto che un vettore è una grandezza caratterizzata da modulo, direzione e verso).

Naturalmente, quando diciamo "lo stesso verso", stiamo identificando versi concordi. Se volessimo una definizione precisa di "verso" di un vettore libero, dovremmo considerare come al solito una classe di equivalenza di versi su rette parallele, rispetto alla concordanza.
Qualche volta si parla anche di "vettori applicati": un vettore applicato in un un punto A può essere definito come una coppia $(A, \mathbf{v})$, dove $\mathbf{v}$ è un vettore libero. In effetti sappiamo che per ogni vettore libero $\mathbf{v}$, c'è un solo segmento rappresentativo AB di $\mathbf{v}$ che ha origine in A; c'è dunque una corrispondenza biunivoca tra i vettori applicati in A e i segmenti orientati con origine in A, ed è questo il motivo per cui un vettore applicato in A può essere direttamente definito come un segmento orientato con origine in A.
Se $\mathbf{v}$ è un vettore libero, è interessante considerare l'applicazione $\tau_{\mathbf{v}}$, che ad ogni punto P associa $P+\mathbf{v}$: tale applicazione si chiama *traslazione*. La traslazione $\tau_{\mathbf{v}}$ è un'applicazione biettiva dello spazio in sé (infatti ammette come inversa la traslazione determinata dal vettore opposto a $\mathbf{v}$), che conserva le distanze (infatti se P e Q sono due punti, si ha che $\tau_{\mathbf{v}}(P)-P$ e $\tau_{\mathbf{v}}(Q)-Q$ sono uguali in quanto sono proprio $\mathbf{v}$, e dunque, per il corollario 6, $P-Q=\tau_{\mathbf{v}}(P)-\tau_{\mathbf{v}}(Q)$; dunque, in particolare i segmenti $\overline{PQ}$ e $\overline{\tau_{\mathbf{v}}(P)\tau_{\mathbf{v}}(Q)}$ sono congruenti). In generale, una applicazione dello spazio in sé che conserva le distanze si chiama *movimento rigido*. Un altro esempio di movimento rigido è la *simmetria centrale*: se O è un punto, la simmetria centrale σ_O di centro O è definita da $\sigma_O(P)=O+(O-P)$. In altre parole, $\sigma_O(P)$ è quel punto P' tale che $[OP']=[PO]$. Il punto P' dunque, nel caso $P\neq O$, dovendo essere OP' parallelo ad OP, sta sulla retta OP, e dovendo essere OP' discorde da PO sta dalla parte opposta di P rispetto ad O; infine, dovendo essere $\overline{OP'}$ congruente ad $\overline{PO}$, otteniamo che P' non è altro che quel punto tale che O è il punto medio di $\overline{P'P}$, che è la definizione classica della simmetria centrale.
Una teoria assiomatica rigorosa della geometria elementare, può anche essere costruita partendo da assiomi sui movimenti rigidi.
Notiamo infine che dalla formula $P'=O+(O-P)$ abbiamo dedotto che O è il punto medio di $\overline{P'P}$: volendo effettuare formalmente dei passaggi algebrici, potremmo scrivere $P'=2\,O-P \Rightarrow O=\frac{P+P'}{2}$: è come se il punto medio O fosse la media di P e P'. Anche questo discorso può rendersi rigoroso: si possono definire le combinazioni lineari di punti, purché la somma dei coefficienti sia uno. Si ottiene, tra l'altro, che $\frac{A+B+C}{3}$ è il baricentro del triangolo ABC. Non ci addentriamo nel discorso, anche se è abbastanza semplice; diciamo solo che la definizione della combinazione $\Sigma_i\lambda_iP_i$, con $\Sigma_i\lambda_i=1$, si dà osservando che il punto $O+\Sigma_i\lambda_i(P_i-O)$ è sempre lo stesso, indipendentemente dalla scelta di O.

Abbiamo detto di voler dimostrare che l'insieme dei vettori liberi è uno spazio vettoriale sui numeri reali, dobbiamo quindi definire una operazione di somma tra vettori liberi e un prodotto tra numeri reali e vettori liberi. Cominciamo con la somma.

Definizione 8. Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori liberi. Se $\mathbf{u}=[AB]$, consideriamo il segmento orientato BC, che rappresenta $\mathbf{v}$ e ha origine in B. Il vettore $[AC]$ si dice *somma* di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, e si indica con $\mathbf{u}+\mathbf{v}$.

Dobbiamo però far vedere che la definizione ora data è ben posta, infatti non esiste un unico segmento AB che rappresenta $\mathbf{u}$ (mentre, una volta scelto AB, BC è unico), e quindi ci può essere il dubbio che se si sceglie un altro segmento rappresentativo, il vettore ottenuto alla fine può cambiare. Ma se $A'B'$ è un altro rappresentante di $\mathbf{u}$, allora è equipollente ad AB, e il segmento $B'C'$ che rappresenta $\mathbf{v}$ e ha origine in B' è equipollente a BC. Utilizzando il corollario 6 si ottiene che AA' è equipollente a BB', e che BB' è equipollente a CC'. Ma allora, per transitività, AA' è equipollente a CC', e dunque, ancora per il corollario 6, $A'C'$ è equipollente ad AC: dunque il vettore somma ottenuto partendo da $A'B'$ è lo stesso di quello ottenuto partendo da AB: la definizione è ben posta.



Conviene tenere ben presente per il seguito la formula

$$[AB] + [BC] = [AC].$$

Adesso facciamo vedere che l'insieme dei vettori liberi, con la somma ora definita, è un gruppo abeliano.

