

# Appunti di Misure Elettriche ed Elettroniche

a cura del *Gruppo di Misure Elettriche ed Elettroniche*  
dell'Università di Napoli Federico II e della Seconda Università di Napoli

11 dicembre 2008

# Indice

<b>I Metrologia</b>	<b>1</b>
<b>1 Elementi di Teoria delle Misure</b>	<b>3</b>
1.1 Perché si esegue una misurazione . . . . .	3
1.2 Il costo delle misurazioni . . . . .	4
1.3 Definizione di misura e misurazione . . . . .	5
1.3.1 Indicazione del risultato di una misurazione . . . . .	5
1.4 Tipi di grandezza . . . . .	6
1.5 Misurabilità di una grandezza . . . . .	6
1.6 Metodi di misurazione . . . . .	7
1.7 Strumento per misurazione . . . . .	8
1.8 Errori . . . . .	10
1.9 Legge di propagazione degli errori . . . . .	11
1.9.1 Esempi . . . . .	12
1.9.1.1 Somma di due grandezze . . . . .	12
1.9.1.2 Differenza di due grandezze . . . . .	12
1.9.1.3 Prodotto di due grandezze . . . . .	13
1.9.1.4 Rapporto di due grandezze . . . . .	13
1.10 Sistemi di unità di misura . . . . .	13
1.10.1 Il Sistema Internazionale . . . . .	14
1.10.2 Definizione delle unità di misura fondamentali . . . . .	15
1.10.3 Definizione delle unità di misura supplementari . . . . .	17
1.10.4 Campioni . . . . .	17
1.10.4.1 Massa . . . . .	18
1.10.4.2 Tempo . . . . .	18
1.10.4.3 Lunghezza . . . . .	18
1.10.4.4 Intensità di corrente elettrica . . . . .	19
1.10.4.5 Effetto Josephson . . . . .	19
1.10.4.6 Effetto Hall quantizzato . . . . .	21
1.10.4.7 Condensatore calcolabile . . . . .	22
1.10.5 I campioni di riferimento nazionali . . . . .	23
1.10.6 Normalizzazione internazionale e nazionale . . . . .	23
1.11 Legge della propagazione delle incertezze . . . . .	25
1.11.1 Metodologie per la valutazione dell'incertezza . . . . .	27

1.11.1.1	Valutazione di tipo A	27
1.11.1.2	Valutazione di tipo B	28
1.11.2	Fattore di copertura $k$	28
1.12	Esempio numerico	29
1.12.1	$P = VI$	30
1.12.2	$P = V^2/R$	31
1.12.3	$P = I^2R$	32
1.12.4	Conclusioni e commenti	33
1.13	Approccio deterministico	33
1.13.1	Incertezza e tolleranza nelle specifiche industriali	34
<b>II</b>	<b>Strumentazione</b>	<b>37</b>
<b>2</b>	<b>Strumentazione Analogica</b>	<b>39</b>
2.1	Strumento magnetoelettrico	40
2.1.1	Amperometro	41
2.1.2	Voltmetro	42
2.2	Strumento elettromagnetico	43
2.3	Caratteristiche degli strumenti	44
2.4	Strumento elettrodinamico	45
2.4.1	Milliamperometro	47
2.4.2	Voltmetro	48
2.4.3	Amperometro	49
2.4.4	Wattmetro	50
2.5	Errori di inserzione degli strumenti	52
2.6	Oscilloscopio analogico	53
2.6.1	Tubo a raggi catodici	53
2.6.1.1	Parametri caratteristici del CRT	55
2.6.2	Canale di amplificazione verticale	56
2.6.2.1	Effetto della banda sulla misura del tempo di salita	58
2.6.3	Base dei tempi	58
2.6.3.1	Modalità di gestione del trigger	63
2.6.4	Sonde attenuatrici compensate	63
2.6.5	Oscilloscopio a doppia traccia	66
2.6.5.1	Modalità <i>alternated</i>	67
2.6.5.2	Modalità <i>chopped</i>	70
<b>3</b>	<b>Strumentazione numerica per la misura delle ampiezze</b>	<b>71</b>
3.1	Convertitori analogico/digitale (A/D)	72
3.1.1	Convertitore Flash	73
3.1.2	Convertitori in pipeline	75
3.1.3	Convertitore ad approssimazioni successive (SAR)	77
3.1.4	Convertitori multiplexati	80

3.2	Convertitori digitale/analogico (D/A)	80
3.2.1	Convertitore a R pesate	80
3.2.2	Convertitore R/2R	81
3.3	Voltmetri numerici	82
3.3.1	Voltmetro a singola rampa (o a conversione tensione/tempo)	82
3.3.1.1	L'errore di conteggio	84
3.3.1.2	Valutazione dell'incertezza	86
3.3.2	Voltmetro a conversione tensione/frequenza	87
3.3.2.1	Valutazione dell'incertezza	89
3.3.2.2	Commenti	89
3.3.3	Voltmetro a doppia rampa	90
3.3.3.1	Valutazione dell'incertezza	93
3.3.3.2	Confronto fra Tempo di Misura e Risoluzione	94
3.3.4	Voltmetro multirampa in fase di <i>rundown</i>	95
3.3.5	Confronto fra voltmetri ad integrazione e a valore istantaneo	98
3.4	Convertitori AC/DC	101
3.4.1	Misuratore di tensioni di picco	101
3.4.2	Misuratore di tensioni di picco-picco	103
3.4.3	Misuratore di valor medio	104
3.4.3.1	Raddrizzatore a singola semionda	104
3.4.3.2	Raddrizzatore a doppia semionda	106
3.5	Voltmetro a vero valore efficace	106
3.5.1	Effetto Seebeck	107
3.5.2	Effetto Peltier	107
3.5.3	Milliamperometro a vero valore efficace	107
3.6	Oscilloscopio numerico	107
3.6.1	Modalità di campionamento	107
3.6.1.1	Tempo reale	107
3.6.1.2	Tempo equivalente sincrono	110
3.6.1.3	Tempo equivalente asincrono o casuale	111
<b>4</b>	<b>Misura di Tempo e Frequenza</b>	<b>113</b>
	Introduzione	113
4.1	Schema a blocchi	113
4.1.1	Circuito d'ingresso	114
4.1.2	Base dei tempi	115
4.1.3	Porta logica	116
4.1.4	Circuito di controllo	116
4.1.5	Unità decimale di conteggio e visualizzazione	116
4.2	Modalità operative	117
4.2.1	Conteggio di impulsi	117
4.2.2	Misurazione di frequenza	117
4.2.3	Misurazione del rapporto tra due frequenze	119

4.2.4	Misurazione di periodo . . . . .	120
4.3	Contatori reciproci . . . . .	122
<b>III</b>	<b>Metodi di Misura</b>	<b>123</b>
<b>5</b>	<b>Misura di resistenze in continua</b>	<b>125</b>
5.1	Ponte di Wheatstone . . . . .	125
5.1.1	Procedura di misura . . . . .	127
5.1.2	Valutazione dell'incertezza $u_{R_x}$ . . . . .	129
5.1.3	L'incertezza di sensibilità $u_G$ . . . . .	130
5.1.3.1	Approccio sperimentale . . . . .	131
5.1.3.2	Approccio teorico . . . . .	132
5.1.4	Esempio di valutazione numerica dell'incertezza $u_G$ . . . . .	134
<b>IV</b>	<b>Appendici</b>	<b>135</b>
<b>A</b>	<b>Richiami di statistica</b>	<b>137</b>
A.1	Grafico a barre . . . . .	137
A.2	Istogramma . . . . .	138
A.3	Densità di probabilità . . . . .	140
A.3.1	Media e varianza . . . . .	142
A.3.2	Alcune distribuzioni notevoli . . . . .	142
A.3.2.1	Distribuzione Gaussiana . . . . .	142
A.3.2.2	Distribuzione uniforme . . . . .	143
A.3.3	Stime di media e varianza . . . . .	144

# Elenco delle figure

1.1	Schema a blocchi funzionale di uno strumento per misurazione . . . . .	8
1.2	Giunzione Josephson . . . . .	19
1.3	Caratteristica I-V . . . . .	20
1.4	Dispositivo di Hall . . . . .	21
1.5	Andamento della $R_K$ . . . . .	22
1.6	Schema del condensatore calcolabile . . . . .	23
1.7	Confronto fra metodi di misura . . . . .	33
1.8	Verifica delle specifiche industriali . . . . .	34
2.1	Schema equivalente di una misura di corrente (a sinistra) e di tensione (a destra) . . . . .	40
2.2	Schema del milliamperometro magnetoelettrico . . . . .	41
2.3	Dal milliamperometro all'amperometro . . . . .	42
2.4	Dal milliamperometro al voltmetro . . . . .	42
2.5	Schema dell'amperometro elettromagnetico . . . . .	43
2.6	Schema circuitale dello strumento elettrodinamico . . . . .	45
2.7	Mutua induttanza fra le bobine $M$ in funzione di $\delta$ . . . . .	46
2.8	Schema circuitale del milliamperometro elettrodinamico . . . . .	47
2.9	Schema circuitale del voltmetro elettrodinamico . . . . .	48
2.10	Schema circuitale dell'amperometro elettrodinamico . . . . .	49
2.11	Schema circuitale del wattmetro elettrodinamico . . . . .	50
2.12	Fasori di correnti e tensione . . . . .	52
2.13	Misura di tensione e corrente. . . . .	52
2.14	Schema del tubo a raggi catodici . . . . .	54
2.15	Schema del canale verticale dell'oscilloscopio analogico . . . . .	56
2.16	Circuito di generazione degli impulsi di trigger. . . . .	58
2.17	Circuito comparatore . . . . .	59
2.18	Circuito derivatore e cimatore . . . . .	60
2.19	Circuito della base dei tempi . . . . .	60
2.20	Evoluzione temporale dei segnali della base dei tempi . . . . .	61
2.21	Esempio di applicazione del circuito di hold off . . . . .	62
2.22	Circuito equivalente del segnale e dell'oscilloscopio . . . . .	64
2.23	Circuito equivalente di segnale, sonda e oscilloscopio . . . . .	65
2.24	Circuito di selezione della modalità di visualizzazione. . . . .	67

2.25	Modalità <b>alternated</b> con sincronizzazione sul canale 1. . . . .	68
2.26	Modalità <b>alternated</b> con sincronizzazione alternata. . . . .	69
2.27	Modalità <b>chopped</b> . . . . .	70
3.1	Caratteristica di quantizzazione del convertitore flash. . . . .	72
3.2	Convertitore flash. . . . .	73
3.3	Schema di un convertitore in configurazione <i>pipeline</i> . . . . .	76
3.4	Schema del convertitore ad approssimazioni successive ( <i>SAR</i> ). . . . .	77
3.5	Diagramma di flusso del convertitore <i>SAR</i> . . . . .	78
3.6	Diagramma temporale di funzionamento del <i>SAR</i> . . . . .	79
3.7	Convertitore a resistenze pesate. . . . .	81
3.8	Convertitore <i>R/2R</i> . . . . .	81
3.9	Schema a blocchi del voltmetro a singola rampa. . . . .	83
3.10	Funzionamento del voltmetro a singola rampa. . . . .	84
3.11	Effetto dell'errore di conteggio sulla misura di <i>T</i> . . . . .	85
3.12	Schema a blocchi del voltmetro ad integrazione . . . . .	88
3.13	Principio di funzionamento del voltmetro ad integrazione . . . . .	89
3.14	Schema a blocchi del voltmetro a doppia rampa. . . . .	91
3.15	Principio di funzionamento del voltmetro a doppia rampa. . . . .	91
3.16	Schema dello stadio d'ingresso modificato . . . . .	93
3.17	Schema dello stadio d'ingresso del voltmetro multirampa <i>rundown</i> . . . . .	95
3.18	Esempio di funzionamento del voltmetro multirampa <i>rundown</i> . . . . .	96
3.19	Jitter $t_e$ sull'istante di inizio misura dovuto al rumore sovrapposto. . . . .	98
3.20	NMRR in funzione di $\lambda = f_0 T$ . . . . .	99
3.21	Voltmetro di picco . . . . .	102
3.22	Schema circuitale del rivelatore picco-picco . . . . .	103
3.23	Segnali del rivelatore picco-picco . . . . .	104
3.24	Schema circuitale del raddrizzatore a singola semionda . . . . .	105
3.25	Segnali d'ingresso e d'uscita del raddrizzatore a singola semionda . . . . .	105
3.26	Schema circuitale del raddrizzatore a doppia semionda . . . . .	106
3.27	Segnali d'ingresso e d'uscita del raddrizzatore a doppia semionda . . . . .	107
3.28	Modalità di campionamento in <b>tempo reale</b> . . . . .	108
3.29	Modalità di campionamento in <b>tempo reale</b> con interpolazione lineare. . . . .	109
3.30	Modalità di campionamento in <b>tempo equivalente sincrono</b> . . . . .	110
3.31	Modalità di campionamento in <b>tempo equivalente asincrono</b> . . . . .	111
4.1	Schema a blocchi di un contatore universale . . . . .	114
4.2	Stadio d'ingresso del contatore universale . . . . .	114
4.3	Schema a blocchi della base dei tempi . . . . .	115
4.4	Principio di funzionamento del conteggio di impulsi . . . . .	117
4.5	Principio di funzionamento della misurazione di frequenza . . . . .	118
4.6	Principio di funzionamento della misurazione del rapporto tra due frequenze . . . . .	120
4.7	Principio di funzionamento della misurazione di periodo . . . . .	121

