Sulla classificazione delle forme bilineari reali in dimensione 2 e 3

Premessa.

Per la comprensione di questi appunti sono necessari solo i primissimi rudimenti di Algebra (in particolare di Algebra Lineare), sono incluse quindi anche molte definizioni di base. Si è cercato di rendere il tutto abbastanza generale e sintetico, tuttavia sono state inserite liberamente alcune parti, evidenziate in piccolo, che contengono commenti, divagazioni, precisazioni; esse possono essere omesse da chi fosse interessato ad una rapida acquisizione dei risultati trattati.

Generalità.

Definizione. Siano M_1, ..., M_n, N moduli su di uno stesso anello commutativo unitario A. Un'applicazione $f : M_1 \times \ldots \times M_n \to N$ si dice *n- lineare (multilineare)* se tutte le funzioni parziali da essa determinate (rispetto a ciascun argomento) sono omomorfismi di moduli, cioè se per ogni i

$$f(m_1, \ldots, \alpha m_i + \alpha' m_i', \ldots, m_n) = \alpha f(m_1, \ldots, m_i, \ldots, m_n) + \alpha' f(m_1, \ldots, m_i', \ldots, m_n).$$

Se tutti gli M_i sono uguali ad uno stesso modulo M e se $N = A$, allora la funzione f si chiama *forma multilineare* su M. Una forma multilineare f si dice *simmetrica* se è invariante per scambi di due argomenti, si dice *antisimmetrica* se per ogni scambio di due argomenti il suo valore cambia di segno, si dice *alternante* se è nulla ogni volta che ci sono due argomenti uguali.

Osservazione. Una forma 1-lineare non è altro che una forma lineare, cioè un'applicazione lineare $M \to A$. L'insieme delle forme lineari è in maniera naturale un modulo su A: il modulo duale M^*.

Osservazione. Un'applicazione alternante è sempre antisimmetrica, e il viceversa è vero se nell'anello esiste $1/2$. Quindi, ad esempio, su un campo di caratteristica $\neq 2$ "antisimmetrica" e "alternante" sono sinonimi.

Qualcuno potrebbe non gradire la locuzione "nell'anello esiste $1/2$". Intendiamo dire che: l'anello è unitario, l'unità è indicata con 1 e $1 + 1$ è indicato con 2, ed infine esiste un elemento (indicato con $1/2$) che moltiplicato per 2 dà 1. Più in generale, se n è un numero naturale in un anello unitario, si può continuare ad indicare con n l'elemento ottenuto sommando n volte l'unità dell'anello. Con questa notazione possiamo dire che un campo di caratteristica 2 è un campo in cui $2 = 0$. Più generalmente e più precisamente, se A è un anello unitario, c'è un unico omomorfismo di anelli unitari (cioè che manda 1 nell'unità di A) $c : \mathbf{Z} \to A$: noi continuiamo a chiamare n l'elemento $c(n)$. Non tutti sono d'accordo con questa notazione: alcuni addirittura evitano di indicare con 1 l'unità dell'anello, e $c(n)$ viene chiamato "multiplo dell'unità secondo n"; qualcun altro accetta di l'identificazione di n con $c(n)$ solo quando c è iniettivo. La scelta fatta qui dipende da questo fatto: molti discorsi sugli anelli unitari, per essere validi anche per l'anello nullo, richiedono che l'unico elemento di tale anello possa essere indicato sia con 0 che con 1, allora tanto vale indicare con n l'elemento $c(n)$ di A, anche quando c non è iniettiva.

Qui siamo interessati principalmente alle forme bilineari reali (cioè $A = \mathbf{R}$ ed $n = 2$). D'ora in avanti supporremo quasi sempre che l'anello base sia un campo K, e che quindi i moduli siano spazi vettoriali su K (quasi sempre di dimensione finita).

Una maniera di "visualizzare" una forma bilineare reale su uno spazio vettoriale reale V, è quella di pensarla come una struttura su V.

Consideriamo per esempio un prodotto scalare euclideo s sullo spazio V dei vettori liberi del piano: è una forma bilineare simmetrica (=prodotto scalare) definita positiva, cioè $s(v, v) > 0$ per $v \neq \underline{0}$ (qualcuno chiama *strettamente euclideo* un tale prodotto). Nel prodotto scalare sono racchiuse tutte le informazioni sull'ortogonalità e le distanze, più la scelta di un'unità di misura. Cambiando prodotto scalare, cambiano le nozioni di ortogonalità e di distanza, o almeno l'unità di misura. Nella figura 1 c'è una circonferenza unitaria e sono indicate tre basi ortonormali, rispetto ad un prodotto euclideo s_1;

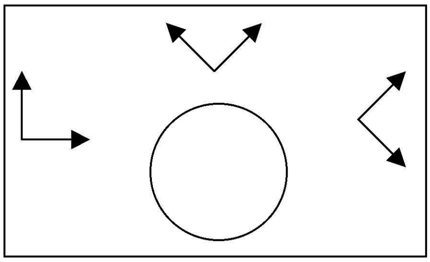

Figura 1

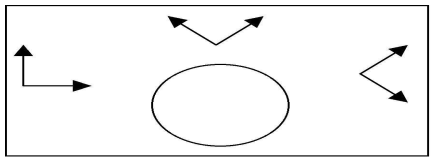

Figura 2

mentre nella figura 2 abbiamo tre basi ortonormali ed una circonferenza unitaria rispetto ad un altro prodotto euclideo s_2. Il prodotto s_1 è un prodotto "naturale", cioè ci dà le nostre ordinarie nozioni di ortogonalità e distanza (anche tutti i prodotti proporzionali ad s_1 sono naturali, e corrispondono a diverse scelte dell'unità di misura). Il prodotto s_2 è più strano, tuttavia ha pur sempre le proprietà che consentono di sviluppare una geometria metrica: ci si potrebbe aspettare quindi che in questo ambiente possano nascere teoremi diversi da quelli della geometria metrica ordinaria. Questo però non accade, ed è facile rendersene conto se si pensa che le figure 1 e 2 possono essere "riprodotte" guardando una stessa figura da diverse posizioni (vedi figura 3).

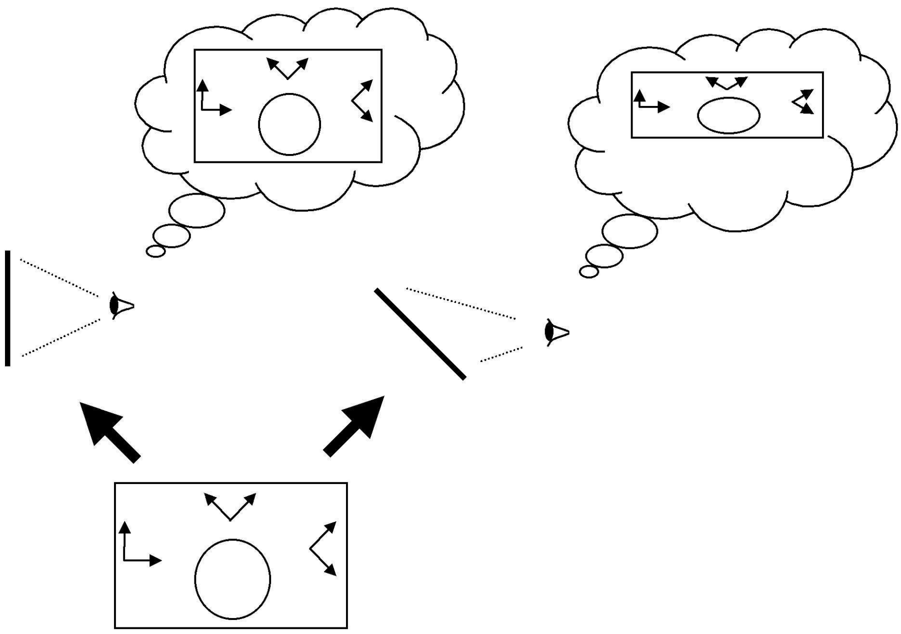

Figura 3

Più precisamente, il fatto è che esiste una biezione $f : V \to V$ che trasforma s_2 in s_1 (cioè $s_2(v, w) = s_1(f(v), f(w))$) ($f$ è necessariamente lineare). Dunque possiamo chiamare equivalenti due prodotti euclidei se esiste una biezione che trasforma uno nell'altro.