Proposizione 9. *Detto $\mathcal{V}$ l'insieme dei vettori liberi, valgono i seguenti fatti:*

(a) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (proprietà commutativa),

(b) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}, \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (proprietà associativa),

(c) $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \quad \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$

(d) $\forall \mathbf{u} = [AB] \in \mathcal{V}$, *il vettore opposto* $-\mathbf{u} = [BA]$ *è tale che* $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{u} = [AB]$, $\mathbf{v} = [BC]$. Sia AB' il rappresentante di $\mathbf{v}$ che ha origine in A, di modo che AB' è equipollente a BC (e $ABCB'$ è un parallelogramma). Per il corollario 6, AB è equipollente a $B'C$, dunque $\mathbf{u} = [B'C]$. In definitiva $\mathbf{u} + \mathbf{v} = [AB] + [BC] = [AC] = [AB'] + [B'C] = \mathbf{v} + \mathbf{u}$: abbiamo dimostrato *(a)*.

Sia ora $\mathbf{w} = [CD]$. Si ha $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = ([AB] + [BC]) + [CD] = [AC] + [CD] = [AD] = [AB] + [BD] = [AB] + ([BC] + [CD]) = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$: abbiamo dimostrato *(b)*.

Per dimostrare *(c)* e *(d)*, basta ricordare che $\mathbf{0} = [AA] = [BB]$: infatti $\mathbf{u} + \mathbf{0} = [AB] + [BB] = [AB] = \mathbf{u}$, e $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = [AB] + [BA] = [AA] = \mathbf{0}$. □

Osserviamo che la dimostrazione di *(a)* ci fa vedere che se $\mathbf{u}$ è rappresentato da AB e $\mathbf{v}$ è rappresentato da AB', cioè se li rappresentiamo con segmenti aventi la stessa origine A, la loro somma è rappresentata da AC, che è la diagonale del parallelogramma $ABCB'$. Questo fatto prende il nome di *regola del parallelogramma*, ed è usato in molti testi per dare la definizione di somma di vettori (liberi o applicati).

Passiamo a definire il prodotto di un numero reale per un vettore.

Definizione 10. Sia $\mathbf{u} = [AB]$ un vettore libero e k un numero reale. Sia CD un segmento orientato tale che:

(1) $|CD| = |k| \cdot |AB|$ (dove $|k|$ indica il valore assoluto di k, mentre $|AB|$ e $|CD|$ sono i moduli rispetto ad una fissata unità di misura);

e, se è non nullo (il che, per (1), avviene se e solo se $k \neq 0$ e $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$):

(2) CD è parallelo ad AB;

(3) $\begin{cases} \text{se } k > 0, CD \text{ è concorde ad } AB \\ \text{se } k < 0, CD \text{ è discorde con } AB \end{cases}.$

Il vettore $[CD]$ viene detto *prodotto di k per* $\mathbf{u}$ e viene indicato con $k\,\mathbf{u}$.

Il segmento CD esiste sempre, per le proprietà viste nel paragrafo 2, e bisogna anche dimostrare che la definizione di $k\,\mathbf{u}$ è ben posta. Innanzitutto osserviamo che la condizione (1) non dipende dall'unità di misura scelta, infatti può essere espressa (sempre per le proprietà del paragrafo 2) con $|\overline{CD}|^{\overline{AB}} = |k|$. Rimane però da far vedere che se scegliamo un altro rappresentante $A'B'$ di $\mathbf{u}$, e un altro segmento $C'D'$ che soddisfa (1), (2) e (3), si ha sempre $[C'D'] = [CD]$. Poiché anche questo è una semplice applicazione delle proprietà viste nel paragrafo 2 lasciamo la verifica per esercizio, e, già che ci siamo, lasciamo anche da dimostrare che

$$[CD] = k[AB] \iff CD \text{ verifica (1), (2) e (3) relativamente ad } AB$$

(l'implicazione $\Leftarrow$ è appunto la verifica che la definizione è ben posta, mentre $\Rightarrow$ vuol dire che ogni segmento che rappresenta $k[AB]$ soddisfa (1), (2) e (3) relativamente ad AB). La definizione del prodotto può essere espressa in maniera coincisa, ricordando che un vettore è caratterizzato da modulo, direzione e verso: il vettore $k\,\mathbf{u}$ è quel vettore che ha modulo $|k| \cdot |\,\mathbf{u}|$, stessa direzione di $\mathbf{u}$ e verso concorde o discorde a quello di $\mathbf{u}$ a seconda che k sia positivo o negativo.

Proposizione 11. *Indicato con* $\mathbf{R}$ *l'insieme dei numeri reali e con* $\mathcal{V}$ *l'insieme dei vettori liberi, si ha:*

(a) $\forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \quad 1\,\mathbf{u} = \mathbf{u}$*;*

(b) $\forall h, k \in \mathbf{R}, \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \quad (hk)\,\mathbf{u} = h(k\,\mathbf{u})$*.*

Dimostrazione. Se $\mathbf{u} = [AB]$, si ha:
(1) $|AB| = |1| \cdot |AB|$; e, se AB è non nullo
(2) AB è parallelo ad AB
(3) AB è concorde ad AB, e $1 > 0$.
Dunque $\mathbf{u} = [AB] = 1\,\mathbf{u}$: abbiamo dimostrato *(a)*.