4.8	Principio di funzionamento della misurazione di periodi multipli . . . .	121
4.9	Errore di quantizzazione . . . . .	122
4.10	Schema a blocchi di un contatore reciproco . . . . .	122
5.1	Schema circuitale del Ponte di Wheatstone . . . . .	126
5.2	Esempio di deviazioni dallo zero. . . . .	128
5.3	Interpolazione per la valutazione del valore $R_0$ . . . . .	128
5.4	Resistenza equivalente vista ai morsetti $A$ e $B$ . . . . .	132
5.5	Tensione equivalente ai capi del galvanometro $G$ . . . . .	133
5.6	Circuito equivalente del ponte di Wheatstone visto dal galvanometro $G$	133
A.1	Grafico a barre . . . . .	138
A.2	Istogramma delle frequenze assolute . . . . .	139
A.3	Istogramma dei valori relativi di frequenza . . . . .	139
A.4	Distribuzione Gaussiana . . . . .	143
A.5	Andamento della curva di distribuzione uniforme . . . . .	143



# Elenco delle tabelle

1.1	Grandezze fondamentali del Sistema Internazionale . . . . .	14
1.2	Grandezze supplementari del Sistema Internazionale . . . . .	15
1.3	Campioni nazionali e incertezze relative associate . . . . .	24
1.4	Prefissi usati nel SI . . . . .	25

**Parte I**

**Metrologia**



# Capitolo 1

## Elementi di Teoria delle Misure

### 1.1 Perché si esegue una misurazione

La scienza della misurazione ha una notevole rilevanza nei diversi settori del mondo della ricerca, della tecnica e dell'economia. Tre sono i motivi fondamentali che ci spingono ad eseguire una misurazione.

- **Determinazione quantitativa di una proprietà di un oggetto** quale ad esempio la resistenza di un dispositivo, la tensione di una batteria, l'intensità di un campo magnetico. Queste operazioni, che potrebbero sembrare banali, sono invece complesse sia a livello teorico che sperimentale, a causa dei numerosi problemi di cui bisogna tener conto e che saranno considerati nel seguito. Da notare che spesso il risultato di una misurazione ha anche dei risvolti legali: al risultato di una misurazione fa spesso riferimento il legislatore, come pure il perito chiamato dal giudice che deve dirimere controversie legali, o il tecnico interessato alla verifica delle specifiche di alcuni prodotti, ad esempio per motivi commerciali (controllo della qualità).
- **Controllo di un processo o dello stato di funzionamento di un dispositivo.** Con la misurazione si determina il valore di una grandezza, utilizzata come ingresso del sistema di reazione che controlla un certo processo. Ad esempio il termostato dello scaldabagno domestico misura la temperatura dell'acqua, confronta questo valore con una temperatura prefissata e regola l'energia fornita al dispositivo. In alcuni ricevitori televisivi un sensore misura l'illuminazione dell'ambiente per poter regolare la luminosità dell'immagine. Ancora, i moderni sistemi industriali di produzione o di trasporto utilizzano complessi sistemi di supervisione e controllo, che richiedono la misurazione di diverse grandezze.
- **Ricerca e convalida di una legge fisica e dei valori delle costanti sperimentali.** La verifica delle leggi che governano un certo fenomeno fisico richiede spesso delle misurazioni. In questo ambito, possono essere distinti due approcci operativi, un primo **teorico** ed un secondo **sperimentale**. L'approccio teorico si basa

sulla conoscenza *a priori* di un modello matematico del sistema misurato, che consente di predirne il comportamento e di applicare tecniche di misurazione indirette. Bisogna comunque tener conto del fatto che per ridurre la complessità del modello è quasi sempre necessario fare ipotesi riduttive ed operare semplificazioni. Proprio a causa di queste limitazioni, i risultati forniti dell'analisi teorica sono comunque generalmente diversi dal comportamento reale e dipendono fortemente dalla bontà del modello adottato. L'approccio sperimentale, invece, non richiede un modello matematico (perché la conoscenza teorica in merito non è consolidata o perché si vogliono verificare alcune nuove ipotesi). In questo caso si opera direttamente sul sistema fisico, giungendo a caratterizzarne l'effettivo comportamento reale. Nei problemi più complessi di misurazione, è comunque sempre necessaria la considerazione di entrambi gli approcci. La convalida di una legge fisica viene generalmente effettuata dal fisico, il quale determina anche, all'interno di un sistema di unità di misura, i valori delle costanti fondamentali. Il compito dell'ingegnere è più frequentemente invece quello di ricavare, mediante misurazioni, i valori delle costanti sperimentali che sono necessarie per la corretta esecuzione di un progetto, come ad esempio la densità, la conducibilità elettrica, i coefficienti di dilatazione termica o di temperatura, la resistenza termica ed il potere fonoassorbente di un particolare materiale.

La conoscenza e descrizione quantitativa delle grandezze d'interesse del fenomeno in esame, inserita in un modello prefissato, consente spesso di prevederne il comportamento, in condizioni in genere anche diverse da quelle osservate.

L'ingegnere impegnato in attività di progettazione, di realizzazione o di collaudo di una apparecchiatura o di una struttura, solitamente è spinto dalle prime due motivazioni. La terza motivazione è invece più vicina all'ingegnere che opera in un laboratorio di ricerca. L'approccio dell'ingegnere è comunque quello di chi deve considerare le misure anche sotto l'aspetto legale, analizzando spesso anche l'aspetto teorico dei fenomeni in esame. Per l'ingegnere la misura ha essenzialmente fini pratici. Egli deve identificare un modello del processo in esame, adeguato al livello d'incertezza richiesto, e deve eseguire la misurazione riducendo al minimo gli investimenti, sia in termini di tempo che di soldi.

## 1.2 Il costo delle misurazioni

In una società industriale come la nostra l'esecuzione delle misurazioni influenza ogni attività ed a livelli spesso insospettabili. Ad esempio anche in un prodotto naturale come l'uovo, l'incidenza sul prezzo finale delle varie misurazioni che vengono attuate è del 6%. Questa incidenza sale al 15-20% per il cruscotto di una autovettura e supera il 50 % per un aereo militare. Per una nazione industrializzata come l'Italia, due stime indipendenti sull'incidenza del sistema delle misurazioni sul costo di un prodotto hanno indicato rispettivamente i valori di 4-6% e di 5-7% del prodotto industriale lordo. Dato che l'ordine di grandezza di detto prodotto è dell'ordine di  $1.5 \cdot 10^{12}$  euro annui, as-

sumendo per l'incidenza delle misure un valore medio del 5%, ne consegue che  $5 \cdot 10^{10}$  euro, ossia 50 miliardi, sono spesi per fare misurazioni, comprendendo in tale cifra il costo della strumentazione e del personale impegnato in tali attività.

### 1.3 Definizione di misura e misurazione

Il concetto di misura nasce dalla necessità di poter confrontare gli attributi di due diversi corpi o fenomeni fisici, come ad esempio il confronto tra la lunghezza di due oggetti. Nell'eseguire tale confronto bisogna però tener conto che la considerazione delle sole relazioni di uguaglianza e disuguaglianza consente sì di comparare due grandezze, ma non consente però la determinazione di una misura vera e propria, che nasce invece considerando relazioni di proporzionalità e di componibilità: ad esempio l'oggetto A ha una lunghezza doppia di quella di B. Deve essere cioè possibile associare alla grandezza in esame (*misurando*), un numero (misura) che consenta di esprimere le relazioni tra grandezze omogenee mediante le relazioni tra i numeri associati. Dato un insieme di grandezze omogenee, il numero 1 viene associato come misura ad una di esse, che può essere scelta anche ad arbitrio e che rappresenta l'unità di misura per quella grandezza. **La misura di una grandezza esprime quindi il rapporto tra la grandezza considerata e la corrispondente unità di misura.** Il processo attraverso cui si determina il valore del misurando si chiama misurazione. Prima di affrontare lo studio degli strumenti e dei metodi utilizzati per eseguire la misurazione delle diverse grandezze è sembrato opportuno premettere alcune considerazioni di carattere generale sul perché si eseguono le misurazioni e sull'entità economica che tali operazioni implicano.

#### 1.3.1 Indicazione del risultato di una misurazione

Il solo numero rappresentante la misura di una grandezza non può da solo esaurire l'intero contenuto informativo deducibile dal procedimento di misurazione, ma è indispensabile associare ad esso altre informazioni, quali:

**l'indicazione del misurando** che consente di specificare il tipo di modello rappresentativo del fenomeno o grandezza in esame che si è adottato: ad es. se si assume come misurando il diametro di un pistone, si vuole indicare che per la grandezza in esame il modello adottato è quello di un cilindro retto, descrivibile con la sola misura del diametro;

**l'unità di misura** essenziale per comprendere il valore assunto dal misurando;

**l'incertezza della misura** che consente di valutare il grado di indeterminazione con cui è stato valutato il misurando.

Possono poi essere aggiunte altre informazioni relative ad esempio alle condizioni ambientali o, in generale, a tutte le grandezze d'influenza, al momento della prova.

## 1.4 Tipi di grandezza

Il termine **grandezza** viene usato per indicare ogni quantità, proprietà, condizione usata per descrivere fenomeni e valutabile in termini di unità di misura. Come esempi si possono indicare la resistenza elettrica di un dato conduttore o la durata di un impulso. Il termine **specie di grandezza** si utilizza per indicare l'insieme delle grandezze valutabili con lo stesso metodo di misurazione o con metodi di misurazione omologhi. Grandezze della stessa specie si dicono omogenee e possono essere valutate in base alla stessa unità di misura. L'essere valutate usando unità di misura aventi lo stesso nome o dotate delle stesse dimensioni non è però condizione sufficiente a che le grandezze siano della stessa specie. Considerando il modo di esprimere e collegare i valori assunti dalle grandezze, esse possono essere classificate in diversi tipi:

**Grandezze razionali** Sono grandezze i cui valori sono espressi da numeri razionali;

**Grandezze numeriche (o numerali)** Sono grandezze concernenti la misurazione di oggetti o eventi individuati singolarmente, i cui valori sono espressi da numeri interi positivi. L'unità di misura è il singolo oggetto o evento. Come esempio si può citare il numero di abitanti di una certa regione. Da notare che il numero di abitanti per kilometro quadrato è invece una grandezza razionale.

**Grandezze complesse** Sono grandezze il cui valore è espresso mediante un insieme ordinato di numeri relativi, presupponendo un sistema di riferimento. I singoli elementi dell'insieme si dicono componenti. L'intero insieme costituisce, in senso generalizzato, un numero complesso. Come esempi si possono citare tutte le grandezze vettoriali o tensoriali.

## 1.5 Misurabilità di una grandezza

La definizione di misura non ha applicazione immediata a tutte le grandezze, le quali possono essere distinte in più gruppi:

**Grandezze direttamente misurabili** per le quali si può definire e realizzare fisicamente una operazione di somma ed applicare il concetto di rapporto con una grandezza di riferimento;

**Grandezze indirettamente misurabili** per le quali il valore della misura viene ottenuto a partire dalla misurazione di altre grandezze, legate a quella d'interesse da una legge fisica (es. misura della resistività di un materiale a partire dal valore della resistenza e delle dimensioni geometriche del campione in esame);

**Grandezze classificabili** alle quali si possono applicare uguaglianze e disuguaglianze, ma non possono essere eseguiti rapporti (es. temperatura, durezza). Anche a queste viene associato un numero, considerando scale convenzionali, estendendo il concetto di misura precedentemente illustrato. In pratica si sceglie un insieme

di grandezze fisiche ( $G_1, G_2, \dots, G_n$ ) che rappresentano una scala di valori, associando ad esse un numero progressivo ( $P_1, P_2, \dots, P_n$ ). La grandezza da misurare viene confrontata con il principio dell'uguaglianza e disuguaglianza rispetto alla scala, in modo da determinare il valore  $P_i$  cui è più prossima. Alcune grandezze diventano misurabili considerando le loro variazioni ad intervalli (es. salti di temperatura).