È possibile dunque fare la classificazione, cioè la suddivisione in classi di equivalenza, dei prodotti scalari euclidei. Naturalmente possiamo confrontare allo stesso modo anche prodotti scalari su due spazi diversi, e ampliare la classificazione (detto in altra maniera, studiare le classi di isomorfismo delle strutture (V, s), cioè degli spazi euclidei). Però, se W è uno spazio isomorfo (come spazio vettoriale) a V, comunque si consideri un prodotto su W, questo corrisponde ad un prodotto su V (tramite un isomorfismo tra V e W), quindi in realtà possiamo, per ogni assegnata dimensione, fissare uno spazio V e classificare i prodotti su V. Quello che si scopre è che tutti i prodotti euclidei su V sono equivalenti. Un altro modo per esprimere questo fatto è dire che, dato un prodotto scalare euclideo s, esiste un riferimento rispetto al quale esso è rappresentato con una data formula: $s(v, w) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ (dove le x sono le coordinate di$v$ e le y quelle di w).

Se lasciamo cadere l'ipotesi "definito positivo" e consideriamo perciò un qualunque prodotto scalare, allora le cose cambiano. Per esempio il prodotto scalare di Minkowskj su $\mathbf{R}^4$ non è (strettamente) euclideo, quindi non potrebbe essere equivalente al prodotto euclideo standard.

Dunque nello spazio di Minkowskj succedono cose diverse da quelle dello spazio quadridimensionale "ordinario" (si pensi alla distinzione tra vettori tipo spazio, tipo tempo e tipo luce, che in uno spazio ordinario non c'è). Comunque, fissato V, abbiamo solo un numero finito di prodotti scalari a meno di equivalenza, e la loro classificazione, non difficile, è data dal teorema di inerzia di Sylvester, che vedremo tra poco.

Così come per i prodotti scalari, cioè per le forme bilineari simmetriche, anche per le antisimmetriche la classificazione è facile e ben nota. Il nostro scopo è classificare tutte le forme bilineari, e qui studieremo il problema in dimensione due e in dimensione tre. Utilizzeremo il fatto che ogni forma bilineare è in un unico modo somma di una forma simmetrica e di una antisimmetrica, e ci servirà anche la classificazione degli operatori lineari (endomorfismi) di V. Naturalmente la definizione di equivalenza di operatori è formalmente diversa da quella di equivalenza tra forme, ma consiste ovviamente ancora nel considerare equivalenti due operatori se possono essere pensati come "due modi diversi di vedere una stessa trasformazione". La classificazione degli operatori è più laboriosa, ma comunque è ben nota, e sarà richiamata.

Definizione. Se b è una forma bilineare su V, allora la funzione $q : V \to K$ data da $q(v) = b(v, v)$ si chiama *forma quadratica associata a b*.

Le forme quadratiche sono un argomento importante, ma qui ce ne interesseremo solo marginalmente, in maniera strumentale ai nostri obiettivi.

Definizione. Siano V_1 e V_2 due spazi vettoriali su uno stesso campo e siano b_1 e b_2 due forme bilineari definite rispettivamente su V_1 e V_2. Se $f : V_1 \to V_2$ è un omomorfismo tale che $b_2(f(v_1), f(v_2)) = b_1(v_1, v_2)$ allora si dice che f *muta* b_1 *in* b_2 e che f *è un omomorfismo metrico* di (V_1, b_1) in (V_2, b_2). Un *isomorfismo metrico* è un omomorfismo metrico f che ammette un omomorfismo metrico inverso (in questo caso, ciò equivale a dire che f è sia un isomorfismo di spazi vettoriali che un omomorfismo metrico). Due forme bilineari b_1 e b_2 su uno stesso spazio V si dicono *congruenti* se (V, b_1) è (metricamente) isomorfo a (V, b_2).

Per inciso, se b è una forma bilineare definita su uno spazio vettoriale V di dimensione n, e se si fissa una base $R = (v_1, \dots, v_n)$, allora la matrice associata a b rispetto ad R è quella matrice A tale che b viene mutata dalla coordinazione rispetto ad R nella forma $(x, y) \mapsto x^tAy$ (dove i vettori x ed y sono matrici colonna).

Osservazione. Classificare le forme bilineari significa studiare le classi di isomorfismo metrico delle coppie (V, b); ma è facile rendersi conto che basta studiare le classi di congruenza di forme bilineari su un fissato spazio vettoriale V, per ogni dimensione n, per esempio K^n. Il problema è anche equivalente alla classificazione, per ogni n fissato, delle classi di congruenza di matrici $n \times n$ (dove due matrici A e B si dicono congruenti se esiste una matrice invertibile P tale che $A = P^t BP$). Una maniera per descrivere le classi di congruenza è quella di scegliere un rappresentante in ogni classe, che abbia una forma "semplice" (forma canonica).

Definizione. Siano V_1 e V_2 due spazi vettoriali su uno stesso campo e siano ϕ_1 e ϕ_2 due operatori lineari (endomorfismi) definiti rispettivamente su V_1 e V_2. Se $f : V_1 \to V_2$ è un omomorfismo tale che $f \circ \phi_1 = \phi_2 \circ f$ allora diciamo che f *muta* ϕ_1 *in* ϕ_2. Due operatori lineari su uno stesso spazio V si dicono *coniugati* se esiste un automorfismo che muta il primo nel secondo.

Se f è un operatore lineare su uno spazio vettoriale di dimensione finita V ed $R = (v_1, \dots, v_n)$ è una base di V, allora la matrice associata ad f rispetto ad R è quella matrice A tale che f viene mutato dalla coordinazione rispetto ad R nell'operatore $x \mapsto Ax$.

Osservazione. La condizione $f \circ \phi_1 = \phi_2 \circ f$ può essere espressa dicendo che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_2} \\ V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \end{array}$$

deve essere commutativo. Se un automorfismo f di uno spazio V muta un operatore ϕ_1 in ϕ_2, è chiaro che f^{-1} muterà ϕ_2 in ϕ_1. Inoltre la condizione di coniugio equivale (componendo con f^{-1}) a $\phi_1 = f^{-1} \circ \phi_2 \circ f$. Il problema di trovare le classi di coniugio di operatori lineari su uno spazio di dimensione n equivale al problema analogo per le classi di coniugio di matrici $n \times n$ (dove due matrici A e B si dicono coniugate se esiste una matrice invertibile P tale che $A = P^{-1}BP$). Anche in questo caso una maniera per descrivere le classi di coniugio è quella di scegliere un rappresentante in ogni classe, la forma canonica.

Definizione. Sia b una forma bilineare simmetrica o antisimmetrica su uno spazio vettoriale V. Due vettori $v, w \in V$ si dicono *ortogonali* (rispetto a b) se $b(v, w) = 0(\iff b(w, v) = 0)$. Un vettore si dice *isotropo* se è ortogonale a se stesso. Se S è un sottoinsieme di V, il *complemento ortogonale* $S^\perp$ di S è il sottospazio di V costituito dai vettori ortogonali ad ogni vettore di S. Ovviamente $S^\perp = \langle S \rangle^\perp$, dove $\langle S \rangle$ è il sottospazio generato. Due sottospazi si dicono *ortogonali* se ogni vettore dell'uno è ortogonale ad ogni vettore dell'altro (equivalentemente, se ciascuno è contenuto nel complemento ortogonale dell'altro).

Osservazione. Se b non è simmetrica o antisimmetrica, allora può accadere che $b(v, w) = 0$ ma $b(w, v) \neq 0$, quindi non possiamo definire l'ortogonalità come sopra: si deve distinguere tra "ortogonalità a destra" e "ortogonalità a sinistra".

Definizione. Se V è uno spazio vettoriale sul campo K e b è una forma bilineare su V, allora per ogni $v \in V$ si può considerare la funzione $V \to K$ data da $b(\cdot, v)$ (cioè $w \mapsto b(w, v)$). Tale funzione sarà indicata con v^*. La linearità rispetto al secondo argomento ci dice che v^* è una forma lineare, la linearità rispetto al primo ci dice che la funzione $b^\sharp : V \to V^*$ data da $v \mapsto v^*$ è lineare. Dunque c'è una corrispondenza, chiaramente biettiva e lineare, tra le forme bilineari b su V e gli omomorfismi $b^\sharp$ di V in V^*. Sinteticamente:

$$\mathrm{Bil}(V, K) \cong \mathrm{Hom}(V, V^*).$$

Se viceversa $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V^*)$ la corrispondente forma bilineare può essere indicata con $\varphi^\flat$.