Sia ora $[CD] = (hk)\,\mathbf{u}$ e $[C'D'] = k\,\mathbf{u}$. Dunque CD soddisfa le (1), (2) e (3) della definizione 10, relativamente ad AB e al numero hk, mentre $C'D'$ le soddisfa relativamente al numero k (e sempre relativamente ad AB). Se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, la dimostrazione è una semplice verifica. Supponendo allora $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, dimostriamo ora che CD soddisfa le (1), (2) e (3) della definizione 10, relativamente a $C'D'$ e al numero h. La (1) e la (2) si verificano subito: $|CD| = |hk||AB| = |h||k||AB| = |h||C'D'|$, se poi CD è non nullo, allora è parallelo ad AB, ma anche $C'D'$ è parallelo ad AB, e dunque CD è parallelo a $C'D'$. Per la (3), si tratta di utilizzare il fatto che la concordanza e la discordanza “si comportano come i segni $+$ e $-$”, più precisamente (sempre con CD non nullo) vediamo cosa succede nei due casi $h > 0$ e $h < 0$. Supponiamo $h > 0$: se $k > 0$, si ha che $C'D'$ è concorde ad AB, e inoltre $hk > 0$, dunque anche CD è concorde con AB, dunque CD e $C'D'$ sono concordi; se $k < 0$, si ha che $C'D'$ è discorde con AB, e inoltre $hk < 0$, dunque anche CD è discorde con AB, di nuovo dunque CD e $C'D'$ sono concordi. Se supponiamo invece $h < 0$, si ha che in entrambi i casi CD è discorde con $C'D'$: infatti nel caso $k > 0$, $C'D'$ è concorde con AB e CD è discorde con AB, mentre nel caso $k < 0$, $C'D'$ è discorde con AB e CD è concorde con AB. Abbiamo dimostrato quindi che $[CD] = h[C'D']$, e dunque $(hk)\,\mathbf{u} = h(k\,\mathbf{u})$ $\square$

Adesso passiamo a dimostrare le due proprietà distributive del prodotto rispetto alle somme di scalari e di vettori. Cominciamo con la prima.

Proposizione 12. *Se h e k sono numeri reali e $\mathbf{u}$ è un vettore libero, allora si ha*

$$(h + k)\,\mathbf{u} = h\,\mathbf{u} + k\,\mathbf{u}.$$

Dimostrazione. Se $\mathbf{u}$ è nullo l'uguaglianza è ovviamente verificata, supponiamo dunque che $\mathbf{u} = [AB]$ sia non nullo. Sia r la retta che passa per A e B, sia AC un rappresentante di $h\,\mathbf{u}$ e CD un rappresentante di $k\,\mathbf{u}$. Poiché $h\,\mathbf{u} + k\,\mathbf{u} = [AC] + [CD] = [AD]$, ci basta dimostrare che AD soddisfa le (1), (2) e (3) della definizione 10. Poiché AC è parallelo ad AB (o è nullo) e poiché per A c'è una sola retta parallela ad r (che deve essere dunque r stessa), si ha che $C \in r$; analogamente $D \in r$. Dunque la (2) è senz'altro soddisfatta, e per provare la (1) e la (3) dobbiamo analizzare i vari casi, dimostrando che il riporto di segmenti orientati rispetta la regola dei segni e del valore assoluto della somma di numeri reali. Fissiamo su r il verso secondo cui $A \prec B$.

1^o caso. Supponiamo $h \geq 0$, $k \geq 0$. Si ha allora che AC e CD sono concordi ad AB, dunque $A \preceq C \preceq D$. Ma allora $|AD| = |AC| + |CD| = h|AB| + k|AB| = (h + k)|AB|$, ed inoltre $h + k \geq 0$ e AD, se è non nullo, è concorde ad AB (perché $A \preceq D$).

2^o caso. Supponiamo $h \leq 0$, $k \leq 0$. Si ha $D \preceq C \preceq A$. E allora $|AD| = |AC| + |CD| = |h||AB| + |k||AB| = (-h - k)|AB| = |h + k||AB|$, ed inoltre $h + k \leq 0$ e AD, se è non nullo, è discorde con AB.

3^o caso. Supponiamo $h \geq 0$, $k \leq 0$, $|h| \geq |k|$. Si ha $A \preceq D \preceq C$. E allora $|AD| = |AC| - |CD| = |h||AB| - |k||AB| = (|h| - |k|)|AB| = |h + k||AB|$, ed inoltre $h + k \geq 0$ e AD, se è non nullo, è concorde ad AB.

4^o caso. Supponiamo $h \leq 0$, $k \geq 0$, $|h| \geq |k|$. Si ha $C \preceq D \preceq A$. E allora $|AD| = |AC| - |CD| = |h||AB| - |k||AB| = (|h| - |k|)|AB| = |h + k||AB|$, ed inoltre $h + k \leq 0$ e AD, se è non nullo, è discorde con AB.

È inutile considerare i casi in cui $|k| > |h|$ dato che, per la proprietà commutativa della somma di scalari e della somma di vettori, possiamo tranquillamente scambiare h con k e ricondurci ai casi 3 e 4. $\square$

Per dimostrare la distributività rispetto alla somma di vettori abbiamo bisogno di due risultati elementari. Il primo possiamo considerarlo come evidente:

—*Sia r una retta contenuta in un piano π. Allora $\pi - r$ è unione di due sottoinsiemi disgiunti π^+ e π^-, detti semipiani individuati da r, tali che due punti di $\pi - r$ stanno nello stesso semipiano se e solo se il segmento che li congiunge non incontra r.*

Il secondo è il teorema di Talete.

—*Date tre rette parallele r, r', r'' e due loro trasversali s e t (trasversali significa non parallele), e detti A, A' e A'' i punti di intersezione di s rispettivamente con r, r', r'', e analogamente B, B', B'' le intersezioni con t, si ha*

$$\frac{|AA'|}{|AA''|} = \frac{|BB'|}{|BB''|}.$$

Proposizione 13. *Sia h un numero reale, e $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori liberi. Allora*

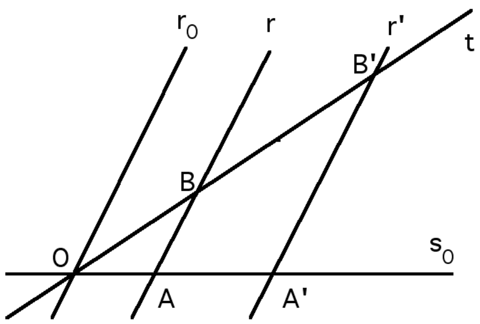
$$h(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = h\,\mathbf{u} + h\,\mathbf{v}.$$

Dimostrazione. Nel caso h, $\mathbf{u}$ o $\mathbf{v}$ siano nulli la dimostrazione è una semplice verifica. Supponiamo dunque che h, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ siano non nulli, e distinguiamo due casi, a seconda che siano o no paralleli (chiamiamo paralleli due vettori, se lo sono i loro rappresentanti).