## 1.6 Metodi di misurazione

L'esecuzione di una misurazione comporta diverse fasi:

1. la prima fase è quella dell'impostazione teorica, che richiede una conoscenza preventiva del fenomeno in esame, e che consente di determinare il principio di misurazione da adottare;
2. il principio scelto viene quindi tradotto in una sequenza logica di operazioni (metodo di misurazione) ed eventualmente anche in una descrizione dettagliata delle operazioni da eseguire (procedura);
3. segue infine la realizzazione sperimentale del metodo, utilizzando strumentazione opportunamente scelta ed assemblata.

I metodi di misurazione possono essere classificati in diversi modi. Considerando come viene determinato il valore delle grandezze si hanno i seguenti metodi:

**metodo diretto** la misura della grandezza è ottenuta direttamente, senza misurare altre grandezze ad essa legate (con eccezione delle grandezze d'influenza e di eventuali campioni utilizzati); es. misurazione di una tensione direttamente con un voltmetro;

**metodo indiretto** la misura della grandezza è ottenuta a partire dalla misurazione diretta di altre grandezze che sono legate ad essa mediante relazioni funzionali; es. misurazione indiretta di una resistenza, a partire dai valori ottenuti con la misurazione diretta della tensione e della corrente e dalla legge di Ohm.

Se invece si considera il modo in cui avviene la misurazione si ha:

**misurazione fondamentale** in cui il valore misurato è ottenuto dalla misurazione di una delle grandezze fondamentali del Sistema di Unità di Misura (es. massa, lunghezza, tempo,..);

**misurazione con il metodo del confronto** la misura è ottenuta mediante confronto con una grandezza della stessa specie e di valore noto; ci sono diversi metodi di confronto:

**differenziale** si esegue un confronto tra la grandezza in esame ed una grandezza della stessa specie e di valore prossimo ad essa e si determina solo la differenza tra le due;

**di sostituzione** la grandezza in esame viene sostituita nel circuito di misura da una grandezza della stessa specie e dello stesso valore e viene verificato che lo strumento dia la stessa indicazione;

**di zero** la misurazione si esegue bilanciando una grandezza mediante la variazione di una o più grandezze di valore noto, legate alla prima mediante relazioni matematiche note. La condizione di bilanciamento è visualizzata dall'indicazione di zero di un appropriato strumento (es. bilanciamento dei ponti per la misurazione di resistenze o di impedenze, tecniche potenziometriche per la misurazione di tensioni).

I metodi di misurazione sono anche classificati come:

**a lettura singola** la misura viene ottenuta effettuando un'unica misurazione;

**a lettura ripetuta** la misura viene ottenuta effettuando un'analisi statistica sulla distribuzione dei dati ottenuti ripetendo la misurazione in condizioni nominalmente uguali.

## 1.7 Strumento per misurazione

Uno strumento per misurazione (o di misura) può essere rappresentato mediante lo schema a blocchi di Fig. 1.1.

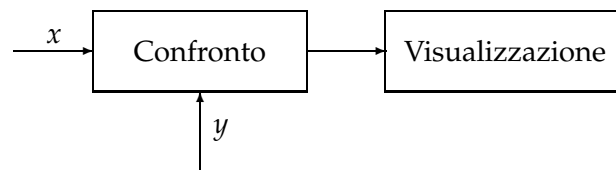


Figura 1.1: Schema a blocchi funzionale di uno strumento per misurazione

Da essa possiamo vedere che il misurando viene messo a confronto con una grandezza, ad esso omogenea, ottenuta tramite un campione di riferimento. Il risultato di questo confronto viene restituito tramite un visualizzatore. Va precisato che l'interazione tra il sistema misurato, lo strumento e l'ambiente che si instaura per generare il segnale di misura, comporta degli scambi energetici che possono alterare sia lo stato del sistema misurato che quello dello strumento. Un cambiamento dello stato del sistema misurato potrebbe modificare il valore del misurando, anche se essa in alcuni casi può essere valutata considerando il carico dello strumento e le caratteristiche del sistema misurato.

Dal punto di vista della utilizzazione, uno strumento per misurazione è caratterizzato dalle seguenti grandezze, riportate nel manuale d'uso ed a volte anche esternamente allo strumento stesso:

**natura del misurando** grandezza che lo strumento è destinato a misurare;

**campo di misura (portata)** intervallo comprendente tutti i valori delle misure che lo strumento può assegnare;

**precisione** grado di finezza nelle prestazioni di un operazione, o il grado di perfezione di uno strumento o metodo di misura [1]. E' un indicazione dell'uniformità o riproducibilità di un risultato di misura. La precisione si riferisce alla qualità di un'operazione dalla quale si ottiene un risultato, ed è diversa dall'accuratezza, che si riferisce alla qualità del risultato;

**accuratezza** grado di conformità con un riferimento (il valore "vero"). L'accuratezza si riferisce alla qualità del risultato, ed è diversa dalla precisione, definita in precedenza;

**consumo** caratterizza il carico dello strumento e quindi l'influenza che esso ha sul circuito di misura in cui è inserito;

**limiti di impiego** definiscono il campo di valori delle grandezze d'influenza entro cui lo strumento può operare conservando le sue prestazioni. Superati tali limiti lo strumento innanzitutto perde le sue caratteristiche di precisione, inoltre potrebbe essere anche permanentemente danneggiato. Come esempi si possono citare: i limiti di temperatura, la massima tensione di alimentazione, il massimo sovraccarico;

**sensibilità** nell'accezione più generale, è il rapporto tra il più piccolo valore rappresentabile da uno strumento di misura e il corrispondente valore della grandezza in ingresso. Analiticamente, essa è la derivata dell'uscita rispetto all'ingresso:

$$S = \frac{dy}{dx} \quad (1.1)$$

Nel caso di strumenti analogici con visualizzazione ad indice, la sensibilità è la minima variazione della grandezza in ingresso necessaria affinché l'indicatore si sposti dalla posizione di riposo alla prima deviazione rappresentata sulla scala graduata.

**risoluzione** minimo valore rappresentabile dallo strumento di misura e, come tale, è legata al dispositivo di visualizzazione dello strumento. Per un dispositivo con indicazione digitale, la risoluzione coincide con la variazione di una unità della cifra meno significativa. Ad esempio, un voltmetro che sta visualizzando il valore 119,99 V ha una risoluzione di 0,01 V;

**dinamica** è l'intero intervallo di valori che può essere rappresentato dallo strumento; è la differenza tra la portata e la sensibilità (vista come valore minimo dell'ingresso).

## 1.8 Errori

Nell'eseguire una misurazione, si commette sempre un errore  $E$ ,

$$E = M - V, \quad (1.2)$$

pari alla distanza tra il valore "vero" del misurando  $V$  e il risultato della misurazione  $M$ . Questa definizione, tuttavia, non è utile dal punto di vista operativo perché il valore "vero" non esiste e comunque non sarebbe possibile misurarlo proprio perché ogni tentativo è affetto da un errore, di cui non si conosce né ampiezza né segno. Perciò la (1.2) non si può usare per determinare, a partire dal valore misurato, il valore vero del misurando. Ciò nonostante, l'errore è una grandezza che ancora viene utilizzata, per lo meno a fini didattici, perché è stato storicamente il primo approccio utilizzato per qualificare la bontà di una misura. Inoltre, se considerazioni sul fenomeno in osservazione, sulla strumentazione e sulla procedura di misura adottata ce lo consentono, è spesso possibile introdurre un valore massimo dell'errore  $E_{\max}$  che ci si può aspettare dalla misurazione, così da poter ottenere un'informazione, ancorché incompleta, sulla fascia entro la quale ci si deve aspettare di trovare il valore vero del misurando:

$$V = M \pm E_{\max} \quad (1.3)$$

Molto spesso, anziché in termini assoluti, si preferisce esprimere l'errore in termini relativi:

$$e = \frac{M - V}{V} \approx \frac{M - V}{M}, \quad (1.4)$$

dove l'ultima uguaglianza vale se l'errore assoluto  $E$  è sufficientemente piccolo. Qualora il valore di  $e$  dovesse essere particolarmente piccolo, lo si può esprimere in termini percentuali (%), in permille, o anche in parti per milione (*ppm*).

Gli errori si dividono in tre tipologie diverse, a seconda della loro natura:

- **errori grossolani:** sono quegli errori dovuti, ad esempio, alla distrazione dell'operatore che legge un valore sbagliato del risultato della misurazione sullo schermo di uno strumento numerico, o sbagliando a dare un valore numerico alla posizione dell'indice in uno strumento analogico. Questi errori sono generalmente di natura tale da poter essere facilmente identificati, e la relativa misura viene perciò scartata e se possibile ripetuta;
- **errori sistematici:** sono errori che in misure ripetute mantengono il proprio segno e la propria ampiezza. In linea di principio tali errori possono essere corretti, in quanto il loro contributo resta sempre uguale: tuttavia la correzione è completa solo se si riesce a determinarne il valore senza incertezza, il che è impossibile. Anche dopo la correzione resterà perciò un'aliquota la cui entità dipende dalla bontà della misura effettuata per correggere l'errore sistematico;
- **errori aleatori:** sono così definiti quegli errori il cui valore in modulo e segno varia ad ogni misurazione. Tralasciando gli errori grossolani, e ricordando che gli errori

sistematici lasciano in eredità un'aliquota imponderabile, di fatto gli unici errori che restano tali sono quelli aleatori, che sono governati da leggi di tipo statistico.

Proprio la presenza di errori aleatori rende impossibile l'individuazione del valore "vero" di un misurando poichè ogni misura sarà affetta da un errore il cui valore cambia di continuo. Alla luce di queste considerazioni, e rimandando alla Appendice A a pag. 137 per il necessario approfondimento, bisogna concludere che un valore vero non esiste: al più riusciremo ad individuare un valore che *convenzionalmente* riterremo vero, ottenuto attraverso un certo numero di misurazioni, che considereremo il più rappresentativo della grandezza oggetto della misurazione.

## 1.9 Legge di propagazione degli errori

Molto spesso per attribuire un valore al misurando è necessario ricorrere alla misurazione di altre grandezze ad esso collegate. Come anticipato nella Sez. 1.6 si definiscono pertanto due tipologie di misurazioni:

- **diretta**: è una misurazione, con ovvio significato dei termini, nella quale la grandezza d'interesse viene misurata direttamente; ad esempio, una tensione viene misurata direttamente mediante un voltmetro.
- **indiretta**: è quella in cui la grandezza d'interesse viene misurata attraverso la misurazione di altre grandezze legate da una relazione funzionale a quella d'interesse: se  $y$  è il misurando, anzichè misurarlo per via diretta — cosa che potrebbe a volte anche essere impossibile: si pensi alla misura di una resistenza di valore ohmico  $R$  — si può utilizzare una relazione funzionale:

$$y = f(x_1, \dots, x_n), \quad (1.5)$$

che lega  $y$  a  $n$  grandezze indipendenti  $x_1, \dots, x_n$  tramite la funzione  $f(\cdot)$ . Misurando per via diretta le  $n$  grandezze  $x_i$ , o comunque conoscendone il valore in qualche modo (eventualmente mediante misurazioni indirette a cascata), è possibile risalire al valore di  $y$  utilizzando la (1.5). È tipico il caso di misure di resistenza, in cui il valore della resistenza  $R$  viene misurato per via indiretta misurando la tensione  $V$  ai suoi capi e la corrente  $I$  che circola al suo interno:

$$R = \frac{V}{I}. \quad (1.6)$$

Sorge a questo punto il dubbio su come si comporti, o meglio come si *propaghi* l'errore nelle misure indirette, ovvero quale sia l'errore  $E_y$  che mi devo aspettare sulla misurazione della grandezza  $y$  una volta che siano noti gli errori  $E_i$  che commettiamo sulla misura di ciascuna delle grandezze  $x_i$ . Partiamo dalla relazione in (1.5), e scriviamo il differenziale di  $y$ :

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n, \quad (1.7)$$

dove  $dy$  e  $dx_i$  sono variazioni infinitesime delle grandezze  $y$  e  $x_i$  intorno ad un punto. Alle derivate parziali viene comunemente assegnato il termine *coefficienti di sensibilità*. Se l'errore è, come è auspicabile e il più delle volte verificato, molto piccolo, la sostituzione  $dx_i = E_i$  e  $dy = E_y$  non lascia sorpresi, e pertanto la (1.7) diventa:

$$E_y = \frac{\partial f}{\partial x_1} E_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} E_n. \quad (1.8)$$

Per poter calcolare l'errore  $E_y$  tramite quest'ultima relazione è però necessario conoscere i valori e i segni di ciascuno degli errori e delle derivate coinvolte. Nella quasi totalità dei casi, però, non è necessario conoscere l'errore da cui una misura è affetta, ma solo il suo valore massimo, così da dare un'indicazione del caso peggiore con il quale nella misurazione ci dovremo confrontare. Per ottenere tale indicazione, possiamo semplicemente sommare i valori assoluti di ciascun addendo nella (1.8), e attribuire agli errori  $E_i$  i loro valori massimi. Ne discende la *legge della propagazione degli errori*:

$$E_{y,\max} = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| E_{1,\max} + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| E_{n,\max}. \quad (1.9)$$

### 1.9.1 Esempi

Presentiamo adesso alcuni esempi di propagazione degli errori per grandezze misurate per via indiretta ottenute mediante operazioni elementari. Per semplicità di lettura riterremo che le grandezze si riferiscono sempre ai valori assoluti (così da ottenere il *worst case*).