> Questo discorso può essere visto come una estensione della formula
>
> $$x^{mn} = (x^m)^n.$$
>
> Infatti se X ed N sono insiemi, possiamo chiamare X^N l'insieme di tutte le applicazioni $N \to X$ (notiamo che per gli insiemi finiti, se x ed n sono il numero di elementi di X e di N rispettivamente, allora X^N ha proprio x^n elementi). Se dunque abbiamo un'applicazione $f : M \times N \to X$ e, come prima, associamo ad ogni $n \in N$ la funzione $n^* : M \to X$ data da $m \mapsto f(m, n)$ otteniamo un elemento $f^\sharp$ di $(X^M)^N$. L'applicazione che ad f associa $f^\sharp$ è una biezione tra $X^{M\times N}$ e $(X^M)^N$. Vista così la cosa sembra innocua, ma si rifletta sul seguente fatto: se ad uno studente che ha appena sostenuto l'esame di Analisi 1 gli si dice che in Analisi 2 ci si occuperà di funzioni di due variabili, anziché una, non ne sarà certo stupito; ma se si prova a dirgli che studierà ancora funzioni di una variabile reale, ma il cui codominio è l'insieme delle funzioni studiate in Analisi 1, allora potrebbe spaventarsi.
>
> Naturalmente vale anche la formula $X^{M\times N} \cong (X^N)^M$, quindi facciamo la seguente osservazione, tornando alle forme bilineari.

Osservazione. Se invece di considerare $b(\cdot, v)$ avessimo considerato $b(v, \cdot)$ avremmo ottenuto un altro omomorfismo $b_1^\sharp : V \to V^*$, altrettanto naturale come $b^\sharp$. La forma b è simmetrica se e solo se $b_1^\sharp = b^\sharp$; è antisimmetrica se e solo se $b_1^\sharp = -b^\sharp$.

Osservazione. Dal discorso fatto si ottiene subito che se V ha dimensione finita n, allora il complemento ortogonale di un sottospazio di dimensione d, ha dimensione maggiore od uguale ad $n-d$. Infatti se $\{v_1, \dots, v_d\}$ è una base del sottospazio, allora il suo complemento ortogonale è il nucleo di $(v_1^*, \dots, v_d^*) : V \to K^d$ (data da $v \mapsto (v_1^*(v), \dots, v_d^*(v))$); e dunque basta applicare la formula dimensionale per gli omomorfismi.

Definizione. Se s è una forma bilineare simmetrica o antisimmetrica, il *radicale* (o *nucleo*) di s è il nucleo di $s^\sharp$, il quale poi non è altro che $V^\perp$, e la sua dimensione si chiama *nullità* di s. Il *rango* di s è il rango di $s^\sharp$ (cioè dim (Im $s^\sharp$)). Una forma si dice *non degenere* se la sua nullità è 0, il che per gli spazi di dimensione finita equivale a dire che il rango è uguale alla dimensione di V, e che quindi ogni forma lineare è v^* per qualche $v \in V$.

Osservazione. Se R è il radicale di V (o più generalmente un sottospazio del radicale), allora s induce sul quoziente V/R una forma bilineare $\bar{s}$, data da $\bar{s}([v], [w]) = s(v, w)$. Tale definizione non dipende dai rappresentanti di $[v]$ e di $[w]$, proprio perché i vettori di R sono ortogonali a qualsiasi vettore di V.

Definizione. Siano V_1, V_2 spazi vettoriali su uno stesso campo, rispettivamente dotati di forme bilineari b_1, b_2. Allora si può definire sulla somma diretta $V = V_1 \oplus V_2$ una forma bilineare $b = b_1 \oplus b_2$ data da

$$b((v_1, v_2), (w_1, w_2)) \mapsto b_1(v_1, w_1) + b_2(v_2, w_2).$$

In tale situazione si dirà che (V, b) è la *somma ortogonale* di (V_1, b_1) e (V_2, b_2) e si scriverà $V = V_1 \hat{\oplus} V_2$.

Osservazione. Possiamo considerare (a meno di isomorfismi metrici naturali) V_1 e V_2 come sottospazi di V, e b_1, b_2 come restrizioni di b; inoltre V_1 e V_2 sono tra loro ortogonali (sia a destra che a sinistra). Viceversa, se in uno spazio V dotato di una forma bilineare b ci sono due sottospazi tra loro ortogonali (a destra e a sinistra) e tali che V è la loro somma diretta, allora V è (naturalmente isomorfo alla) somma ortogonale di tali sottospazi, dotati delle rispettive restrizioni di b.

Classificazione delle forme bilineari reali simmetriche.

Ora possiamo affrontare la classificazione delle forme bilineari simmetriche. Come abbiamo detto, siamo interessati alle forme reali, tuttavia la proposizione fondamentale vale su "quasi" ogni campo, perciò la enunciamo in generale. Diciamo "quasi" perché vanno esclusi quei campi in cui $2 = 0$, cioè i campi di caratteristica due, sui quali le forme bilineari si comportano in maniera diversa.

> Già ne avevamo avuto un'avvisaglia quando abbiamo parlato della distinzione tra "alternante" e "antisimmetrica". D'altra parte non è strano che parlando di forme *bi*-lineari la caratteristica *due* sia un po' speciale: parlando di forme trilineari ci possiamo aspettare un comportamento strano sui campi di caratteristica tre.
> Già nel seguente lemma (che ci serve per la proposizione successiva) si nota il comportamento diverso in caratteristica due.

Lemma. *Sia V uno spazio vettoriale, su un campo di caratteristica diversa da due, dotato di una forma bilineare simmetrica s. Se ogni vettore è isotropo allora s è nulla.*

Dimostrazione. Se s non fosse nulla esisterebbero v_1, v_2 tali che $s(v_1, v_2) \neq 0$. Allora almeno uno tra v_1, v_2 e $w = v_1 + v_2$ dovrebbe essere non isotropo. Infatti se v_1 e v_2 sono isotropi allora $s(w, w) = s(v_1, v_1) + 2s(v_1, v_2) + s(v_2, v_2) = 2s(v_1, v_2)$ è non nullo perché per le ipotesi, sia 2 che $s(v_1, v_2)$ sono non nulli.□

> Questo sui campi di caratteristica $\neq 2$. Si pensi invece allo spazio vettoriale numerico di dimensione due $\mathbf{F}_2^2$ sul campo con due elementi $\mathbf{F}_2 = \{0, 1\}$ (o $= \{FALSO,\ VERO\}$), dotato della forma $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 + x_2 y_1$. La forma non è nulla (per esempio $s((1, 0), (0, 1)) = 1$) ma ogni vettore è iso tropo, perché $s((x_1, x_2), (x_1, x_2) = 2x_1 x_2 = 0$, dato che $2 = 0$.

Proposizione. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su un campo K di caratteristica diversa da due, ed s una forma bilineare simmetrica su V. Allora si ha*

$$V = V_1 \hat{\oplus} \cdots \hat{\oplus} V_n,$$

dove i V_i sono spazi di dimensione uno.

Dimostrazione. Per induzione su n. Per $n = 1$ (o zero) è ovvio. Supponiamo la proposizione vera per gli spazi di dimensione $n - 1$ e dimostriamola per gli spazi di dimensione n. Se la forma è nulla, allora è chiaro che ogni base $\{v_1, \dots, v_n\}$ dà luogo ad una decomposizione in somma ortogonale di sottospazi di dimensione uno $\langle v_1\rangle \hat{\oplus} \cdots \hat{\oplus} \langle v_n\rangle$. Se la forma non è nulla, per il lemma precedente esiste un vettore non isotropo v_1. Sappiamo che il complemento ortogonale di v_1 è un sottospazio di dimensione $\geq n-1$. Poiché tale spazio non contiene v_1 (che non è isotropo), è allora di dimensione esattamente $n - 1$ e dunque $V = \langle v_1\rangle \hat{\oplus} \langle v_1\rangle^\perp$ (di nuovo perché $v_1 \notin v_1^\perp$). Posto $V_1 = \langle v_1\rangle$, per induzione $V_1^\perp = V_2 \hat{\oplus} \cdots \hat{\oplus} V_n$, con i V_i di dimensione uno, quindi $V = V_1 \hat{\oplus} \cdots \hat{V}_n$ come volevamo.□

> In caratteristica due la cosa non è vera, come mostra l'esempio di prima. Infatti se $\mathbf{F}_2^2$ fosse somma ortogonale di spazi di dimensione uno, la forma s sarebbe per forza nulla, perché se uno spazio di dimensione uno ha un vettore non nullo isotropo (anche in caratteristica due) la forma è per forza nulla.

A questo punto ci basta classificare le forme su spazi di dimensione uno, ed abbiamo quasi finito. Lo facciamo per le forme reali.