1^o caso: $\mathbf{u}$ è parallelo a $\mathbf{v}$. Sia c il numero reale che ha per valore assoluto $|\mathbf{v}|/|\mathbf{u}|$ e per segno $+$ o $-$, a seconda che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ siano o no concordi. Dalla definizione di prodotto e dalla scelta di c si ha che $\mathbf{v} = c\,\mathbf{u}$. Ma allora, utilizzando le proposizioni 11 e 12, possiamo scrivere $h(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = h(\mathbf{u} + c\,\mathbf{u}) = h((1 + c)\,\mathbf{u}) = (h(1 + c))\,\mathbf{u} = (h + hc)\,\mathbf{u} = h\,\mathbf{u} + (hc)\,\mathbf{u} = h\,\mathbf{u} + h(c\,\mathbf{u}) = h\,\mathbf{u} + h\,\mathbf{v}$.

2^o caso: $\mathbf{u}$ non è parallelo a $\mathbf{v}$.

Poniamo $\mathbf{u} = [OA]$, $\mathbf{v} = [AB]$, $h\,\mathbf{u} = [OA']$. Siano ora: s_0 la retta che passa per O e A (dunque contiene anche A'), t la retta che passa per O e B, r la retta che passa per A e B, r' la retta parallela ad r che passa per A', r_0 la retta parallela ad r che passa per O. Tutta la figura è contenuta nel piano π che passa per O, A e B.



Osserviamo poi che, per l'assioma delle parallele, r' e t non possono essere parallele, altrimenti per il punto B passerebbero le due rette r e t che sarebbero entrambe parallele a r', e diverse tra di loro (altrimenti O sarebbe contenuto in r', come già A, e questo è impossibile perché allora $r' = s$, mentre $\mathbf{u}$ non è parallelo a $\mathbf{v}$). Chiamiamo allora B' l'intersezione di r' e t.

Dimostriamo ora che $[OB'] = h[OB]$, cioè che OB' soddisfa le (1), (2), (3) della definizione 10 relativamente ad h e OB.

Per il teorema di Talete applicato alle rette parallele r', r_0 ed r, con le trasversali s_0 e t, si ha che $|OB'|/|OB| = |OA'|/|OA|$. Poiché $[OA'] = h\,\mathbf{u} = h[OA]$, si ha $|OA'|/|OA| = |h|$ e dunque $|OB'|/|OB| = |h|$, da cui $|OB'| = |h||OB|$. Se poi OB' è non nullo, chiaramente è parallelo ad OB (stanno tutti e due su t), ci rimane dunque da controllare i versi. Siano ora π^+ e π^- i semipiani individuati da r_0, dove indichiamo con π^+ quello che contiene A, e fissiamo su s_0 il verso rispetto a cui A segue O e su t il verso in cui B segue O. Osserviamo che AB, essendo parallelo ad r_0, non incontra r_0, dunque $B \in \pi^+$; e per lo stesso motivo A' e B' stanno nello stesso semipiano. Supponiamo ora che $h > 0$. Poiché $[OA'] = h[OA]$, si ha $O \prec A'$, dunque AA' non contiene O, e quindi non incontra r_0, e questo significa che $A' \in \pi^+$. Ma allora anche $B' \in \pi^+$, il che implica che, essendo $B \in \pi^+$, BB' non incontra r_0, e quindi non contiene O. Poiché B segue O, e O non può essere compreso tra B e B', anche B' deve seguire O. Concludiamo che $[OB']$ è concorde con $[OB]$. Ragionando similmente, se $h < 0$, $A' \in \pi^-$, dunque $B' \in \pi^-$, e allora BB' incontra r_0, necessariamente nel punto O (che è l'unico in comune tra r_0 e t), dunque O è compreso tra B e B', il che vuol dire che OB' è discorde con OB. Abbiamo dimostrato che $[OB'] = h[OB]$.

Adesso dimostriamo che $[A'B'] = h[AB]$ (si potrebbero usare i teoremi sui triangoli simili, ma qui lo dimostriamo direttamente). Sia s la retta parallela ad s_0 e passante per B, s' la retta parallela ad s_0 e passante per B', e siano C e C' le intersezioni di s ed s' con r_0. Per le proprietà dei parallelogrammi, $[AB] = [OC]$ e $[A'B'] = [OC']$: possiamo allora provare che $[OC'] = h[OC]$. Ma ora già abbiamo dimostrato che $[OB'] = h[OB]$, siamo dunque nella stessa situazione in cui eravamo quando dovevamo dimostrare questo fatto, solo che al posto di r_0, r, r' ci sono s_0, s, s', al posto di A e A' ci sono B e B', al posto di B e B' ci sono C e C', al posto di t c'è r_0, e al posto di s_0 c'è t. Dunque con la stessa dimostrazione otteniamo $[OC'] = h[OC]$, e dunque $[A'B'] = h[AB]$.

A questo punto possiamo scrivere $h(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = h([OA] + [AB]) = h[OB] = [OB'] = [OA'] + [A'B'] = h\,\mathbf{u} + h\,\mathbf{v}$, come volevamo. $\square$

Le proposizioni 9, 11, 12 e 13, ci dicono che l'insieme $\mathcal{V}$ dei vettori liberi, con le operazioni di somma e prodotto esterno, è uno spazio vettoriale sul campo reale. Occupiamoci adesso di capire qual è la sua dimensione, andando per gradi: considereremo prima una retta, poi un piano, poi l'intero spazio.

Definizione 14. Sia $\mathbf{u}$ un vettore libero ed r una retta. Se esiste un rappresentante AB di $\mathbf{u}$ contenuto in r, allora si dice che $\mathbf{u}$ è un vettore di r.