#### 1.9.1.1 Somma di due grandezze

$$y = x_a + x_b \quad \Rightarrow \quad E_y = E_a + E_b \quad \Rightarrow \quad e_y = \frac{E_y}{y} = \frac{E_a + E_b}{x_a + x_b} \quad (1.10)$$

Ad esempio, sommando due lunghezze  $L = L_1 + L_2$ , dove  $L_1 = 1,1$  m e  $L_2 = 2,3$  m, a cui sono associati gli errori assoluti  $E_1 = 0,3$  m e  $E_2 = 0,1$  m, si ottiene:

$$E_L = E_1 + E_2 = 0,4 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad e_L = \frac{0,4}{3,4} \approx 0,12$$

#### 1.9.1.2 Differenza di due grandezze

$$y = x_a - x_b \quad \Rightarrow \quad E_y = E_a + E_b \quad \Rightarrow \quad e_y = \frac{E_y}{y} = \frac{E_a + E_b}{x_a - x_b} \quad (1.11)$$

Facciamo un esempio per mostrare quanto sia critica la misura effettuata per differenza. Supponiamo di voler misurare le perdite in un cavo coassiale: avremo una potenza in ingresso  $P_i$  e una in uscita  $P_o$ , la cui differenza è il misurando  $P_a$ , ovvero la potenza dissipata nel cavo. Se la frequenza non è troppo elevata e il cavo sufficientemente

corto, possiamo ritenere che la dissipazione sia piccola. Ricordando che è:  $E_x = e_x x$ , possiamo scrivere:

$$e_d = \frac{e_i P_i + e_o P_o}{P_d} = e_p \frac{P_i + P_o}{P_i - P_o} = e_p \frac{1 + \eta}{1 - \eta}, \quad (1.12)$$

dove  $\eta = P_o/P_i \sim 1$  per le ipotesi fatte. Supponendo che  $\eta = 99\%$ , si ottiene  $e_d = 199 e_p$ . Se, ad esempio,  $e_p = 0.1\%$ , si ottiene  $e_d = 19.9\%$ : l'errore sulla misura delle singole potenze d'ingresso e d'uscita viene cioè amplificato di circa 200 volte.

### 1.9.1.3 Prodotto di due grandezze

$$y = x_a x_b \Rightarrow E_y = x_b E_a + x_a E_b \Rightarrow e_y = \frac{E_y}{y} = e_a + e_b \quad (1.13)$$

Volendo misurare l'area di un terreno rettangolare mediante la formula  $A = b h$ , supponendo di aver misurato  $b = 15,5 \text{ m}$ ,  $h = 100,8 \text{ m}$ , con errori assoluti  $E_b = 0,5 \text{ m}$  e  $E_h = 0,9 \text{ m}$ , si ottiene:

$$A = b h = 1562,40 \text{ m}^2 \Rightarrow e_L \approx 0.0322 + 0.0089 \approx 0.04 \quad (1.14)$$

### 1.9.1.4 Rapporto di due grandezze

$$y = \frac{x_a}{x_b} \Rightarrow E_y = \frac{1}{x_b} E_a + \frac{x_a}{x_b^2} E_b \Rightarrow e_y = \frac{E_y}{y} = e_a + e_b \quad (1.15)$$

Per misurare il valore di una resistenza, possiamo usare la legge di Ohm  $R = V/I$ . Supponendo che i valori misurato per tensione e corrente siano rispettivamente  $V = 1,01 \text{ V}$  e  $I = 3,1 \text{ A}$ , con errori relativi di ampiezza  $e_V = 0.15$  e  $e_I = 0.33$  varrà:

$$R = \frac{V}{I} = 0,326 \Omega \Rightarrow e_R = 0.15 + 0.33 = 0.48 \quad (1.16)$$

## 1.10 Sistemi di unità di misura

Misurare una qualsiasi grandezza fisica significa confrontarla con un'altra, ad essa omogenea, convenzionalmente assunta unitaria. Pertanto, la misura di una grandezza è costituita da una unità di misura e da un numero che esprime quante volte detta unità è contenuta nella grandezza da misurare. Quindi, per eseguire la misura di una qualsivoglia grandezza fisica, è necessario associare ad essa un'opportuna *unità di misura*. A tal riguardo, si definisce *sistema di unità di misura*, un qualsiasi insieme di grandezze, assunte convenzionalmente di valore unitario, attraverso le quali è possibile rappresentare tutte le grandezze di interesse della fisica.

La scelta di quali e quante unità includere in un sistema di unità di misura è, almeno in linea di principio, arbitraria. Infatti, si potrebbero definire tante unità di misura per quante sono le grandezze di interesse della fisica. Questo approccio era, appunto,

Tabella 1.1: Grandezze fondamentali del Sistema Internazionale

Grandezza	Nome	Simbolo
lunghezza	metro	m
massa	kilogrammo	kg
tempo	secondo	s
corrente elettrica	ampere	A
temperatura	kelvin	K
quantità di sostanza	mole	mol
intensità luminosa	candela	cd

quello seguito in alcuni sistemi metrici di vecchio tipo, dove, per esempio, le unità di lunghezza, area e volume erano scelte indipendentemente l'una dall'altra. All'estremo opposto, sarebbe possibile definire un'unica unità fondamentale, facendo derivare, da questa, tutte le altre. Per esempio, assumendo il secondo come unità fondamentale di intervallo di tempo:

- potremmo definire come unità di lunghezza, lo spazio che la luce percorre nel vuoto in un secondo (la velocità della luce nel vuoto è una costante universale);
- avendo definito spazio e tempo, si potrebbero definire di conseguenza velocità e accelerazione;
- come unità di massa, si potrebbe definire quella che imprime l'accelerazione unitaria a una massa uguale collocata alla distanza unitaria;

e così via. Con tale approccio, tutte le dimensioni si esprimerebbero in funzione del *secondo*. Agli inizi del secolo XIX, si riteneva quasi dogmatico dover esprimere tutte le dimensioni in funzione di tre fondamentali, da scegliersi nel campo meccanico, e quindi dovere assumere tre unità meccaniche quali primitive e, da esse, far dipendere tutte le altre. Questo era d'accordo con l'idea meccanicista che tutti i fenomeni fisici si dovessero spiegare per via cinetica. Ma già verso la fine del XIX secolo, le teorie meccaniciste vennero abbandonate e si riconobbe la convenienza di introdurre, per la descrizione dei fenomeni fisici, altre unità di misura fondamentali come la temperatura, l'intensità luminosa, l'intensità di corrente elettrica, ecc.

### 1.10.1 Il Sistema Internazionale

Il Sistema Internazionale [2] adotta **sette grandezze fondamentali** (Tab. 1.1) e **due supplementari** (Tab. 1.2) con le relative unità e varie grandezze derivate dalle precedenti, con le relative unità.

Esso fu definito dalla XI CGPM (Conferenza Generale Pesi e Misure) nel 1960, ed è stato adottato da molti stati, tra cui l'Italia, allo scopo di superare gli inconvenienti propri dei molteplici sistemi di unità di misura che si erano diffusi nel corso dei secoli.

Infatti, un sistema di unità di misura, per essere efficace, deve rispondere ad una serie di requisiti, tra i quali:

Tabella 1.2: Grandezze supplementari del Sistema Internazionale

Grandezza	Nome	Simbolo
Angolo piano	radiante	rad
Angolo solido	steradiano	sr

**universalità:** il sistema deve essere accettato da tutti (diverse categorie di utenti, tutte le Nazioni, chiunque deve poter accedere ai campioni, ecc.);

**precisione:** il sistema deve dare la possibilità di esprimere il valore di una grandezza con tutta la precisione che la specifica applicazione richiede;

**praticità:** il sistema si deve prestare all'uso pratico senza creare eccessivi problemi di apprendimento e di uso;

**uniformità:** il sistema deve dare la possibilità di ricavare l'ampiezza di un intervallo di valori tramite due letture lungo una scala (i cippi kilometrici lungo le strade sono un esempio di misurazione uniforme);

**coerenza:** il sistema deve dare la possibilità di esprimere qualsiasi grandezza del sistema in funzione delle unità fondamentali, senza far ricorso a costanti o coefficienti.

Una qualsiasi unità del SI deve, quindi, poter essere espressa mediante un monomio del tipo:

$$\text{unità SI} = \text{m}^\alpha \cdot \text{kg}^\beta \cdot \text{s}^\gamma \cdot \text{A}^\delta \cdot \text{K}^\epsilon \cdot \text{cd}^\eta \cdot \text{mol}^\theta \cdot \text{rad}^\lambda \cdot \text{sr}^\mu \quad (1.17)$$

nel quale gli esponenti  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$  possono avere il valore di un numero intero: positivo, negativo o nullo.

### 1.10.2 Definizione delle unità di misura fondamentali

**Lunghezza** Il metro (m) è la lunghezza del tragitto compiuto dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo  $t = 1/299792458$  s. Tale definizione vede l'unità di lunghezza come un'unità dipendente dal tempo. In Italia il metro è attuato mediante i campioni dell'Istituto di Metrologia Gustavo Colonnetti del CNR, a Torino.

**Massa** Il kilogrammo (kg) è la massa del prototipo internazionale, costituito da un cilindro di platino con altezza uguale al diametro, conservato al Pavillon de Breteuil (Sèvres). In Italia il campione del kilogrammo è conservato presso il Ministero dell'Industria, del Commercio e dell'Artigianato (Servizio Metrico), a Roma. Un altro campione è conservato presso l'Istituto di Metrologia Gustavo Colonnetti del CNR, a Torino.

**Tempo** Il secondo (s) è l'intervallo di tempo che contiene 9.192.631.770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione fra i due livelli iperfini dello stato

fondamentale dell'atomo di cesio 133. In Italia il secondo è attuato mediante il campione dell'Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris, a Torino.

**Intensità di corrente elettrica** L'ampere (A) è l'intensità di corrente che, mantenuta costante in due conduttori paralleli rettilinei, di lunghezza infinita, di sezione circolare trascurabile e posti alla distanza di 1 m l'uno dall'altro nel vuoto, produce tra i due conduttori la forza di  $2 \cdot 10^{-7}$  N per ogni metro di lunghezza. In Italia l'ampere è attuato mediante il campione dell'Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris, a Torino.

Definito l'ampere come sopra, è possibile definire anche il valore della permeabilità magnetica nel vuoto  $\mu_0$ . Se infatti ricordiamo che vale:

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} l \quad (1.18)$$

imponendo  $I_1 = I_2 = 1$  A,  $d = 1$  m ed  $F/l = 2 \cdot 10^{-7}$  N, si ottiene per  $\mu_0$  il valore:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H/m}. \quad (1.19)$$

Discendendo direttamente dalla definizione di ampere e da una legge fisica, l'espressione di  $\mu_0$  in (1.19) è nota senza incertezza. Ciò peraltro è vero fintantoche  $\pi$  viene scritto in forma simbolica. Qualora servisse esplicitarne il valore numerico, la sua natura di numero irrazionale darebbe la possibilità di scrivere solo un numero finito di cifre decimali, con un conseguente errore di troncamento che si ripercuoterebbe con pari entità sul valore di  $\mu_0$ .