Definizione. Denotiamo con $\mathbf{R}_+$ lo spazio vettoriale reale uno- dimensionale $\mathbf{R}$, dotato della forma $s = \cdot$ (cioè $s(x, y) = xy$). Denotiamo con $\mathbf{R}_-$, sempre $\mathbf{R}$, ma dotato della forma $s' = -s$ (cioè $s'(x, y) = -xy$). Infine denotiamo con $\mathbf{R}_0$ lo spazio $\mathbf{R}$ dotato della forma nulla.

Proposizione. *I tre spazi $\mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}_-$ e $\mathbf{R}_0$ sono a due a due non isomorfi metricamente, ed ogni spazio vettoriale reale uno-dimensionale V, dotato di una forma simmetrica s, è metricamente isomorfo ad uno dei tre.*

Dimostrazione. È chiaro che se (V, b) è metricamente isomorfo a (V', b'), dette q e q' le forme quadratiche associate si deve avere $q(V) = q'(V')$. Ora, se q_+, q_- e 0 sono le forme quadratiche rispettivamente di $\mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}_-$ ed $\mathbf{R}_0$, si ha $q_+(\mathbf{R}) = \{\text{numeri non negativi}\}$ (cioè q_+ è *semidefinita positiva*, anzi, visto che q_+ assume valore zero solo in zero, è *definita positiva*), $q_-(\mathbf{R}) = \{\text{numeri non positivi}\}$ (è semidefinita, anzi definita negativa) e $0(\mathbf{R}_0) = \{0\}$. Dunque i tre spazi sono a due a due non isomorfi metricamente. Se ora (V, s) è uno spazio uno-dimensionale, se s è nulla, allora $V \cong \mathbf{R}_0$. Se invece s non è nulla, c'è per il lemma un vettore non isotropo v. Se $b(v, v) > 0$, allora la coordinazione rispetto alla base $\{\frac{v}{\sqrt{b(v,v)}}\}$ ci dà un isomorfismo metrico con $\mathbf{R}_+$, se invece $b(v, v) < 0$, allora la coordinazione rispetto alla base $\{\frac{v}{\sqrt{-b(v,v)}}\}$ ci dà un isomorfismo metrico con $\mathbf{R}_-$.□

> A questo punto la classificazione delle forme simmetriche reali è praticamente fatta. Sappiamo che ogni spazio vettoriale reale di dimensione finita, dotato di una forma simmetrica, si scompone nella somma ortogonale di "atomi" di dimensione uno, e sappiamo che ci sono tre tipi di tali "atomi". L'unico dubbio che rimane è se s composizioni diverse possano dare luogo a spazi isomorfi. Naturalmente se cambiamo solo l'ordine dei fattori della scomposizione otteniamo effettivamente spazi isomorfi; ma se prescindiamo quindi dall'ordine, si ha che i tipi dei fattori uno dimensionali individuano la classe di isomorfismo metrico, come riportato nella seguente proposizione conclusiva sulla classificazione dei prodotti scalari.

Proposizione. *Sia s una forma bilineare simmetrica definita su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita n. Allora esiste una ed una sola terna di interi non negativi $(r_+, r_,k)$ tale che*

$$(V, s) \cong \underbrace{\mathbf{R}_+ \hat{\oplus} \cdots \hat{\oplus} \mathbf{R}_+}_{r_+} \hat{\oplus} \underbrace{\mathbf{R}_- \hat{\oplus} \cdots \hat{\oplus} \mathbf{R}_-}_{r_-} \hat{\oplus} \underbrace{\mathbf{R}_0 \hat{\oplus} \cdots \hat{\oplus} \mathbf{R}_0}_{k}.$$

Dimostrazione. L'esistenza segue subito dalle proposizioni precedenti. Proviamo l'unicità. Supponiamo per assurdo che (r'_+, r'_-, k') sia una differente terna con la stessa proprietà di (r_+, r_-, k). Allora innanzitutto $r'_+ + r'_- + k' = r_+ + r_- + k$, perché tale numero è la dimensione di V, e $k = k'$ perché tale numero è la nullità di s, in quanto il radicale di s è chiaramente il corrispondente del fattore $\mathbf{R}_0 \hat{\oplus} \cdots \hat{\oplus} \mathbf{R}_0$. Dunque si può supporre, a meno di scambiare i nomi delle due terne, che $r_+ + r'_- + k' > n$. Consideriamo il sottospazio V_+ di V corrispondente, tramite il primo isomorfismo, al fattore $\mathbf{R}_+ \hat{\oplus} \cdots \hat{\oplus} \mathbf{R}_+$ e il sottospazio V_- corrispondente, tramite il secondo isomorfismo, a $\underbrace{\mathbf{R}_- \hat{\oplus} \cdots \hat{\oplus} \mathbf{R}_-}_{r'_-} \underbrace{\hat{\oplus} \mathbf{R}_0 \hat{\oplus} \cdots \hat{\oplus} \mathbf{R}_0}_{k'}$. Per ogni vettore non nullo $v \in V_+$ si ha $s(v, v) > 0$, mentre per ogni vettore $v \in V_-$ si ha $s(v, v) \leq 0$. Ma per la formula di Grassmann, $V_+ \cap V_-$ ha dimensione positiva, e dunque contiene un vettore non nullo v, dunque $0 < s(v, v) \leq 0$, il che è assurdo.□

> La proposizione ora dimostrata ci dice che la classificazione dei prodotti scalari si ottiene con i tre invarianti, che possiamo chiamare *indici di inerzia* (anche se questo nome è a volte riservato ad r_+ ed r_-, o addirittura al solo r_+). Il numero r_+ si chiama anche *indice di positività*, r_- *indice di negatività* e k, oltre che nullità, anche *indice di nullità*.
>
> Quando si vogliono classificare degli oggetti a meno di isomorfismi, il metodo più usato è appunto quello di definire degli *invarianti*. Definire un invariante consiste nell'associare ad ogni oggetto qualcosa di più semplice, per esempio un numero, in maniera tale che ad oggetti isomorfi sia associato lo stesso numero (il quale è perciò *invariante* per isomorfismi). Se si riescono a trovare un numero sufficiente di invarianti, in modo tale che se due oggetti non sono isomorfi differiscono per almeno un invariante, allora la classificazione è completa. Quando si ha un sistema completo di invarianti, allora ogni altro invariante è funzione di questo sistema. Per esempio, nel nostro caso, i tre indici d'inerzia sono un sistema completo di invarianti. La dimensione dello spazio, che pure è un invariante, è funzione dei tre indici, e siccome è un invariante abbastanza naturale, non c'è da meravigliarsi che sia una funzione semplice: ed infatti è la loro somma. Il rango della forma è la somma di r_+ ed r_-. Naturalmente anche dimensione, rango e indice di positività formano un sistema completo di invarianti.

La proposizione di sopra può essere enunciata anche da altri punti di vista, ad esempio:

Proposizione. *Se s è una forma bilineare simmetrica definita su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita n, allora esiste un riferimento $(v_1, \ldots, v_n)$ rispetto al quale, in coordinate, s può essere espressa da (forma canonica):*

$$s((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = x_1 y_1 + \cdots + x_{r_+} y_{r_+} x_{r_+ + 1} y_{r_+ + 1} - \cdots - x_{r_+ + r_-} y_{r_+ + r_-},$$

con r_+ ed r_- univocamente determinati.

Oppure, dal punto di vista delle matrici:

Proposizione. *Ogni matrice reale quadrata simmetrica di ordine n è congruente ad una ed una sola matrice diagonale sulla cui diagonale principale ci siano r_+ termini uguali ad 1, seguiti da r_- termini uguali a -1, seguiti da k termini uguali a 0 (matrice in forma canonica).*

> Naturalmente ci si può mettere anche dal punto di vista delle forme quadratiche, ed anzi è generalmente in questo contesto che la proposizione assume il nome di *legge d'inerzia* di Sylvester.

Classificazione delle forme bilineari alternanti.

Passiamo alla classificazione delle forme alternanti. Questa classificazione è anche più semplice di quella delle forme simmetriche, ed è la stessa qualunque sia il campo base, quindi è inutile limitarsi alle forme reali.