Osserviamo esplicitamente che un qualsiasi rappresentante di un vettore di r, non è detto che sia contenuto in r, infatti si può facilmente dimostrare che $[AB]$ è un vettore di r se e solo se AB è nullo oppure è parallelo ad r: è questo il motivo per cui, se $\mathbf{u}$ è un vettore non nullo di r, si dice anche che è un vettore *parallelo* ad r; poiché poi un tale vettore individua la direzione di r, è bene tenere a mente la seguente definizione.

Definizione 15. Un vettore non nullo di una retta r viene detto anche un *vettore direzionale* di r.

Proposizione 16. *L'insieme $\mathcal{V}_r$ dei vettori di una retta r, è un sottospazio vettoriale di dimensione* 1 *di $\mathcal{V}$.*

Dimostrazione. Se A e B sono due punti distinti su r, il vettore $\mathbf{u} = [AB]$ è un vettore direzionale di r. Facciamo vedere che ogni vettore $\mathbf{v}$ di r è multiplo di $\mathbf{u}$. Infatti, come già abbiamo visto all'inizio della dimostrazione della proposizione 13, prendendo il numero c che ha per valore assoluto $|\mathbf{v}|/|\mathbf{u}|$ e, se $\mathbf{v}$ è non nullo, per segno $+$ o $-$ a seconda che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ siano o no concordi, si ha $\mathbf{v} = c\,\mathbf{u}$.

Viceversa ogni vettore del tipo $h\,\mathbf{u}$, essendo (per definizione di prodotto) o nullo, o parallelo ad AB, e quindi ad r, è un vettore di r.

Abbiamo dimostrato che $\mathcal{V}_r$ è il sottospazio generato da $\{\,\mathbf{u}\}$, che è indipendente perché $\mathbf{u}$ è non nullo, e dunque è un sottospazio di dimensione uno. □

Esercizio. Dimostrare che due rette sono parallele se e solo se i rispettivi spazi dei vettori sono uguali.

Questo giustifica il fatto che qualche volta lo spazio dei vettori di r viene anche detto la *direzione* o *spazio direttore* di r

Passiamo al piano. Stabiliamo prima il seguente fatto.

Proposizione 17. *Siano* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *due vettori liberi. Allora l'insieme* $\{\,\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ *è linearmente indipendente se e solo se* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *sono non nulli e non paralleli.*

Dimostrazione. Dimostriamo il "solo se" (cioè supponiamo che i vettori siano indipendenti e dimostriamo che sono non nulli e non paralleli). Il fatto che i vettori di un sistema indipendente devono essere non nulli è un fatto vero in ogni spazio vettoriale. Se i vettori fossero poi paralleli, presa una qualsiasi retta r parallela ai due vettori, avremmo $\{\,\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \subseteq \mathcal{V}_r$, e poichè per la proposizione 16 si ha $\dim \mathcal{V}_r = 1$, allora $\{\,\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ sarebbe dipendente.

Dimostriamo il "se" (cioè supponiamo che i vettori siano non nulli e non paralleli e dimostriamo che sono indipendenti). Se $\{\,\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ fosse dipendente allora, come in ogni spazio vettoriale, uno dei due, per esempio $\mathbf{v}$, dipenderebbe dall'altro. Ma se fosse $\mathbf{v} = h\,\mathbf{u}$, per definizione di prodotto, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sarebbero paralleli. □

Definizione 18. Sia $\mathbf{u}$ un vettore libero e π un piano. Se esiste un rappresentante AB di $\mathbf{u}$ contenuto in π, allora si dice che $\mathbf{u}$ è un vettore di π.

Come per le rette, un vettore libero $[AB]$ è un vettore di π se e solo se AB è nullo o parallelo a π. Un vettore non nullo di π viene anche detto essere *parallelo* a π.

Proposizione 19. *L'insieme $\mathcal{V}_\pi$ dei vettori di un piano π, è un sottospazio vettoriale di dimensione* 2 *di $\mathcal{V}$.*

Dimostrazione. Siano O, A e B tre punti non allineati di π. Dunque i vettori $\mathbf{u} = [OA]$ e $\mathbf{v} = [OB]$ sono vettori non nulli e non paralleli.

Sia $\mathbf{w}$ un vettore di π, rappresentato dal segmento OC, che dovendo essere parallelo a π, e contenendo $O \in \pi$, deve essere tutto contenuto in π. Sia x la retta che contiene OA, ed y la retta che contiene OB, di modo che $\{\mathbf{u}\}$ è una base di $\mathcal{V}_x$ e $\{\mathbf{v}\}$ una base di $\mathcal{V}_y$. Consideriamo l'intersezione C_x di x con la retta y_C passante per C e parallela ad y: C_x si chiama la proiezione di C su x secondo la direzione di y (esiste perché altrimenti y_C avrebbe due parallele passanti per il punto O: x ed y). Si ha $[OC] = [OC_x] + [C_xC]$. Ora, siccome $OC_x \subseteq x$, $[OC_x] \in \mathcal{V}_x$, e $\{\mathbf{u}\}$ è una base di $\mathcal{V}_x$, dunque $[OC_x] = h\,\mathbf{u}$. Poiché $C_xC \subseteq y_C$, ed y_C è parallela ad y, si ha $[C_xC] \in \mathcal{V}_y$, e quindi $[C_xC] = k\,\mathbf{v}$. In definitiva $\mathbf{w} = h\,\mathbf{u} + k\,\mathbf{v}$.