Proseguendo sulla stessa linea che ci ha consentito di ricavare il valore di  $\mu_0$  possiamo ricavare il valore di  $\epsilon_0$ , costante dielettrica nel vuoto, a partire dalla conoscenza della costante universale  $c$ , velocità della luce nel vuoto:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \Rightarrow \epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0} \text{F/m}. \quad (1.20)$$

**Temperatura termodinamica** Il grado kelvin (K) è la frazione  $1/273,16$  della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua. In Italia la scala termodinamica della temperatura è attuata mediante i campioni dell'Istituto di Metrologia Gustavo Colonnetti del CNR, a Torino.

**Quantità di sostanza** La mole (mol) è la quantità di sostanza di un sistema che contiene un numero di Avogadro di entità elementari (numero di atomi presenti in 0,012 kg di carbonio 12). Le entità elementari devono essere specificate e possono essere atomi, molecole, ioni, elettroni, ecc. ovvero gruppi specificati di tali particelle.

**Intensità luminosa** La candela (cd) è l'intensità luminosa in una data direzione di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza  $540 \cdot 10^{12}$  Hz e la cui intensità energetica in quella direzione è  $1/683$  W/sr. Tale grandezza è, in genere, rappresentata da lampade campioni, alimentate da un valore prefissato di corrente continua. In Italia la candela è attuata mediante il campione dell'Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris, a Torino.

### 1.10.3 Definizione delle unità di misura supplementari

**Angolo piano** Il radiante (rad) è l'angolo piano al centro di una circonferenza che intercetta su di essa un arco di lunghezza uguale a quella del raggio.

**Angolo solido** Lo steradiano (sr) è l'angolo solido al centro di una sfera che intercetta su di essa una calotta di area uguale a quella del quadrato di lato uguale al raggio.

### 1.10.4 Campioni

A ciascuna unità di misura del SI è associato un campione. I requisiti fondamentali richiesti ad un campione sono:

**Stabilità nel tempo** la grandezza realizzata dal campione deve mantenere il più possibile costante nel tempo il suo valore;

**Riproducibilità** il campione deve essere facilmente realizzabile in laboratorio;

**Non influenzabilità** il campione non deve essere perturbato dall'ambiente circostante;

**Confrontabilità** il campione deve essere facilmente comparabile con grandezze ad esso omogenee.

I campioni possono essere classificati in:

**naturali** se riferiti ad un fenomeno fisico;

**artificiali** se basati su prototipi che materializzano la relativa grandezza.

La definizione delle unità di misura del sistema SI, spetta alla **Conferenza Generale dei Pesi e Misure** (CGPM) il cui organo tecnico, il **Bureau International de Poids et Mesures** (BIPM) ha il compito di conservare i campioni materiali delle unità del sistema SI, detti *campioni primari*, e di curare il loro confronto con i campioni realizzati presso i vari laboratori metrologici nazionali, detti *campioni secondari*.

In Italia, le funzioni di istituti metrologici, sono svolte dall'Istituto Metrologico G. Colonnetti di Torino nel campo della meccanica e della termologia; dall'Istituto Elettrotecnico Nazionale G. Ferraris, sempre di Torino, per le misure di tempo, frequenza, per le grandezze elettriche, ottiche ed acustiche. Infine l'ENEA si occupa delle misure nel campo delle radiazioni ionizzanti.

Questi istituti conservano i campioni nazionali delle varie grandezze e procedono, periodicamente, al loro confronto con quelle di altre nazioni e del BIPM. Inoltre essi sono di riferimento, in ambito nazionale, per tutto il settore scientifico ed industriale. Ad esempio, nel settore della produzione industriale, è importantissimo e, spesso prescritto, il rispetto di Norme specifiche del bene che si intende produrre. Per garantire tale requisito, le varie fasi della lavorazione del prodotto devono prevedere apposite operazioni di misurazione a scopo di verifica e collaudo e, gli strumenti di misura devono essere, a loro volta, controllati periodicamente presso un istituto metrologico o in appositi centri autorizzati dagli istituti metrologici stessi.

In Italia, tale servizio è chiamato *Servizio Italiano di Taratura* (SIT) e i centri abilitati a svolgere tale servizio si chiamano Centri SIT. L'operazione di verifica degli strumenti di misura da parte dei centri SIT si chiama *taratura*. L'operazione di taratura intende valutare l'incertezza di misura intrinseca dello strumento in prova mediante confronto con le indicazioni fornite da uno *strumento campione* (di specifiche note e con incertezza di misura trascurabile rispetto a quella dello strumento da tarare). A valle di tale operazione, il centro SIT redige un *certificato di calibrazione* in cui riporta, per più valori della grandezza di prova, gli scostamenti riscontrati tra le indicazioni dello strumento da tarare e quelle dello strumento campione. Il certificato di calibrazione consente di conoscere l'incertezza intrinseca dello strumento tarato e, qualora fossero stati evidenziati contributi sistematici di incertezza, consente di apportare le opportune correzioni alle letture dello strumento stesso. I dati del certificato di taratura saranno tanto più attendibili quanto più recente è stata l'operazione di taratura e quanto più le condizioni ambientali (temperatura, umidità, ecc.) sono prossime a quelle di lavoro.

#### 1.10.4.1 Massa

**Unità di misura della massa:** kilogrammo. Si è convenzionalmente stabilito che un certo blocco di platino iridio, chiamato prototipo internazionale, conservato al BIPM di Sevres avesse massa unitaria. La sua massa è quindi la u.d.m. della massa.

**Campione di massa:** il campione di massa è un campione materiale. Il campione primario di massa è costituito dal blocco di platino/iridio (una lega di platino al 10% di iridio) conservato al Pavillon de Breteuil di Sevres. *Esso ha, per come è definita la u.d.m., incertezza nulla.* Le copie del campione del BIPM costituiscono i campioni primari dei diversi Stati. *Essi hanno incertezze non nulle ( $10^{-9}$ ) in quanto le loro masse non possono essere perfettamente uguali a quella del campione del BIPM.*

#### 1.10.4.2 Tempo

**U.d.m. del tempo:** secondo (Definizione del 1967). Il secondo è il tempo corrispondente a 9.192.631.770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione iperfina da ( $F = 4, MF = 0$ ) a ( $F = 3, MF = 0$ ) dell'atomo di cesio 133 non perturbata da campi esterni.

**Campione di tempo:** il campione di tempo è un campione naturale. La reale implementazione del campione richiede la costruzione di uno strumento entro il quale abbia luogo il fenomeno naturale usato. Agilent Technologies costruisce un orologio atomico a cesio 133, il 5071A primary frequency standard, con il quale è possibile ottenere un segnale la cui frequenza è quella citata nella definizione del secondo. Il processo naturale utilizzato per definire la u.d.m. permette di realizzare un campione *con incertezza minore di  $5 \cdot 10^{-13}$  ed una stabilità a lungo termine migliore di  $10^{-14}$ .*

#### 1.10.4.3 Lunghezza

**U.d.m. della lunghezza:** metro (Definizione del 1983). Il metro è la distanza percorsa, nel vuoto, dalla luce in un intervallo di tempo pari a  $1/299792458$  s. È da notare che

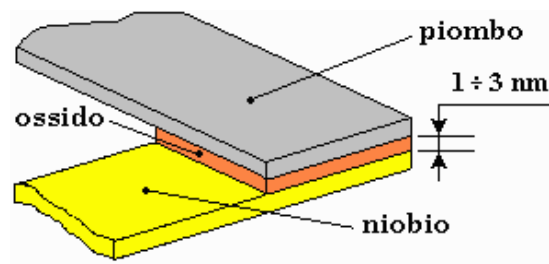


Figura 1.2: Giunzione Josephson

la u.d.m. della lunghezza non è definita in modo autonomo, ma sfrutta la u.d.m. del tempo e la velocità della luce nel vuoto.

**Campione di lunghezza:** il campione di tempo è un campione naturale. La reale implementazione del campione richiede, in modo analogo a quanto riferito per il campione di tempo, la costruzione di uno strumento entro il quale ha luogo il fenomeno naturale usato. Il BIPM costruisce questi strumenti con un processo che permette di realizzare un campione con incertezza di circa  $10^{-9}$

#### 1.10.4.4 Intensità di corrente elettrica

**U.d.m. della intensità di corrente elettrica:** ampere. L'ampere è l'intensità di una corrente elettrica costante che, in due conduttori paralleli, rettilinei, di lunghezza infinita, sezione circolare trascurabile e posti ad 1 metro di distanza, nel vuoto, produrrebbe fra questi conduttori una forza di  $2 \cdot 10^{-7}$  Newton per metro di lunghezza.

**Campione di intensità di corrente:** bilancia elettrodinamica con conduttori di forma tale da permettere la determinazione matematica del legame corrente - azione ponderomotrice. I campioni realizzabili con l'impiego della bilancia elettrodinamica presentano incertezza maggiore di quella che si può raggiungere facendo ricorso all'applicazione della legge di ohm con l'uso di campioni di f.e.m. (basato sull'effetto Josephson) e di resistenza (basato sull'effetto Hall quantistico).

#### 1.10.4.5 Campione di forza elettromotrice basato sull'effetto Josephson

Una giunzione fra due metalli (niobio e piombo) ottenuta mediante l'interposizione di un sottilissimo strato di ossido viene portata alla temperatura di pochi gradi kelvin ( $T \sim 4,2$  K) in ambiente raffreddato con elio liquido (Fig. 1.2). Con l'ausilio di un generatore ausiliario, si inietta in tale giunzione una corrente continua.

In assenza di campi elettromagnetici esterni, la caratteristica tensione/corrente della giunzione è quella indicata in blu nel diagramma in Fig. 1.3:

- se l'intensità di corrente è, in modulo, inferiore al valore di soglia  $I_c$ , non si rileva alcuna differenza di potenziale fra gli elettrodi di piombo e niobio;

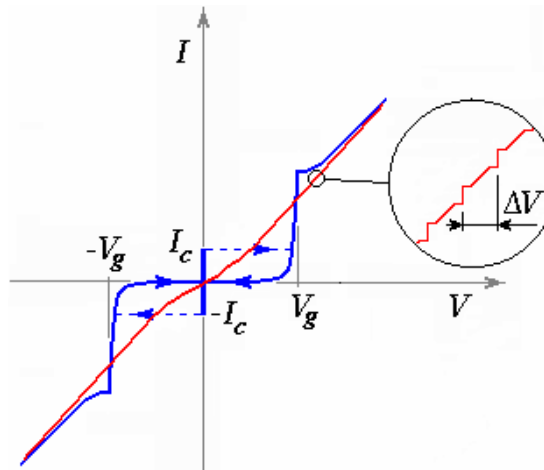


Figura 1.3: Caratteristica I-V

- se l'intensità di corrente supera  $I_c$ , sulla giunzione si instaura una caduta di potenziale pari a  $V_g$ ;
- se si aumenta ulteriormente l'intensità di corrente, il dispositivo presenta un comportamento di tipo resistivo.

Se in tali condizioni si fa incidere sulla giunzione un'onda elettromagnetica, la caratteristica tensione/corrente si modifica ed assume l'andamento pressoché lineare disegnato in rosso. Se, però, si studia più in dettaglio tale andamento, espandendo la scala, si nota che sono presenti dei tratti in cui, per piccole variazioni della corrente di polarizzazione, la tensione resta costante. La tensione  $V$  che individua la distanza tra tali tratti è proporzionale alla frequenza  $f$  dell'onda incidente sulla giunzione e la costante di proporzionalità è esprimibile attraverso costanti universali (la costante di Planck  $h$  e la carica dell'elettrone  $e$ ). In particolare, la tensione di Josephson  $V_j$  corrispondente all' $n$ -esimo tratto della caratteristica risulta espressa dalla seguente relazione:

$$V_j = n \frac{h}{2e} f, \quad (1.21)$$

e definendo la costante di Josephson  $K_j$  come

$$K_j = \frac{2e}{h} \quad (1.22)$$

si ottiene:

$$V_j = \frac{n}{K_j} f \quad (1.23)$$

Dall'analisi dimensionale della precedente relazione si ricava che la costante di Josephson ha dimensioni [Hz/V]. Il valore di  $K_j$ , stimato nel 1990, è indicato con il simbolo  $K_{j,90}$  e vale:

$$K_{j,90} = 483597,9 \text{ GHz/V}. \quad (1.24)$$

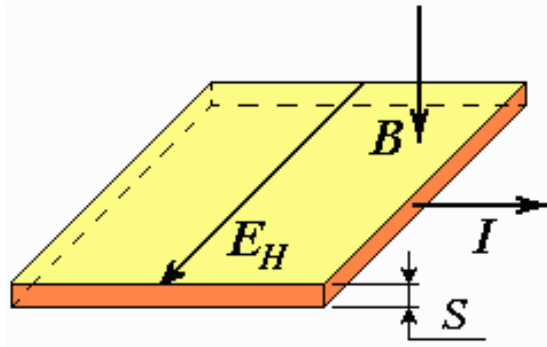


Figura 1.4: Dispositivo di Hall

Dalla caratteristica tensione/corrente, contando i tratti a tensione costante, è possibile misurare la differenza di potenziale ai capi della giunzione per via indiretta, misurando la frequenza dell'onda incidente. Poiché le misure di frequenza sono basate sull'uso di campioni di tempo, notoriamente affetti da incertezze molto ridotte, la determinazione della f.e.m. è praticamente affetta dalla sola incertezza con cui si conosce il valore della costante di Josephson.