Proposizione. *Una forma alternante definita su uno spazio vettoriale di dimensione uno è per forza nulla.*

Dimostrazione. Se $V = \langle v \rangle$ ed a è la forma alternante, allora $\forall v_1, v_2 \in V, a(v_1, v_2) = a(hv, kv) = hka(v, v) = 0.\square$

> Dunque, nel mondo delle forme alternanti, c'è un solo tipo di "atomo" di dimensione uno. A differenza del caso delle forme simmetriche, c'è anche un "atomo" di dimensione due. Esso è dato dal determinante due per due, visto come funzione sulle righe (o sulle colonne). Più precisamente, data una coppia di vettori di K^2, il valore che la nostra forma alternante assume sulla coppia, sarà il determinante della matrice che ha per righe (o colonne) i due vettori. Vedremo poi tra pochissimo che questi sono gli unici due "atomi" per le forme alternanti.
>
> I determinanti sono le forme alternanti per eccellenza. Non è difficile dimostrare (per esempio usando il prodotto esterno) che ogni forma h-lineare alternante su K^m è una combinazione lineare di minori di ordine h della matrice $h \times m$ che ha per righe gli h argomenti. Nel caso $h = 2$ questo risultato può ottenersi anche come con seguenza della classificazione che stiamo per fare.

Definizione. Denoteremo con K_0 il K spazio vettoriale K, dotato della forma nulla. Denoteremo con $K^2_\triangle$ il K spazio vettoriale K^2, dotato della forma ω tale che

$$\omega((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2.$$

Lo spazio $K^2_\triangle$ è anche chiamato "piano iperbolico antisimmetrico".

> Si può inoltre notare che in caratteristica due $K^2_\triangle$ è proprio l'esempio che nel paragrafo precedente aveva un comportamento anomalo. Non è strano che questo esempio compaia sia quando si parla di forme simmetriche, sia quando si parla di quelle alternanti. Infatti, in caratteristica due, le forme antisimmetriche, le quali sugli altri campi sono esattamente quelle alternanti, vanno a coincidere con quelle simmetriche, e dunque l'insieme delle alternanti diventa un sottoinsieme dell'insieme delle simmetriche.

La classificazione delle forme alternanti si ottiene allora subito come segue.

Proposizione. *Sia a una forma bilineare alternante definita su un K-spazio vettoriale V di dimensione finita n. Detta k la nullità e posto $c = \frac{n-k}{2}$, si ha che (c è intero e)*

$$(V, a) \cong \underbrace{K^2_\triangle \hat{\oplus} \cdots \hat{\oplus} K^2_\triangle}_{c} \hat{\oplus} \underbrace{K_0 \hat{\oplus} \cdots \hat{\oplus} K_0}_{k}.$$

Dimostrazione. Se $a = 0$ il risultato è ovvio. Se $a \neq 0$ siano v_1 e v_2 tali che $a(v_1, v_2) \neq 0$. A meno di moltiplicare uno dei due per $\frac{1}{a(v_1,v_2)}$ si può supporre $a(v_1, v_2) = 1$. Dunque v_1 e v_2 sono indipendenti, e se $W = \langle v_1, v_2 \rangle$, allora si ha che $W^\perp \cap W = \{0\}$. Infatti, tale intersezione è il radicale R di W (dotato della restrizione di a), e se questo fosse nullo allora per la proposizione precedente a indurrebbe su W/R la forma nulla, perché W/R avrebbe dimensione minore di due, e dunque a sarebbe nulla su W, il che non è. Dunque $W^\perp$ ha dimensione esattamente $n - 2$, e quindi $V = W \hat{\oplus} W^\perp$. Poiché la coordinazione rispetto a $\{v_1, v_2\}$ è un isomorfismo di W con $K^2_\triangle$, il risultato segue subito per induzione.□

> Poiché la nullità è chiaramente invariante per isomorfismi metrici, allora k e c sono un sistema completo di invarianti per le forme alternanti su spazi di dimensione finita

Dal punto di vista delle matrici la proposizione può essere enunciata come segue.

Proposizione. *Ogni matrice alternante è congruente ad una ed una sola matrice del tipo*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & -1 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Classificazione degli operatori lineari.

Per la nostra classificazione delle forme bilineari, abbiamo bisogno di richiamare la classificazione degli operatori lineari sui campi algebricamente chiusi, la quale, insieme a quella delle forme simmetriche e antisimmetriche, è ben nota ed è riportata su quasi tutti i libri di algebra lineare. Enunceremo la proposizione fondamentale in termini di matrici, perciò diamo prima una importante definizione.

Definizione. Un *blocco di Jordan* di autovalore λ ed ordine h è una matrice quadrata di ordine h tale che $a_{ij} = \lambda$ se $i = j$, $a_{ij} = 1$ se $j = i + 1$ e $a_{ij} = 0$ altrimenti. Dunque:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Proposizione. *Sia $f : V \to V$ un operatore lineare sul K-spazio vettoriale V, di dimensione finita, tale che tutte le radici del polinomio caratteristico appartengano a K. Allora esiste una base di V rispetto alla quale f è rappresentato da una matrice del tipo (forma canonica di Jordan):*

$$\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_l \end{pmatrix},$$

dove $J_1, \dots, J_l$ sono blocchi di Jordan. Tale matrice è univocamente determinata da f, a meno di permutazioni dei blocchi.

Come accennato, tale proposizione si può facilmente trovare su un buon testo di algebra lineare (per esempio [Blyth-Robertson, Essential Student Algebra, Volume 4: Linear Algebra; Ed. Chapman and Hall], oppure [Mac Lane-Birkhoff, Algebra; Ed. Mursia] , o ancora [Ciliberto, Appunti di algebra lineare; Ed. UniTor]).

Osservazione. Se il campo K è algebricamente chiuso, la condizione "tutte le radici del polinomio caratteristico appartengono a K" è automaticamente verificata, e dunque la proposizione realizza la classificazione degli operatori lineari.

Per motivi di brevità abbiamo enunciato la proposizione così come si trova "in commercio". Naturalmente avremmo potuto continuare in parallello alle altre classificazioni fatte, cioè descrivere le classi di isomorfismo di coppie (V, φ) dove φ è un operatore lineare su V. Si sarebbe potuta definire facilmente la somma diretta di operatori, e gli "atomi" sarebbero stati (sempre nel caso in cui K sia algebricamente chiuso) le coppie (K^h, j), dove j è la moltiplicazione per un blocco di jordan. Dal punto di vista puramente matriciale poi, la proposizione si enuncia dicendo che ogni matrice su K (algebricamente chiuso) è simile ad una matrice del tipo indicato nella proposizione, unica a meno di permutazioni dei blocchi.

Poiché ci interessano le forme reali in dimensione due e tre, descriviamo ora la classificazione degli operatori lineari su spazi reali di dimensione due.

Proposizione. *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione due ed f un operatore lineare su V. Se le radici del polinomio caratteristico sono tutte reali, allora f può essere rappresentato, in una base opportuna da una matrice in forma canonica di Jordan, univocamente determinata da f. Altrimenti le radici del polinomio caratteristico sono complesse coniugate, $x \pm iy$, e allora f può essere rappresentato dalla matrice*

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix},$$

con x univocamente determinato ed $y \neq 0$ univocamente determinato a meno del segno.

Per la dimostrazione si può consultare uno dei testi prima citati.

Fortunatamente il campo reale, pur non essendo algebricamente chiuso, ha un chiusura algebrica relativamente piccola: il campo complesso, che ha solo grado due su $\mathbf{R}$. Dunque la dimostrazione della proposizione ora riportata si può ottenere facilmente a partire dalla forma di Jordan sui complessi.

Classificazione delle forme bilineari reali in dimensione due.

Classifichiamo ora le forme bilineari su uno spazio di dimensione due. Con opportune osservazioni si può ricondurre il problema alle classificazioni precedentemente esposte.

Osservazione. Ogni forma bilineare b, se l'anello base contiene $1/2$, è in un unico modo somma di una forma simmetrica b_s e di una forma alternante b_a. Esse sono date infatti da $b_s(u,v) = \frac{b(u,v)+b(v,u)}{2}$ e $b_a(u,v) = \frac{b(u,v)-b(v,u)}{2}$.

Questa semplice osservazione già ci permettere di trovare molti tipi di forme bilineari non equivalenti su $\mathbf{R}^2$. Infatti sappiamo che su $\mathbf{R}^2$ possiamo fissare due forme alternanti non equivalenti (quella nulla e quella di $\mathbf{R}^2_\triangle$) e sei forme simmetriche a due a due non equivalenti (corrispondenti alle varie segnature). Sommando in tutti i modi possibili una delle due forme alternanti con una delle sei simmetriche, otteniamo dodici forme bilineari a due a due non equivalenti, in quanto due forme equivalenti hanno chiaramente rispettivamente equivalenti le parti alternante e simmetrica. Il viceversa però non vale: possono esistere forme non equivalenti che hanno però le parti simmetrica ed alternante rispettivamente equivalenti: non siamo quindi autorizzati a concludere che ci sono solo dodici classi di equivalenza di forme bilineari. Se riguardiamo le nostre dimostrazioni riguardo alle classificazioni, ci rendiamo conto che il problema è che la base rispetto a cui la parte simmetrica diventa canonica, potrebbe non andare bene per la parte alternante, e viceversa. In effetti non è sempre possibile trovare una base che renda canonica sia la parte simmetrica che quella alternante.