Abbiamo dimostrato che ogni vettore di $\mathcal{V}_\pi$ è combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$; vale anche il viceversa. Infatti, rappresentando $h\,\mathbf{u}$ con un segmento OC_x con l'origine in $O \in \pi$, C_x deve appartenere a π, e rappresentando $k\,\mathbf{v}$ con un segmento C_xC con l'origine in C_x, si ha $C \in \pi$. Dunque $h\,\mathbf{u} + k\,\mathbf{v}$, è rappresentato da OC, che è contenuto in π, da cui $h\,\mathbf{u} + k\,\mathbf{v} \in \mathcal{V}_\pi$. Con questo abbiamo finito, perché abbiamo dimostrato che $\mathcal{V}_\pi$ è il sottospazio generato dal sistema $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, che, essendo costituito da vettori non nulli e non paralleli, è un sistema indipendente (per la proposizione 17), dunque $\dim \mathcal{V}_\pi = 2$. □

Nella prima parte della dimostrazione ora fatta, si sarebbe potuta ovviamente utilizzare anche la proiezione C_y di C su y: si sarebbero ottenuti gli stessi coefficienti h e k (dato che $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ è una base, dunque le componenti sono univocamente determinate). O ancora, si possono utilizzare entrambe le proiezioni C_x e C_y, e usare la regola del parallelogramma.

Definizione 20. I vettori di un insieme si dicono *complanari* se possono essere rappresentati con segmenti orientati contenuti tutti in uno stesso piano.

Proposizione 21. *Un insieme* $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ *è linearmente indipendente se e solo se* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *non sono complanari.*

Dimostrazione. Dimostriamo il "solo se". Se i tre vettori fossero complanari, detto π il piano su cui è possibile rappresentare tutti e tre i vettori, si avrebbe che $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ sono vettori di π; ma tre vettori contenuti nello spazio $\mathcal{V}_\pi$ di dimensione 2, non possono essere indipendenti.

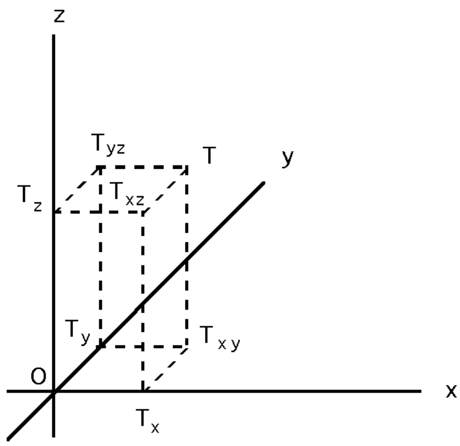
Dimostriamo il "se". Se i tre vettori fossero dipendenti, uno di essi, per esempio $\mathbf{w}$, sarebbe combinazione degli altri due. Se $\mathbf{u} = [OA]$ e $\mathbf{v} = [OB]$, consideriamo un piano π che contiene O, A e B (diciamo *un* piano, e non *il* piano, perché se i tre punti sono allineati, il che accade se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli, esiste più di un piano che contiene O, A e B). Allora $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono vettori di π, che appartengono cioè a $\mathcal{V}_\pi$, e quindi anche $\mathbf{w}$, che è una loro combinazione lineare, deve appartenere al sottospazio $\mathcal{V}_\pi$, dunque anche lui può essere rappresentato da un segmento orientato giacente su π, il che è assurdo, perché stiamo supponendo i tre vettori non complanari. Dunque $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ è linearmente indipendente. □

Tra le righe della dimostrazione del "se", troviamo il fatto che ogni sottospazio di dimensione due di $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ è un $\boldsymbol{\mathcal{V}}_\pi$ per un piano π: basta prendere una base $\{\,\mathbf{u},\,\mathbf{v}\}$, e trovare il piano π (che sarà unico), ragionando come nella suddetta dimostrazione. Analogamente, ogni sottospazio di dimensione uno di $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ è un $\boldsymbol{\mathcal{V}}_r$ per una retta r: basta prendere la retta che passa per gli estremi di un rappresentante di un vettore non nullo del sottospazio.

Proposizione 22. *La dimensione dello spazio vettoriale $\mathcal{V}$ è tre.*

Dimostrazione. Consideriamo quattro punti O, A, B, C non contenuti in uno stesso piano (abbiamo già detto, alla fine del paragrafo 2, che un piano contiene tre punti non allineati, ed esiste sempre un punto fuori di esso): i tre vettori $\mathbf{u} = [OA]$, $\mathbf{v} = [OB]$ e $\mathbf{w} = [OC]$ non possono essere dunque complanari. Il sistema $\{\,\mathbf{u},\,\mathbf{v},\,\mathbf{w}\}$ è allora indipendente; se ora dimostriamo che ogni vettore $\mathbf{t} = [OT] \in \mathcal{V}$ è combinazione di $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, abbiamo che $\{\,\mathbf{u},\,\mathbf{v},\,\mathbf{w}\}$ è una base di $\mathcal{V}$, e quindi $\mathcal{V}$ ha dimensione tre.

Consideriamo le rette x, y e z, che contengono O e, rispettivamente, A, B e C, e sia π_{xy} il piano che contiene x e y (è cioè l'unico piano che contiene i tre punti non allineati O, A e B): chiaramente $\{\mathbf{w}\}$ è una base di $\mathcal{V}_z$, e $\{\,\mathbf{u},\,\mathbf{v}\}$ (essendo $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ indipendenti) è una base di $\mathcal{V}_\pi$. Chiamiamo T_{xy} la proiezione di T sul piano π_{xy} secondo la direzione della retta z, cioè l'intersezione di π_{xy} con la retta z_T che passa per T ed è parallela a z (il fatto che questa intersezione esista, sebbene sia quasi evidente, può essere dedotto dalle cose che abbiamo detto sui piani nel paragrafo 2; in particolare è importante utilizzare il fatto che due piani non paralleli si incontrano in una retta). Il vettore $[T_{xy}T]$, essendo contenuto in z_T, è un vettore parallelo a z, e poiché $\mathbf{w}$ è una base di $\mathcal{V}_z$, si ha $[T_{xy}T] = l\,\mathbf{w}$. Inoltre $[OT_{xy}]$ è un vettore di π_{xy}, e poiché $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono una base di $\mathcal{V}_{\pi_{xy}}$, si ha $[OT_{xy}] = h\,\mathbf{u} + k\,\mathbf{v}$. Dunque $\mathbf{t} = [OT] = [OT_{xy}] + [T_{xy}T] = h\,\mathbf{u} + k\,\mathbf{v} + l\,\mathbf{w}$, come volevamo. $\square$.