#### 1.10.4.6 Campione di resistenza basato sull'effetto Hall quantizzato

Una lamina di materiale semiconduttore, dello spessore  $S$  di pochi nm, è mantenuta alla temperatura termodinamica di circa 4 gradi kelvin (vedi Fig. 1.4). Se si sottopone la superficie di tale semiconduttore ad un campo di induzione magnetica  $B$  (di valore superiore a 10 T) e si inietta tra due facce laterali una corrente di intensità  $I$  nota, si riscontra fra le rimanenti due facce la nascita di una tensione  $E_H$  (*tensione di Hall*) che assume valori definiti dalle costanti universali di Planck  $h$  e della carica dell'elettrone  $e$  tramite la formula:

$$E_H = \frac{h}{ne^2} I \quad (1.25)$$

Da tale espressione si deduce che la tensione di Hall è quantizzata nel senso che può assumere valori in corrispondenza dell'intero  $n$ . In particolare, ponendo:

$$R_K = \frac{h}{e^2} \quad (1.26)$$

si ricava che la tensione di Hall  $E_H$  per  $n = 1$  è pari a:

$$E_H = R_K I \quad (1.27)$$

in cui  $R_K$ , valore della costante di proporzionalità in corrispondenza dello stato quantico  $n = 1$ , è detta costante di Von Klitzing. Come si nota, la costante di Von Klitzing è dimensionalmente omogenea ad una resistenza in quanto coefficiente di proporzionalità fra una corrente ed una tensione elettrica. Nel 1990 il valore della costante di Von Klitzing è stato assunto pari a  $R_{K,90} = 25812,807 \Omega$

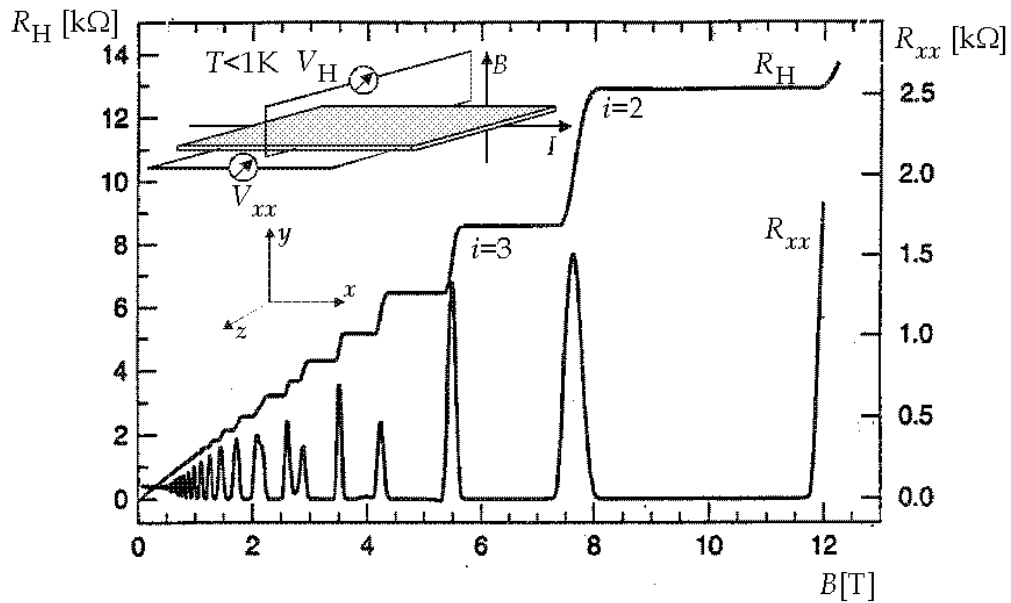


Figura 1.5: Andamento della  $R_K$

#### 1.10.4.7 Campione di capacità basato sulla realizzazione del condensatore calcolabile

Nel 1956 due ricercatori australiani, Lampard e Thompson, hanno dimostrato un teorema che permette di costruire un dispositivo la cui capacità può essere calcolata mediante una sola misura dimensionale [3]. Il teorema di Lampard-Thompson è relativo a condensatori in croce costituiti da un sistema di 4 conduttori cilindrici ad assi paralleli, sezione trasversale di forma qualsiasi e dimensione assiale indefinita, immersi in un dielettrico isotropo ed omogeneo (ad esempio il vuoto) ed accostati a distanza infinitesima in modo da formare un cilindro cavo completamente chiuso. Facciamo riferimento alla Fig. 1.6: uno schermo tubolare ( $E$ ) racchiude quattro elettrodi cilindrici (il cui diametro non influisce sul valore di capacità che dovremo individuare) e due ulteriori elettrodi cilindrici ( $F$ ) e ( $G$ ) che risultano allineati sullo stesso asse e separati da una distanza pari ad  $a$ . Chiamiamo  $C_{13}$  la capacità che si crea, per unità di lunghezza degli elettrodi, fra gli elettrodi 1 e 3 quando gli elettrodi 2 e 4 sono collegati allo schermo  $E$ . Analogamente chiamiamo  $C_{24}$  quella che nasce, per unità di lunghezza degli elettrodi, fra gli elettrodi 2 e 4 quando gli elettrodi 1 e 3 sono collegati allo schermo  $E$ . Le capacità  $C_{13}$  e  $C_{24}$  sono dette capacità incrociate specifiche e per esse, nel vuoto, vale la relazione:

$$\frac{\pi C_{13}}{e \epsilon_0} + \frac{\pi C_{24}}{e \epsilon_0} = 1 \quad (1.28)$$

Nel caso in cui le due capacità incrociate specifiche abbiano lo stesso valore questo

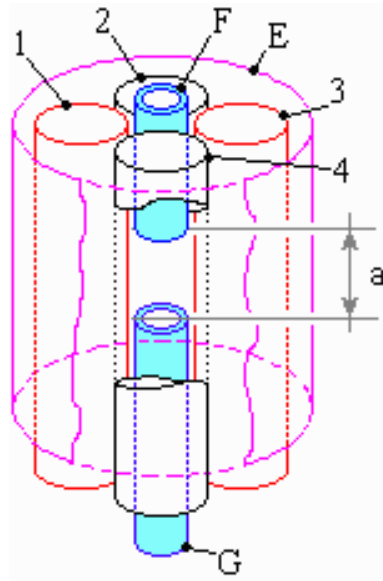


Figura 1.6: Schema del condensatore calcolabile

risulta:

$$C = C_{13} = C_{24} = \frac{\ln 2}{\pi} \epsilon_0 \quad (1.29)$$

che, nel vuoto, vale circa 2 pF/m (il valore esatto risulta di 1,95354904 pF/m). Il valore di capacità del condensatore calcolabile risulta infine dato dal prodotto di  $C$  per  $a$ . In realtà le inevitabili imperfezioni costruttive portano ad un lieve scostamento della capacità effettiva da quella calcolata.

### 1.10.5 I campioni di riferimento nazionali

Sfruttare i soli campioni delle u.d.m. fondamentali per ricavare quelli di tutte le u.d.m. derivate mediante le leggi di coordinamento richiede delle competenze ed uno sforzo tale che a questa soluzione, pur se rigorosa, viene usualmente preferita quella che vede l'uso di un numero ridotto, ma comunque ridondante, di campioni: in Italia si è scelto di realizzare 25 campioni. La Tab. 1.3 seguente riporta l'elenco di tali campioni nazionali, il nominativo dell'Istituto responsabile della sua conservazione, la incertezza relativa.

### 1.10.6 Normalizzazione internazionale e nazionale

Possiamo dedurre, da quanto visto, che esiste un certo numero di raccomandazioni e di Norme a cui bisogna attenersi scrupolosamente quando si opera nel settore delle misure. Tali Norme hanno per oggetto i campioni di misura, le apparecchiature di misura e

Tabella 1.3: Campioni nazionali e incertezze relative associate

Grandezza	U.d.m.	Simbolo	Istituto	Incertezza del valore
lunghezza	metro	m	IMGC	$\pm 3,4 \cdot 10^{-10}$ a 1 m
massa	kilogrammo	kg	IMGC	$\pm 8 \cdot 10^{-9}$ a 1 kg
tempo	secondo	s	IEN	$\pm 3 \cdot 10^{-13}$ per $t > 10^5$ s
corrente elettrica	ampere	A	IEN	$\pm 1,5 \cdot 10^{-6}$ da 100 $\mu$ A a 1 A
temperatura	kelvin	K	IMGC	da $\pm 0,1$ mK a $\pm 3,4$ K (assoluta) tra 24,6 mK e 2500 K
intensità luminosa	candela	cd	IEN	$\pm 5 \cdot 10^{-3}$ da 100 cd a 500 cd
Angolo piano	radiante	rad	IMGC	$\pm 0,24$ $\mu$ rad (assoluta)
Massa volumica (densità)	kilogrammo al metro cubo	kg/m <sup>3</sup>	IMGC	$\pm 7 \cdot 10^{-7}$ a 2330 kg/m <sup>3</sup>
Portata in massa	Kilogrammo al secondo	kg/s	IMGC	$\pm 4 \cdot 10^{-4}$ da 0,2 kg/s a 5 kg/s
Forza	newton	N	IMGC	$\pm 2,5 \cdot 10^{-5}$ da 2 N a 100 kN
Pressione	pascal	Pa	IMGC	da $\pm 5 \cdot 10^{-6}$ a $\pm 5 \cdot 10^{-4}$ da 100 Pa a 1 GPa
Pressione sonora	pascal	Pa	IEN	$\pm 6 \cdot 10^{-6}$ da 0,3 Pa a 1 Pa
Potenza elettrica	watt	W	IEN	$\pm 2 \cdot 10^{-6}$ da 1 V a 10 V e da 100 $\mu$ A a 1 A
Tensione elettrica	volt	V	IEN	$\pm 5 \cdot 10^{-7}$ da 1 V a 10 V
Intensità di campo elettrico	volt al metro	V/m	IEN	$\pm 1,5 \cdot 10^{-3}$ da 10 V/m a 60 kV/m
Resistenza elettrica	ohm	$\Omega$	IEN	$\pm 3 \cdot 10^{-7}$ da 1 $\Omega$ a 10 k $\Omega$
Capacità elettrica	farad	F	IEN	$\pm 5 \cdot 10^{-7}$ da 10 pF a 1 nF
Flusso di induzione magnetica	weber	Wb	IEN	$\pm 1,5 \cdot 10^{-3}$ da 1 $\mu$ Wb a 10 mWb
Induzione magnetica	tesla	T	IEN	$\pm 3 \cdot 10^{-3}$ da 1 mT a 25 mT
Induttanza	henry	H	IEN	$\pm 2 \cdot 10^{-5}$ da 1 mH a 1 H
Flusso luminoso	lumen	lm	IEN	$\pm 6 \cdot 10^{-3}$ da 2000 lm a 3000 lm
Attività (dei radionuclidi)	becquerel	Bq	ENEA	da $\pm 1 \cdot 10^{-3}$ a $\pm 3 \cdot 10^{-2}$ da 1 kBq a 20 kBq
Dose assorbita	gray	gray	ENEA	$\pm 5 \cdot 10^{-3}$ da 0,1 a 30 in grafite
Densità di flusso di neutroni	neutroni al secondo al metro quadrato	/(s·m <sup>2</sup> )	ENEA	$\pm 3,7 \cdot 10^{-3}$ per neutroni veloci
Esposizione	gray al kilogrammo	/kg	ENEA	da $\pm 5 \cdot 10^{-3}$ a $\pm 1 \cdot 10^{-2}$ da $3 \cdot 10^{-7}$ /kg a 0,4 /kg