Da questo punto di vista, il discorso si semplificherebbe se, al posto di due forme, ci fosse una forma alternante ed un operatore lineare. Infatti, riguardando la classificazione delle forme alternanti, ci rendiamo conto che una base canonica per tali forme si ottiene semplicemente moltiplicando i vettori di una base qualsiasi per un fattore scalare, e questa operazione influisce ben poco su una base canonica per un operatore: ogni multiplo non nullo di un autovettore è ancora un autovettore.

Fortunatamente, è possibile ricondurci a questa situazione. Per capirlo, poniamoci la seguente domanda: se in uno spazio vettoriale fissiamo un riferimento, ad ogni matrice corrisponde sia una forma bilineare γ, sia un operatore lineare A; prescindendo dalla matrice, che relazione c'è fra questi due oggetti? Questa relazione dipende dal riferimento o è intrinseca? Si può notare che, in generale, cambiando il riferimento in maniera arbitraria, la corrispondenza tra γ ed A cambia. Se però il cambio di riferimento è dato da una matrice ortogonale, la relazione è la stessa. Tale relazione dipende dunque non tanto dal riferimento, ma dal prodotto scalare s ad esso associato (cioè quell'unico prodotto rispetto al quale il riferimento è ortonormale). Questo è abbastanza comprensibile, infatti sappiamo che a γ corrisponde un omomorfismo $\gamma^\sharp : V \to V^*$, mentre A è un omomorfismo $V \to V$. La corrispondenza tra γ ed A sarà data non appena riusciamo in qualche modo ad identificare V con V^*, il che, se V ha dimensione finita, si ottiene proprio considerando $s^\sharp : V \to V^*$, che è un isomorfismo in quanto s è non degenere.

Osservazione. Se b è una forma bilineare non degenere su uno spazio vettoriale V di dimensione finita, allora si può stabilire un isomorfismo tra lo spazio delle forme bilineari e lo spazio degli operatori lineari, tale che

$$\gamma \leftrightarrow A \iff \forall u,v \in V \quad \gamma(u,v) = b(u, A(v)).$$

Infatti basta porre $A = {b^\sharp}^{-1} \circ \gamma^\sharp$.

Esercizio. Sia $\varphi : V \to V'$ un isomorfismo di spazi vettoriali di dimensione finita. Sia b una forma bilineare non degenere su V e siano γ ed A una forma ed un operatore che si corrispondono tramite b. L'isomorfismo φ muterà b, γ ed A rispettivamente in b', γ' e A', definiti su V'. Dimostrare che γ' ed A' si corrispondono tramite b'.

Suggerimenti. Si può usare la proprietà che caratterizza la corrispondenza, cioè osservare che $\gamma'(u,v) = \gamma(\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)) = b(\varphi^{-1}(u), A(\varphi^{-1}(v))) = b(\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(A'(v))) = b'(u, A'(v))$, e dunque γ' ed A' si corrispondono tramite b'. Alternativamente, si può usare la definizione: $A' = \varphi \circ A \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ (b^\sharp)^{-1} \circ \gamma^\sharp \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ (b^\sharp)^{-1} \circ \varphi^t \circ (\varphi^t)^{-1} \circ \gamma^\sharp \circ \varphi^{-1} = (b'^\sharp)^{-1} \circ \gamma'^\sharp$.

A questo punto vogliamo cercare di studiare una forma b qualsiasi su uno spazio di dimensione due. Se b è simmetrica, sappiamo tutto. Se b non è simmetrica, allora la sua parte alternante b_a è non degenere, e dunque possiamo considerare l'operatore associato alla parte simmetrica b_s rispetto alla parte alternante, e sfruttare la classificazione degli operatori. Bisogna però osservare che tale operatore non è completamente arbitrario, in quanto b_a è alternante e b_s è simmetrica. Per stabilire quali sono gli operatori che ci interessano, richiamiamo ora la nozione di operatore aggiunto rispetto ad una forma bilineare non degenere.

Definizione. Se $\varphi : V_1 \to V_2$ è un omomorfismo di spazi vettoriali, l'omomorfismo $\varphi^t : V_2^* \to V_1^*$ dato da $f \mapsto f \circ \varphi$ si chiama *omomorfismo trasposto di* φ. Se si fissano forme bilineari non degeneri b_1 su V_1 e b_2 su V_2, e se questi hanno dimensione finita, allora tramite $b_1^\sharp$ e $b_2^\sharp$ l'omomorfismo φ^t induce un omomorfismo $\varphi^* : V_2 \to V_1$: basta porre $\varphi^* = {b_1^\sharp}^{-1} \circ \varphi^t \circ b_2^\sharp$. L'omomorfismo φ^* si chiama *l'endomorfismo aggiunto* di φ ed è caratterizzato dal fatto di essere l'unico omomorfismo $V_2 \to V_1$ tale che

$$\forall v_1 \in V_1, \forall v_2 \in V_2 \quad b_1(v_1, \varphi^*(v_2)) = b_2(\varphi(v_1), v_2).$$

Utilizzeremo la definizione ora data nel caso in cui φ è un operatore lineare A su uno spazio dotato di una forma non degenere (cioè lo spazio è $V_1 = V_2$, e la forma è $b_1 = b_2$).

Esercizio. Se b è antisimmetrica allora γ è simmetrica se e solo se A è antiaggiunto rispetto a b, cioè $A^* = -A$.

Suggerimenti. Si possono usare la proprietà caratteristica dell'operatore aggiunto e la proprietà caratteristica dell'operatore associato a γ. Infatti se γ è simmetrica $b(A(u), v) = b(v, A(u)) = -\gamma(v,u) = \gamma(u,v) = -b(u, A(v)) = b(u, -A(v))$, dunque $-A$ soddisfa la condizione che caratterizza A^*. E analogamente per il viceversa.

Alternativamente, si possono usare le definizioni $A = (b^\sharp)^{-1} \circ \gamma^\sharp$ e $A^* = (b^\sharp)^{-1} \circ A^t \circ b^\sharp$. Per fare questo, però, bisogna cercare di tradurre le proprietà di simmetria di γ e di antisimmetria di b in termini di $b^\sharp$ e $\gamma^\sharp$, il che ci dà l'occasione di approfondire il legame che c'è tra $b^\sharp$ (data da $v \mapsto b(\cdot, v)$) e $b_1^\sharp$ (data da $v \mapsto b(v, \cdot)$). Sappiamo infatti che l'antisimmetria di b equivale a $b_1^\sharp = -b^\sharp$ (e la simmetria di γ equivale a $\gamma_1^\sharp = \gamma^\sharp$); e ora vediamo come $b_1^\sharp$ può ottenersi da $b^\sharp$ (e viceversa, e analogamente per γ). Innanzitutto osserviamo che c'è un monomorfismo naturale $\iota : V \to (V^*)^*$ dato da $\iota(v)(f) = f(v) \quad \forall f \in V^*$. Se V ha dimensione finita ι è un isomorfismo. La voluta relazione è $b_1^\sharp = (b^\sharp)^t \circ \iota$. L'esercizio può allora essere risolto traducendo l'antisimmetria di b con $(b^\sharp)^t \circ \iota = -b^\sharp$ e la simmetria di γ con $(\gamma^\sharp)^t \circ \iota = \gamma^\sharp$:
$A^* = (b^\sharp)^{-1} \circ A^t \circ b^\sharp = (b^\sharp)^1 \circ ((b^\sharp)^{-1} \circ \gamma^\sharp)^t \circ b^\sharp = (b^\sharp)^{-1} \circ (\gamma^\sharp)^t \circ ((b^\sharp)^{-1})^t \circ b^\sharp = (b^\sharp)^{-1} \circ (\gamma^\sharp)^t \circ \iota \circ \iota^{-1} \circ ((b^\sharp)^{-1})^t \circ b^\sharp = (b^\sharp)^{-1} \circ \gamma^\sharp \circ (-b^\sharp)^{-1} \circ b^\sharp = -A$. E analogamente per il viceversa.