Naturalmente, nella precedente dimostrazione, si sarebbe potuta utilizzare anche la proiezione T_{yz} su π_{yz} secondo la direzione di x, o la proiezione T_{xz} su π_{xz} secondo la direzione di y. Poiché $\{\,\mathbf{u},\,\mathbf{v},\,\mathbf{w}\}$ è una base, si otterranno sempre gli stessi coefficienti h, k, l. Per visualizzare geometricamente chi sono questi coefficienti, basta osservare che se rappresentiamo i tre vettori $h\,\mathbf{u}$, $k\,\mathbf{v}$ ed $l\,\mathbf{w}$ con l'origine in O, i rispettivi punti terminali T_x, T_y e T_z sono le proiezioni di T sugli assi x, y e z, rispettivamente secondo le giaciture dei piani π_{yz}, π_{xz} e π_{xy} (cioè, ad esempio, T_x è l'intersezione di z con il piano che passa per T ed è parallelo a π_{yz}).

La dimostrazione dettagliata di quello che abbiamo appena detto, a partire dalle proprietà viste nel paragrafo 2, può essere un esercizio simpatico, per chi è interessato.

4. Riferimenti.

Incominciamo con la definizione “classica” di riferimento su una retta.

Definizione 1. Sia r una retta. Un *riferimento* R su r, è una terna costituita da un punto $O \in r$, detto *origine*, una unità di misura u, e un verso su r. Se P è un punto di r, si dice *ascissa* di P rispetto al riferimento R, il numero che ha per valore assoluto la misura di $\overline{OP}$ (rispetto ad u), e (se questa è non nulla) per segno $+$ o $-$ a seconda che P segua o preceda O nel verso prescelto.

La corrispondenza tra la retta r e il campo $\mathbf{R}$ dei numeri reali, che ad ogni punto associa la sua ascissa rispetto al riferimento R, è biettiva: è facile dimostrarlo usando le proprietà elementari della misura, tuttavia la dimostrazione si ottiene “automaticamente” ricorrendo ai vettori. Vediamo come.

Definizione 2. Sia R un riferimento su una retta r. Il vettore libero $\mathbf{i}$, che è parallelo ad r, ha modulo uno (rispetto ad u) e verso concorde con il verso in R si chiama *vettore unità* (o *versore*) del riferimento R.

Poiché il vettore unità $\mathbf{i}$ è un vettore non nullo di r, costituisce una base di $\mathcal{V}_r$: tale base si chiama *riferimento vettoriale associato* al riferimento R. Nel paragrafo 3, abbiamo osservato più volte che il numero che ha per valore assoluto $|\overline{OP}|/|\,\mathbf{i}|$, e (se questa è non nulla) per segno $+$ o $-$ a seconda che OP sia o no concorde con $\mathbf{i}$, è la componente di $[OP]$ rispetto alla base $\{\,\mathbf{i}\}$, ma siccome $\mathbf{i}$ ha modulo uno ed ha il verso di R questo numero é proprio quello che abbiamo definito ascissa di P. Dunque, molto semplicemente, l'ascissa di P rispetto ad R è la componente del vettore $[OP]$ rispetto al riferimento vettoriale $\{\,\mathbf{i}\}$ (si ha quindi che x è l'ascissa di P se e solo se $[OP] = x\,\mathbf{i}$).

Ora, sappiamo che la corrispondenza che ad ogni punto $P \in r$ associa il vettore $[OP]$ è una corrispondenza biettiva tra r e $\mathcal{V}_r$, e che la corrispondenza che ad ogni vettore di $\mathcal{V}_r$ associa la sua componente rispetto ad una base è una corrispondenza biettiva tra $\mathcal{V}_r$ ed il campo $\mathbf{R}$ dei numeri reali; dunque la corrispondenza che associa ad ogni punto di r la sua ascissa, che non è altro che la composizione delle due precedenti, è biettiva.

A questo punto conviene osservare che, assegnato un punto O su r e una base $\{\,\mathbf{i}\}$ di $\mathcal{V}_r$, c'è un solo riferimento R che ha origine O e vettore unità $\mathbf{i}$. Per questo motivo nei testi moderni si preferisce prendere come *definizione* di riferimento su r, una coppia costituita da un'origine $O \in r$ ed un riferimento vettoriale (= base) $\{\,\mathbf{i}\}$ di $\mathcal{V}_r$.

Passiamo al piano.

Definizione 3. Sia π un piano. Un *riferimento* R su un piano è individuato da due rette non parallele $x, y \subset \pi$ (detti assi coordinati), e da due riferimenti R_x ed R_y, rispettivamente su x e y, aventi entrambi origine nell'intersezione O di x ed y, che viene detta *origine* del riferimento R. Se P è un punto di π, detta P_x la proiezione di P su x secondo la direzione di y, e P_y la proiezione di P su y secondo la direzione di x, si dice *ascissa* di P l'ascissa di P_x nel riferimento R_x ed *ordinata* di P l'ascissa di P_y nel riferimento R_y. La coppia costituita dall'ascissa e dall'ordinata si chiama la coppia delle *coordinate* di P rispetto al riferimento R.

Generalmente la coppia delle coordinate di P viene indicata con (x, y), e generalmente sarà chiaro dal contesto se la lettera x (o y) indica l'ascissa (ordinata) o indica la retta x (o y); anzi, molto spesso le rette x e y vengono chiamati *assi* $\vec{x}$, $\vec{y}$, perché si considerano come rette orientate con il verso scelto nei riferimenti R_x ed R_y.