©Aldo Baccigalupi

Tabella 1.4: Prefissi usati nel SI

Prefisso	Simbolo	Valore	Prefisso	Simbolo	Valore
yocto	y	$10^{-24}$	yotta	Y	$10^{24}$
zepto	z	$10^{-21}$	zetta	Z	$10^{21}$
atto	a	$10^{-18}$	exa	E	$10^{18}$
femto	f	$10^{-15}$	peta	P	$10^{15}$
pico	p	$10^{-12}$	tera	T	$10^{12}$
nano	n	$10^{-9}$	giga	G	$10^9$
micro	$\mu$	$10^{-6}$	mega	M	$10^6$
milli	m	$10^{-3}$	kilo	k	$10^3$
centi	c	$10^{-2}$	hecto	h	$10^2$
deci	d	$10^{-1}$	deca <sup>a</sup>	da	$10^1$

<sup>a</sup>Negli USA, è spesso usato il termine 'deka'.

i metodi di misura. A tale normalizzazione provvedono appositi organi nazionali ed internazionali. In campo elettrico, l'Ente preposto alla normalizzazione internazionale è la Commissione Elettrotecnica Internazionale (addetta alla pubblicazione delle Norme IEC) e, in sede nazionale, opera il Comitato Elettrotecnico Italiano (addetto alla pubblicazione delle Norme CEI). Le Norme IEC costituiscono norme generali, in materia di definizioni, modalità di prova, criteri di collaudo, ecc., che formano la base delle norme nazionali. Alcune Norme CEI, di interesse produttivo, sono trasferite a leggi di Stato. La rispondenza degli strumenti alle norme nazionali è, in genere, indicata con un apposito contrassegno (marchio CEI). È utile ricordare che le unità di misura elettriche, i cui nomi derivano da quelli di grandi fisici del passato (e.g. Ampere, Joule, Volta, Henry, etc.), quando sono indicate per esteso, vanno usate con l'iniziale minuscola e sono indeclinabili (e.g. in inglese non prendono la s al plurale).

## 1.11 Legge della propagazione delle incertezze

Sebbene valida da un punto di vista storico, e ancora utilizzata in alcuni ambiti industriali, la trattazione dell'errore ha lasciato da tempo posto alla trattazione dell'incertezza, più corretta da un punto di vista formale perché assume come punto di partenza non l'esistenza di un valore vero ma di una distribuzione di valori. Nella Appendice A, a cui si rimanda per un approfondimento, vengono richiamati alcuni concetti fondamentali di statistica. In particolare, viene mostrato che di una grandezza  $x$  che assume valori secondo una determinata distribuzione, quello più rappresentativo è la media statistica  $\mu = E[x]$ , perché essa minimizza l'errore medio quadratico fra la grandezza  $x$  e qualsiasi altro stimatore (vedi (A.21) a pag. 144). Come per l'errore, si pone anche per la trattazione in termini probabilistici il problema di determinare l'incertezza nelle misure indirette (vedi [?, 4]).

Un primo approccio potrebbe essere quello di determinare la distribuzione di  $y$  a partire dalla conoscenza delle distribuzioni di  $x_i$  e della funzione  $f(\cdot)$ , e ricavare  $\mu_y$  e  $\sigma_y$  applicando le definizioni in (A.12) a pag. 142. Tuttavia, quand'anche le distribuzioni fossero note, solitamente il calcolo della distribuzione di  $y$  è laborioso e spesso si può effettuare solo per via numerica.

Nel seguito affronteremo il problema in un modo alternativo: partendo dalla relazione funzionale (1.5), otterremo una stima  $y_e$  della grandezza  $y$  tramite le stime  $x_{i,e} = E[x_i]$  delle grandezze  $x_i$  e daremo una formula per la valutazione dell'incertezza di tale stima a partire dalle incertezze  $u(x_i)$ .

Supponiamo innanzitutto che la (1.5) possa essere linearizzata intorno alle stime  $x_{i,e}$ , così da avere il seguente modello:

$$y_l = f(x_{1,e}, \dots, x_{n,e}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - x_{i,e}), \quad (1.30)$$

nella quale le derivate parziali sono calcolate nei punti  $x_i = x_{i,e}$ , anche se per brevità tale indicazione verrà omessa nel seguito.

La migliore stima del modello linearizzato è  $y_{l,e} = E[y_l] = \mu_{y_l}$ , che è pari a:

$$y_{l,e} = E[y_l] = E[f(x_{1,e}, \dots, x_{n,e})] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} E[(x_i - x_{i,e})] = f(x_{1,e}, \dots, x_{n,e}), \quad (1.31)$$

dal momento che  $E[(x_i - x_{i,e})] = 0$ . Pertanto è:

$$\boxed{y_{l,e} = f(x_{1,e}, \dots, x_{n,e})}, \quad (1.32)$$

che ci dice che se la  $y$  si può linearizzare intorno alle  $x_{i,e}$ , allora la stima del misurando  $y$  è uguale alla funzione  $f(\cdot)$  valutata nei punti corrispondenti alle stime delle singole variabili  $x_i$ . Qual è l'errore che commetto nell'approssimare  $y_l$  con la sua stima  $y_{l,e}$ ? Quanto dista mediamente una realizzazione di  $y_l$  dalla sua media? In altre parole, qual è l'incertezza associata a  $y_l$ ? Calcoliamo allora l'errore quadratico medio fra la grandezza linearizzata  $y_l$  e la sua stima  $y_{l,e}$ , ovvero la varianza di  $y_l$ :

$$E[(y_l - y_{l,e})^2] = E\left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - x_{i,e})\right)^2\right]. \quad (1.33)$$

Il quadrato della somma all'interno dell'operatore di media statistica si espande nella somma dei quadrati dei singoli termini, più la somma dei doppi prodotti dei termini con indice  $i \neq j$ :

$$E[(y_l - y_{l,e})^2] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 E[(x_i - x_{i,e})^2] + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} E[(x_i - x_{i,e})(x_j - x_{j,e})]. \quad (1.34)$$

Ricordando quanto detto in Appendice A, gli errori quadratici medi presenti nella prima sommatoria a secondo membro della (1.34) corrispondono alle incertezze associate a  $x_i$ , mentre i termini mutui  $E[(x_i - x_{i,e})(x_j - x_{j,e})]$  corrispondono ai termini di covarianza, che sono diversi da zero solo se le misure sono correlate. Possiamo perciò riscrivere  $E[(x_i - x_{i,e})^2] = u^2(x_i)$ ,  $E[(x_i - x_{i,e})(x_j - x_{j,e})] = u(x_i, x_j)$ , e la formula in (1.34) diventa:

$$u^2(y_l) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j), \quad (1.35)$$

che è nota come *legge di propagazione delle incertezze*.

### 1.11.1 Metodologie per la valutazione dell'incertezza

Con la (1.35) abbiamo uno strumento che ci consente di conoscere l'incertezza sulla misura indiretta tramite la conoscenza dell'incertezza sulle grandezze misurate per via diretta e la funzione che le lega al misurando.

Per valutare le diverse componenti che concorrono a determinare l'incertezza  $u(x_i)$  della stima  $x_{i,e}$  si possono applicare due metodi, così come indicato dalla norma specifica [5], la cui applicazione è mostrata in [6]:

- **Metodologia di Tipo A:** è quella metodologia nella quale l'incertezza viene valutata per via statistica mediante l'esecuzione di misure ripetute;
- **Metodologia di Tipo B:** è quella metodologia in cui le informazioni sull'incertezza provengono per altra via, non attraverso misure ripetute: conoscenza pregressa, informazioni ottenute da specifiche strumentali, risultati di precedenti misurazioni sono un esempio di come si possa effettuare una valutazione di tipo B.

#### 1.11.1.1 Valutazione di tipo A

Qualora si voglia e si possa effettuare un insieme di  $M$  misure ripetute nelle stesse condizioni, è possibile ottenere una stima  $x_{i,e}$  attraverso la *media campionaria* delle  $M$  misure, secondo quanto riportato dalla teoria presentata in Appendice A. Pertanto, la stima  $x_{i,e}$  sarà  $x_{i,e} = \bar{x}$  e l'incertezza su tale stima sarà pari allo scarto tipo sperimentale  $u(\bar{x}) = s(x_i) / \sqrt{M}$ . Come esempio, supponiamo di avere  $M$  misure  $V_1, V_2, \dots, V_M$  della differenza di potenziale  $V$  ai capi di una resistenza. La stima del valore della tensione, ovvero il valore che indicheremo come risultato della misurazione, e l'incertezza legata

a tale stima saranno:

$$\bar{V} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M V_i \quad (1.36)$$

$$u_A = u(\bar{V}) = \sqrt{\frac{1}{M(M-1)} \sum_{i=1}^M (V_i - \bar{V})^2} \quad (1.37)$$

### 1.11.1.2 Valutazione di tipo B

Può succedere spesso che ci si debba affidare ad altre informazioni per determinare il valore da assegnare a  $u(x_i)$ , e che essa venga stimata attraverso la varianza di una distribuzione ottenuta sulla base delle informazioni disponibili. Tali informazioni possono essere ottenute, ad esempio, da fogli di specifica degli strumenti, o da ipotesi fatte sul comportamento dei dati di misura.

Ad esempio, potremmo avere a disposizione l'errore massimo relativo  $\epsilon$  dichiarato da un costruttore sul valore di una resistenza di valore nominale  $R$ . Tale informazione deve essere in qualche modo trasformata in un'informazione di varianza di una distribuzione. L'approccio più semplice è quello di associare al valore nominale una distribuzione rettangolare di semi-ampiezza pari a  $\epsilon$ , la cui varianza è pari a:

$$u_B = \frac{\epsilon}{\sqrt{3}}. \quad (1.38)$$

È importante sottolineare che su ogni grandezza misurata  $x_i$  si devono valutare tutti i contributi che concorrono a determinare il valore globale di incertezza associata a quella misura. Alcuni contributi potranno essere valutati solo tramite un approccio di tipo A, altri solo mediante un approccio di tipo B. Una volta ottenuti tutti i contributi, seguendo quanto dice la norma [5] essi vanno combinati in un'unica espressione mediante la formula:

$$u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}. \quad (1.39)$$

### 1.11.2 Fattore di copertura $k$

Torniamo alla (1.35). Una volta ottenute le incertezze  $u(x_i)$ , e anche le covarianze  $u(x_i, x_j)$  se le misure sono correlate, è possibile determinare l'incertezza  $u(y)$  da associare alla stima di  $y$ . Essa corrisponde alla varianza della distribuzione dei dati di misura, e ad essa corrisponderà una determinata probabilità con la quale ci dobbiamo aspettare di trovare il valore vero all'interno dell'intervallo di semi-ampiezza  $u(y)$ . Se la distribuzione dei dati di misura è gaussiana, come di solito ci si aspetta in considerazione della dipendenza del misurando  $y$  da un numero elevato di grandezze ciascuna delle quali fornisce il proprio contributo all'incertezza complessiva, le corrispondenze

fra ampiezza degli intervalli e probabilità associate è la seguente:

$$P(\mu \in [x_e - \sigma; x_e + \sigma]) \sim 68.3\% \quad (1.40)$$

$$P(\mu \in [x_e - 2\sigma; x_e + 2\sigma]) = 95.45\% \quad (1.41)$$

$$P(\mu \in [x_e - 3\sigma; x_e + 3\sigma]) = 99.73\% \quad (1.42)$$

Spesso è importante riportare l'indicazione dell'incertezza relativa ad un intervallo che corrisponde ad una probabilità maggiore del 68%. In altre parole, è necessario applicare all'incertezza un fattore di copertura  $k \neq 1$ , e pari solitamente a  $k = 2$  o  $k = 3$ . L'incertezza così ottenuta  $U(y) = k u(y)$  è detta **incertezza estesa**, e nel riportarne il valore nel risultato della misurazione è sempre importante indicare il coefficiente di copertura applicato, per evitare di generare fraintendimenti nell'interpretazione dei risultati.