Il legame che c'è tra $b^\sharp$ e $b_1^\sharp$ permette di estendere alcuni invarianti, definiti per forme bilineari simmetriche o antisimmetriche, alle forme qualunque. Ad esempio, il fatto che $b_1^\sharp = \pm b^\sharp$ ci permette di definire il radicale di una forma b simmetrica o antisimmetrica. Per una forma bilineare b qualunque non si può fare altrettanto, per cui avremo un radicale destro e un radicale sinistro; tuttavia, poiché $b_1^\sharp$ e $b^\sharp$, pur non essendo uguali (od opposte), conservano una certa parentela (data dalla formula $b_1^\sharp = (b^\sharp)^t \circ i$) è possibile definire la nullità (ed il rango).

Proposizione. *Sia A un operatore lineare su uno spazio vettoriale reale di dimensione due, antiaggiunto rispetto ad una forma alternante non nulla b. Allora le radici del polinomio caratteristico λ_1 e λ_2 sono tra loro opposte, e dunque A è rappresentato, in un opportuno riferimento, da una delle seguenti matrici:*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D_\lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad R_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix};$$

con $\lambda \geq 0$. Tale matrice è univocamente determinata da A (tenendo presente che $D_0 = R_0$).

Dimostrazione. Se A è diagonalizzabile allora, rispetto ad una base di autovettori (v_1, v_2), è rappresentato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Ma si ha $\lambda_1 b(v_1, v_2) = b(A(v_1), v_2) = b(v_1, -A(v_2)) = -\lambda_2 b(v_1, v_2)$, da cui $\lambda_1 = -\lambda_2$, in quanto, essendo b alternante non nulla, $b(v_1, v_2) \neq 0$. Quindi, scambiando se necessario v_1 e v_2, si ottiene la matrice D_λ (con $\lambda = |\lambda_1| = |\lambda_2|$). Se A non è diagonalizzabile, ma λ_1 e λ_2 sono reali, allora sappiamo che in una opportuna base (v_1, v_2), A è rappresentato da

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

con $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. Ma allora di nuovo $\lambda b(v_1, v_2) = b(A(v_1), v_2) = b(v_1, -A(v_2)) = -b(v_1, v_1) - \lambda b(v_1, v_2) = \lambda b(v_1, v_2)$, da cui $\lambda = 0$. Quindi A è rappresentato da J. Se infine λ_1 e λ_2 sono complesse coniugate, diciamo uguali ad $x \pm iy$ allora sappiamo che A è rappresentato da

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

Se B è la matrice che rappresenta b nella stessa base, allora il fatto che A è antiaggiunto rispetto a b equivale a $B^1 M^t B = -M$. Se consideriamo l'operatore A' e la forma b' di $\mathbf{C}^2$ associati (rispetto alla base standard) rispettivamente a B e ad M, la relazione $B^{-1} M^t B = -M$ ci dice che A' è antiaggiunto rispetto a b'. Inoltre A' è diagonalizzabile, per cui si ha ancora $\lambda_1 = -\lambda_2$, da cui $x = 0$. Quindi, scambiando se necessario v_1 e v_2, si ha $M = R_\lambda$, con $\lambda = |y|$. La matrice è univocamente determinata, perché le matrici in questione sono in forma canonica di Jordan, e quindi basta applicare il teorema di classificazione degli operatori lineari.

Infine è immediato verificare che le matrici indicate rappresentano tutte effettivamente operatori antiaggiunti rispetto a b.□

A questo punto è facile dimostrare il teorema di classificazione delle forme bilineari reali in dimensione due.

Proposizione. *Una forma bilineare b definita su uno spazio vettoriale reale di dimensione due si può rappresentare, in un opportuno riferimento, con una ed una sola delle seguenti* *matrici:*

$$S_{00} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_{0+} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad S_{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S_{++} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad S_{+-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad S_{--} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\triangle} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_{+} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad J_{-} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M^{\lambda}_{++} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \quad M^{\lambda}_{--} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \quad M^{\lambda}_{+-} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda + 1 \\ \lambda - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con $\lambda > 0$*.*

Dimostrazione. Se b è simmetrica, allora per il teorema di classificazione delle forme simmetriche può rappresentarsi con una ed una sola delle matrici $S_{...}$ (e con nessuna delle altre, in quanto non sono simmetriche). Consideriamo ora una b non simmetrica. Dunque sicuramente b non si può rappresentare con una delle matrici simmetriche $S_{...}$, e dunque ci basta dimostrare che b è rappresentabile con una ed una sola delle altre matrici.

Siccome la parte alternante b_a non può essere nulla (altrimenti $b = b_s$ sarebbe simmetrica), essa è non degenere per il teorema di classificazione delle forme alternanti. Possiamo quindi considerare l'operatore lineare A, associato alla parte simmetrica b_s rispetto alla parte alternante b_a. Poiché A è antiaggiunto, esiste un riferimento rispetto al quale è rappresentato da una (sola) delle matrici D_λ, R_λ o J (cfr. proposizione precedente). Se A è nullo, allora la matrice rappresentativa è $D_0 = R_0$. Si ha che b_s è nullo, dunque $b = b_a$ è alternante, ed è quindi rappresentabile con la matrice $M_\triangle$ (per il teorema di classificazione delle forme alternanti).

Supponiamo che la matrice rappresentativa di A sia J, rispetto ad un opportuno riferimento (v_1, v_2). La matrice rappresentativa di A sarà ancora J se moltiplichiamo v_1 e v_2 per uno stesso scalare α. Scegliendo $\alpha = \frac{1}{\sqrt{|b_a(v_1,v_2)|}}$, si ha che b_a è rappresentata da $\pm M_\triangle$. Se b_a è rappresentata da $M_\triangle$, allora b è rappresentata da $M_\triangle + M_\triangle J = J_-$, nel secondo caso b è rappresentata da $-M_\triangle - M_\triangle J = -J_- = J_+$. Non è possibile che b possa essere rappresentata (in diversi riferimenti) sia da J_+ che da J_- altrimenti la forma quadratica associata a b_s sarebbe non nulla e contemporaneamente semidefinita positiva e semidefinita negativa.

Supponiamo ora che la matrice rappresentativa di A sia R_λ, rispetto ad una base (v_1, v_2), con $\lambda > 0$. Anche in questo caso, la matrice rappresentativa non cambia se ambedue i vettori vengono moltiplicati per uno scalare α. Prendendo $\alpha = \frac{1}{\sqrt{|b(v_1,v_2)|}}$, e scambiando v_1 e v_2 se $b(v_1, v_2) < 0$, otteniamo che b_a è rappresentata in ogni caso da $M_\triangle$, mentre A è rappresentata da R_λ se non c'è stato lo scambio di v_1 e v_2 o da $-R_\lambda$ se lo scambio c'è stato. Nel primo caso otteniamo che b è rappresentata da $M_\triangle + M_\triangle R_\lambda = M^{\lambda}_{--}$, mentre nel secondo abbiamo $M_\triangle - M_\triangle R_\lambda = M^{\lambda}_{++}$. Non è possibile che b possa rappresentarsi in entrambi i modi, altrimenti la forma quadratica associata a b_s sarebbe contemporaneamente definita positiva e negativa.

Supponiamo infine che la matrice di A sia D_λ, con $\lambda > 0$, rispetto ad una base di autovettori (v_1, v_2). Moltiplicando uno dei due per $\frac{1}{b(v_1,v_2)}$, la matrice associata ad A rimane D_λ e la matrice associata a b_a diventa $M_\triangle$. Dunque la matrice associata a b è $M_\triangle + M_\triangle D_\lambda = M^\lambda_{+-}$.

Infine, da quanto detto finora, risulta che una b potrebbe essere rapprresentata da due diverse tra le matrici indicate, solo se A potesse essere rappresentato da due diverse tra le matrici indicate nella proposizione precedente, il che non è possibile. La matrice rappresentativa è dunque univocamente determinata da b.□

> Ricapitolando, nel mondo delle forme bilineari, ci sono tre atomi di dimensione uno (esattamente quelli delle forme simmetriche, dato che ogni forma in dimensione uno è simmetrica). Poi, in dimensione due, ci sono, oltre alle somme di due atomi di dimensione uno, tre particolari atomi (quello alternante, più altri due nuovi) e tre famiglie di atomi parametrizzate da un numero reale positivo.
>
> Cosa succede in dimensione maggiore? Qui ci limiteremo a stabilire quali sono gli atomi in dimensione tre, lasciando al lettore il compito di stabilire la classificazione in dimensione tre (bisognerà considerare tali atomi, e le somme di atomi in dimensione inferiore, stabilendo poi quand'è che due somme sono metricamente isomorfe).