Anche nel caso del piano è facile vedere che la corrispondenza che ad ogni punto di π fa corrispondere la coppia (x, y) è una corrispondenza biettiva tra π ed $\mathbf{R}^2$. Infatti, se $\mathbf{i}$ è il vettore unità di R_x e $\mathbf{j}$ è quello di R_y, tali vettori sono non nulli e non paralleli, dunque $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ è una base di $\mathcal{V}_\pi$. Ora osserviamo che, per quanto detto nel caso della retta, $[OP_x] = x\,\mathbf{i}$, $[OP_y] = y\,\mathbf{j}$, ed inoltre, per la regola del parallelogramma $[OP] = [OP_x] + [OP_y] = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$: le coordinate di P sono le componenti del vettore $[OP]$ nella base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ (d'altra parte, è la stessa costruzione fatta nella dimostrazione della proposizione 19, tenendo presente quanto detto subito dopo tale dimostrazione). Dunque la corrispondenza che ad ogni punto associa le sue coordinate si ottiene facendo corrispondere prima al punto P il vettore $[OP]$ (corrispondenza biettiva tra π e $\mathcal{V}_\pi$) e poi calcolando le componenti rispetto alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ (corrispondenza biettiva tra $\mathcal{V}_\pi$ e $\mathbf{R}^2$); tale corrispondenza è perciò biettiva.

Anche nel caso del piano si può osservare che il riferimento è univocamente determinato dall'origine O e dalla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ di $\mathcal{V}_\pi$. Si può dunque prendere anche come *definizione* di riferimento, una coppia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$, tale che O è punto e $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ è un riferimento vettoriale (=base ordinata) di $\mathcal{V}_\pi$, che viene appunto detto *riferimento vettoriale associato* ad R.

Passiamo ora a definire un riferimento nello spazio

Definizione 4. Un *riferimento* R dello spazio è individuato da tre rette x, y, z non contenute in uno stesso piano, ma tutte passanti per un punto O, e da tre riferimenti R_x, R_y ed R_z rispettivamente su x, y e z, aventi tutti origine in O. Il punto O viene detto *origine* del riferimento R. Se P è un punto di π, sia P_x la proiezione di P su x secondo la giacitura del piano π_{yz}, che contiene y e z, sia P_y la proiezione di P su y secondo la giacitura del piano π_{xz} che contiene x e z, e sia P_z a proiezione di P su z secondo la giacitura del piano π_{xy} che contiene x ed y: si dice *ascissa* di P l'ascissa di P_x nel riferimento R_x, si dice *ordinata* di P l'ascissa di P_y nel riferimento R_y e si dice *quota* di P l'ascissa di P_z nel riferimento R_z. La terna costituita dall'ascissa, dall'ordinata e dalla quota si chiama la terna delle *coordinate* di P rispetto al riferimento R.

Anche in questo caso conviene osservare che i vettori unità **i**, **j**, **k** rispettivamente di R_x, R_y ed R_z, essendo non complanari (perché non lo sono le rette x, y e z), sono indipendenti, ed essendo in numero uguale alla dimensione di $\mathcal{V}$, formano una sua base. Anche qui, tenendo presente il discorso fatto subito dopo la dimostrazione della proposizione 22 del paragrafo 3, si ha che le coordinate (x, y, z) (da non confondere con gli assi) di P sono le componenti del vettore $[OP]$ rispetto alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Di nuovo, poiché la corrispondenza che ad ogni punto P associa il vettore $[OP] \in \mathcal{V}$ è biettiva, come pure la corrispondenza che ad ogni vettore associa la terna delle sue componenti, otteniamo che la corrispondenza che ad ogni punto associa le sue coordinate è una funzione biettiva tra lo spazio ed $\mathbf{R}^3$.

Il riferimento R è individuato da O e da **i**, **j** e **k**, dunque un riferimento dello spazio può essere definito come una coppia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$, tale che O è un punto e $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ è un riferimento vettoriale, detto ovviamente *riferimento vettoriale associato* ad R.

Si possono dare anche altre definizioni equivalenti per i riferimenti. Per esempio, si può utilizzare il *punto unità*: vediamo come è definito.
Nel caso della retta il punto unità di un riferimento R è il punto U che ha ascissa uno. È facile vedere che data una coppia di punti distinti (O, U), esiste uno ed un solo riferimento che ha O come origine e U come punto unità (basta osservare che deve aversi $[OU] = \mathbf{i}$): un riferimento sulla retta potrebbe quindi essere semplicemente definito come una coppia di punti distinti.
Un riferimento nel piano è individuato dalla terna (O, U_x, U_y) data dall'origine e dai punti unità dei due assi (che hanno coordinate rispettivamente $(1, 0)$ e $(0, 1)$). Si può dunque definire un riferimento, semplicemente come una terna di punti non allineati. Il punto U di coordinate $(1, 1)$ si chiama *punto unità* del riferimento. Nel caso del piano, la coppia (O, U) non individua il riferimento, tuttavia si può osservare che assegnando anche le *direzioni* degli assi, risultano individuati gli assi stessi, e i due punti unità: un riferimento nel piano può dunque essere definito come una quaterna (O, d_x, d_y, U), dove O e U sono due punti distinti, e d_x e d_y sono direzioni distinte tra loro e distinte dalla direzione di OU.
Nel caso dello spazio, analogamente, i punti unità degli assi hanno coordinate $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, ed il punto unità è il punto di coordinate $(1, 1, 1)$. Il riferimento può essere definito come una quaterna (O, U_x, U_y, U_z) di punti non allineati, o anche come una cinquina (O, d_x, d_y, d_z, U), dove O ed U sono punti distinti e d_x, d_y, d_z sono tre direzioni non parallele ad uno stesso piano, e tali che mai due di esse insieme con la direzione di OU sono parallele ad uno stesso piano.