Forme bilineari reali indecomponibili in dimensione tre.

Per finire, vogliamo ora stabilire le classi di equivalenza di forme bilineari definite su uno spazio vettoriale reale di dimensione tre, che non sono somme ortogonali di forme in dimensione più piccola.

Lemma. *Sia b una forma bilineare definita su uno spazio vettoriale reale V di dimensione tre, che non sia somma ortogonale di forme in dimensione strettamente minore di tre. Allora il radicale della parte alternante b_a è generato da un vettore non nullo, che è isotropo per la parte simmetrica b_s, e che non appartiene al radicale di b_s.*

Dimostrazione. La forma b non può essere simmetrica, altrimenti sarebbe somma ortogonale di tre forme in dimensione uno. Dunque la parte alternante b_a è non nulla, e per il teorema di classificazione si ha che (V, b_a) è metricamente isomorfo a $\mathbf{R}_0 \hat{\oplus} \mathbf{R}^2_\triangle$. Il radicale di b è dunque un sottospazio di dimensione uno, diciamo generato dal vettore non nullo v. Se v non fosse isotropo per b_s, allora il suo complemento ortogonale (rispetto a b_s) sarebbe un sottospazio W di dimensione due non contenente v, e dunque (V, b) sarebbe somma ortogonale di W e $\langle v \rangle$. Il vettore v non può nemmeno appartenere al radicale di b_s perché altrimenti (V, b) sarebbe somma ortogonale di $\langle v \rangle$ e di un qualsiasi sottospazio di dimensione due ad esso complementare.□

Esercizio. Se viceversa la forma soddisfa la condizione della proposizione precedente, non può decomporsi in somma ortogonale di forme in dimensione strettamente minore di tre.

Siccome la parte alternante è sicuramente degenere, non possiamo considerare l'operatore associato alla parte simmetrica; tuttavia, se la parte simmetrica è non degenere, potremo considerare l'operatore associato alla parte alternante. Vedremo nel prossimo lemma che tale operatore è di tipo molto particolare. Se invece la parte simmetrica è degenere, allora è facile classificare la forma. Queste due osservazioni sono alla base della dimostrazione della proposizione conclusiva sulla classificazione degli "atomi" in dimensione tre.

Lemma. *Sia b una forma bilineare definita su uno spazio vettoriale reale V di dimensione tre, che non sia somma ortogonale di forme in dimensione strettamente minore di tre, e supponiamo che la parte simmetrica b_s sia non degenere. Sia A l'operatore lineare associato alla parte alternante b_a rispetto a b_s. Detto v un qualsiasi vettore non appartenente ad* Im A, *allora $\{A(A(v)), A(v), v\}$ è una base di V, rispetto alla quale A è rappresentato dal blocco di Jordan*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Poiché Ker $A =$ Ker $b_a^\sharp$ è il radicale di b_a, sappiamo che esso ha dimensione uno, e dunque Im A ha dimensione due. Inoltre, se u è un vettore non nullo di Ker A, si ha che per ogni vettore x, $b_s(u, Ax) = b_a(u, x) = 0$, dunque Im A é contenuto nel complemento ortogonale di Ker A rispetto a b_s, che pure ha dimensione due perché b_s è non degenere. Dunque Im A è uguale al complemento ortogonale di Ker A rispetto a b_s. Sappiamo dal lemma precedente che u è isotropo per b_s, dunque $u \in$ Im A, Se ora $w \in A^{-1}(u)$ si ha $b_s(w, u) = b_s(w, Aw) = b_a(w, w) = 0$ dunque w sta nel complemento ortogonale di u (quindi di Ker A), da cui $w \in$ Im A. Abbiamo quindi provato che la controimmagine di un qualsiasi vettore non nullo di Ker A sta in Im A. Per motivi di dimensione si ha allora A^{-1}(Ker A) $=$ Im A. Ora, se $v \notin$ Im A, $A(v) \notin$ Ker A (perché A^{-1}(Ker A) $=$ Im A) e quindi $A(A(v) \neq 0$ e $A(A(v)) \in A$(Im A) $=$ Ker A. Dunque $A(A(v))$ è un vettore non nullo del sottospazio uno-dimensionale Ker A, $A(v) \notin$ Ker A è un vettore del sottospazio due-dimensionale Im A, che contiene Ker A, ed infine $v \notin$ Im A: ciò basta a concludere che $\{A(A(v)), A(v), v\}$ è una base di V. Il fatto che J è la matrice rappresentativa di A è pressocché ovvio (basta applicare la definizione di matrice rappresentativa).□

Proposizione. *Sia b una forma bilineare definita su uno spazio vettoriale reale V di dimensione tre, che non sia somma ortogonale di forme in dimensione strettamente minore di tre. Allora b può essere rappresentata, in un opportuno riferimento, da una ed una sola delle seguenti matrici:*

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Supponiamo che la parte simmetrica b_s sia degenere. Sia u un vettore non nullo della parte alternante b_a. Siccome u è isotropo per b_s, ma non è contenuto nel suo radicale (cfr. primo Lemma), il radicale di b_s ha dimensione uno. Infatti, se il radicale avesse dimensione maggiore di uno, passando al quoziente otterremmo uno spazio di dimensione minore od uguale ad uno con un vettore isotropo (la classe di u), e dunque la forma dovrebbe per forza essere nulla, il che non è altrimenti u apparterrebbe al radicale. Sia v un vettore non nullo del radicale R di b_s. La forma indotta da b_s su V/R è non degenere ed ha un vettore isotropo (la classe di u), dunque per il teorema di classificazione delle forme simmetriche, esiste un altro vettore isotropo $[w]$, non proporzionale ad $[u]$. Da quanto detto si deduce facilmente che $\{u, v, w\}$ è una base di V, tale che $b_s(u, w) \neq 0$ e $b_a(v, w) \neq 0$. A meno di dividere u e v rispettivamente per tali valori, possiamo supporre $b_s(u, w) = 1$ e $b_a(v, w) = 1$. A questo punto è pressocché immediato verificare che la matrice associata a b è M_0.

Supponiamo ora che b_s sia non degenere, e sia A l'operatore associato a b_a rispetto a b_s. Dal teorema di classificazione delle forme simmetriche, tenendo presente che un vettore non nullo del radicale di b_a è isotropo per b_s, si deduce che è possibile trovare un vettore v, isotropo per b_s e non appartenente ad $\operatorname{Im} A$ (per chi conosce il piano proiettivo, basta osservare che l'insieme dei vettori isotropi per b_s è il cono sulla conica proiettiva reale definita da b_s, la quale, avendo almeno il punto reale dato dal radicale di b_a, deve essere reale e dunque, data una qualsiasi retta proiettiva r, si trovano sempre punti della conica fuori da r). Dal lemma precedente sappiamo che $\{A(A(v)), A(v), v\}$ è una base. Poiché $b_s(A(v), A(v)) = b_a(A(v), v)$, questo è non nullo. Infatti, il radicale di b_a ($= \operatorname{Ker} A$) è generato da $A(A(v))$, dunque passando al quoziente rispetto al radicale la forma indotta da b_a, essendo non degenere assume ha valore non nullo sulla coppia di vettori indipendenti $([A(v)], [v])$. A meno di dividere v per $b_s(A(v), A(v))$, possiamo supporre $b_s(A(v), A(v)) = \pm 1$.

Supponiamo prima che $b_s(A(v), A(v)) = 1$. Per un qualsiasi vettore x, $b_s(x, A(x)) = b_a(x, x) = 0$, quindi $A(v)$ è ortogonale sia ad $A(A(v))$ che a v. Inoltre v e $A(A(v))$ sono isotropi e $b_s(v, A(A(v))) = b_a(v, A(v)) = -b_a(A(v), v) = b_s(A(v), A(v)) = -1$. Questo significa che la matrice di b_s è

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque la matrice di b è $M + MJ = M_+$.

Analogamente, se $b_s(A(v), A(v)) = -1$, la matrice di b_s è $-M$, e dunque la matrice di b è $-M - MJ = -M_+ = M_-$.

È immediato verificare che la matrice è individuata da b, perché le parti simmetriche delle tre matrici assegnate hanno segnatura differente.□

Osservazione. Le tre matrici M_0, M_+ ed M_- effettivamente definiscono forme non decomponibili in somma ortogonale (cfr. l'esercizio dopo il primo lemma di questa sezione).

|| Abbiamo quindi solo tre atomi in dimensione tre. Cosa succederà in dimensione superiore?