## 1.12 Esempio numerico

Come esempio dell'applicazione della legge di propagazione dell'incertezza, presentiamo una misura di potenza dissipata in regime continuo su una resistenza di valore ohmico  $R$ . Come è noto dall'elettrotecnica, esistono tre diverse relazioni per ottenere l'informazione desiderata: 1)  $P = VI$ ; 2)  $P = V^2/R$ ; 3)  $P = I^2R$ . Nel seguito effettueremo la misura secondo tutti e tre i metodi, al fine di verificare quale dei tre, con le specifiche strumentali che indicheremo di seguito, dia i risultati con incertezza più bassa. L'esercizio sarà svolto nelle seguenti ipotesi:

1. Il valore nominale della resistenza è  $R = 150 \Omega$ , e in base alle specifiche fornite dal costruttore, il suo valore è noto con un errore massimo relativo  $\varepsilon = 0.05\%$ ;
2. Sia per le misure di tensione, sia per la misure di corrente, stimeremo il valore del misurando mediante misure ripetute con  $N = 36$  valori di tensione e di corrente.
3. Le specifiche di *accuracy* del voltmetro e dell'amperometro sono le seguenti:

$$U_v = 30 \text{ ppm } V_l + 5 \text{ ppm } V_R \quad (1.43)$$

$$U_i = 500 \text{ ppm } I_l + 800 \text{ ppm } I_R, \quad (1.44)$$

dove  $V_l$  e  $I_l$  sono i valori letti dal voltmetro e dall'amperometro rispettivamente,  $V_R$  e  $I_R$  sono i *range*, ovvero le portate<sup>1</sup> degli strumenti usate nelle misure correnti, nel nostro caso pari a  $V_R = 10 \text{ V}$  e  $I_R = 100 \text{ mA}$ , e ppm *indica parti per milione*, ovvero  $10^{-6}$ . Entrambe le specifiche sono fornite con un fattore di copertura  $k = 4$ .

Procediamo a questo punto con l'applicazione di ciascuno dei tre metodi.

<sup>1</sup>Il concetto di portata è stato introdotto al §1.7 e sarà meglio definito in §2.3 e corrisponde alla massima ampiezza della grandezza da misurare con determinate impostazioni dello strumento.

### 1.12.1 $P = VI$

Acquisendo 36 valori di tensione e di corrente, e ricavandone il valore medio campionario e deviazione standard campionaria mediante la (1.36), otteniamo:

$$\bar{V} = 11.50052929906782 \dots \text{ V} \quad (1.45)$$

$$s_V = 0.002797843082521308 \dots \text{ V.} \quad (1.46)$$

L'incertezza di tipo A<sup>2</sup> è ottenuta dal calcolo dello *scarto tipo sperimentale*:

$$u_A = \frac{s_V}{\sqrt{36}} = 0.0004663071804202181 \dots \text{ V} \quad (1.47)$$

Per valutare il contributo all'incertezza dato dal voltmetro, possiamo fare riferimento alle specifiche strumentali riportate in (1.43) e ottenere:

$$4u_B = 30 \cdot 10^{-6} \bar{V} + 5 \cdot 10^{-6} 10 = 0.0003950158789720345 \dots \text{ V.} \quad (1.48)$$

A questo punto, è facile ottenere l'incertezza associata alla misura di tensione utilizzando la (1.39):

$$u(V) = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = 0.0004766494865742088 \dots \text{ V} \quad (1.49)$$

Possiamo procedere analogamente per il calcolo della stima della corrente e la valutazione della sua incertezza, ottenendo:

$$\bar{I} = 0.07669469888875015 \dots \text{ A} \quad (1.50)$$

$$s_I = 0.0002281023326640961 \dots \text{ A,} \quad (1.51)$$

da cui otteniamo:

$$u_A = \frac{s_I}{\sqrt{36}} = 0.00003801705544401602 \dots \text{ A.} \quad (1.52)$$

Il contributo dell'amperometro, calcolato secondo la tipologia B, è invece:

$$4u_B = 500 \cdot 10^{-6} \bar{I} + 800 \cdot 10^{-6} 100 \cdot 10^{-3} = 0.0001183473494443751 \dots \text{ A.} \quad (1.53)$$

Ne risulta un'incertezza da associare alla misura di corrente pari a:

$$u(I) = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = 0.00004817341019343764 \dots \text{ A.} \quad (1.54)$$

Note le stime di tensione  $V$  e corrente  $I$ , e le relative incertezze, è possibile usare la propagazione delle incertezze e ottenere la stima della potenza  $P$  e l'associata incertezza  $u(P)$ , eventualmente con fattore di copertura  $k \neq 1$ .

<sup>2</sup>A rigore il termine incertezza di tipo A e B è scorretto, in quanto sono i metodi per la valutazione a essere di tipo A o B. Tuttavia, per semplicità spesso si commette un piccolo abuso, e anziché dire *contributo di incertezza valutato mediante metodologia di tipo A* si ricorre alla forma ridotta *incertezza di tipo A*. Nel seguito useremo indifferentemente l'una o l'altra locuzione, ritenendo spesso superfluo l'uso della versione corretta ma più estesa.

La stima della potenza è banalmente:

$$P = \bar{V}\bar{I} = 0.8820296316532551 \dots W, \quad (1.55)$$

mentre l'incertezza composta ad essa associata è:

$$u(P) = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial V} u(V)\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial I} u(I)\right)^2} = 0.0005552244788288262 \dots W. \quad (1.56)$$

La norma indica che l'incertezza debba essere indicata con **al più due cifre significative**, arrotondando sempre per eccesso l'ultima. Il peso dell'ultima cifra dell'incertezza determinerà poi dove il risultato della misura debba essere troncato<sup>3</sup>. Otteniamo perciò:

$$u(P) = 0.00056 W, \quad (1.57)$$

e di conseguenza:

$$P = 0.88202 W. \quad (1.58)$$

Indicheremo perciò il risultato della nostra misurazione come

$$P = 0.88202 \pm 0.00056 W. \quad (1.59)$$

Qualora invece avessimo dovuto usare un fattore di copertura diverso da  $k = 1$ , avremmo dovuto prima applicare tale fattore e successivamente le regole indicate dalla norma per la corretta scrittura del risultato. Ad esempio, con  $k = 3$  avremmo:

$$u(P) = 3 \cdot 0.0005552244788288262 \dots = 0.001665673436486479 \dots = 0.0017 W, \quad (1.60)$$

e quindi

$$\boxed{P = 0.8820 \pm 0.0017 W}. \quad (1.61)$$

Notiamo che sebbene la cifra meno significativa del risultato sia pari a zero, essa deve comunque essere riportata nel risultato finale in quanto è una cifra il cui valore è stato determinato ed è significativo perché di peso uguale a quello consentito dall'incertezza.

### 1.12.2 $P = V^2/R$

Supponendo per comodità di utilizzare le stesse misure di tensione ottenute con il metodo precedente, resta da valutare l'incertezza associata al valore di resistenza. Per determinarla, facciamo riferimento alle specifiche fornite dal costruttore, che dichiara un errore massimo relativo sul valore nominale pari allo 0.05%. L'informazione così dichiarata può essere ricondotta alla conoscenza dell'incertezza passando attraverso

<sup>3</sup>Troncato, e non arrotondato. Ciò perché se, ad esempio, ho determinato che l'incertezza ha un contributo sulla quarta cifra decimale, le cifre del risultato dalla quinta cifra decimale in poi non hanno alcun significato.

l'attribuzione di una distribuzione uniforme di semi-ampiezza pari a  $\varepsilon$ . Pertanto, avremo

$$u(R) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\varepsilon}{100} 150 = 0.0433012701892219 \dots \Omega. \quad (1.62)$$

Ne discende:

$$P = \frac{\bar{V}^2}{R} = 0.8817478277247820 \dots W, \quad (1.63)$$

e

$$u(P) = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial V} u(V)\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial R} u(R)\right)^2} = 0.0002648245236072581 \dots W. \quad (1.64)$$

Il risultato finale sarà pertanto:

$$\boxed{P = 0.88174 \pm 0,00080 W}. \quad (1.65)$$

Il particolare valore dell'incertezza ottenuto in questo caso ci consente di fare alcune considerazioni sulle cifre significative. Si sarebbe infatti portati a cancellare lo zero finale che compare nel risultato dell'incertezza. **Ciò è sbagliato!** perché bisogna tener conto del fatto che sebbene lo zero compaia come ultima cifra decimale e quindi dal punto di vista matematico con peso nullo, dal punto di vista misuristico esso ci ricorda che l'incertezza è stata determinata fino alla quinta cifra decimale, cosa che tra l'altro ci permette di scrivere il valore della potenza con lo stessa risoluzione. Pertanto, se l'ultima cifra dell'incertezza è stata determinata pari a zero, essa dovrà essere comunque riportata nei certificati di misura, perché essa contiene comunque un'informazione di primaria importanza!

### 1.12.3 $P = I^2 R$

Per il terzo metodo, facciamo riferimento ai valori di corrente già misurati e alle specifiche per la resistenza già richiamate, ottenendo:

$$P = \bar{I}^2 R = 0,8823115256454081 W, \quad (1.66)$$

e

$$u(P) = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial I} u(I)\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial R} u(R)\right)^2} = 0,001137281442319458 W. \quad (1.67)$$

Nel complesso, avremo:

$$\boxed{P = 0.8823 \pm 0,0035 W}. \quad (1.68)$$

### 1.12.4 Conclusioni e commenti

Per confrontare i tre metodi, riportiamo i risultati ottenuti nei diversi casi:

$$\begin{aligned} P &= 0.8820 \pm 0.0017 \text{ W} \\ P &= 0.88174 \pm 0.00080 \text{ W} \\ P &= 0.8823 \pm 0.0035 \text{ W} \end{aligned} \quad (1.69)$$

e diamone una rappresentazione grafica come quella in Fig. 1.7. In essa si osserva che i tre metodi danno risultati che, considerando l'intervallo esteso con  $k = 3$ , hanno intersezione non nulla, e a tale intervallo è assegnata una certa probabilità di contenere il valore *vero* del misurando. In una situazione di questo tipo si dice che le misure sono *compatibili*. Diversamente, se gli intervalli entro cui si ritiene di trovare il valore vero per ciascuno dei tre metodi hanno intersezione nulla, le misure sono *incompatibili*. Ciò indica due possibilità: o non si è tenuto in giusto conto, ad esempio, la presenza di un offset che potrebbe aver spostato il risultato delle misurazioni di tensione o corrente, o che tra le misure effettuate con i tre metodi si è verificata la variazione di uno o più parametri esterni (ad esempio la temperatura) i cui effetti sono stati quelli di una variazione delle misure tale da richiederne la ripetizione.

Facciamo notare, lasciando allo studente la semplice dimostrazione, che la compatibilità delle misure non gode della proprietà transitiva: due misure ciascuna compatibile con una terza non devono necessariamente essere compatibili fra di loro.

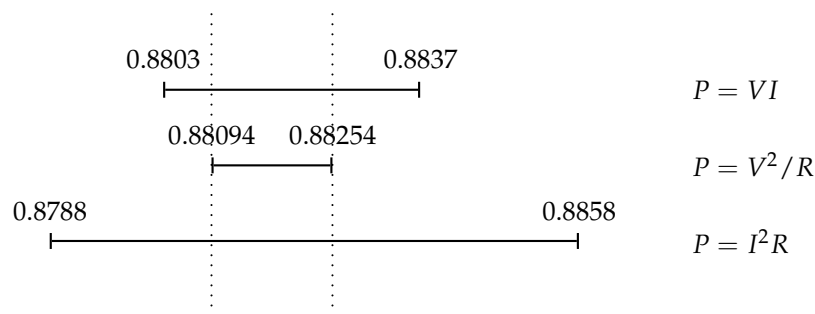


Figura 1.7: Confronto fra metodi di misura

## 1.13 Approccio deterministico

Sebbene la norma richieda un approccio di tipo probabilistico per la valutazione dell'incertezza, in campo industriale è spesso ancora usato un approccio che fa riferimento alle tolleranze, intese come gli errori massimi che vengono commessi nella misurazione di una grandezza. Tale esigenza si verifica ad esempio quando in un contratto fra committente e fornitore si definiscono le specifiche di un prodotto in termini di tolleranza

rispetto ad un valore nominale: ad esempio, ci si accorda sul fatto che lo spessore nominale di una lastra d'acciaio debba essere di 3 mm con una tolleranza di 0,1 mm, ovvero che lo spessore dovrà essere compreso fra 2,9 mm e 3,1 mm.

Quello della tolleranza è un approccio del tutto analogo a quello dell'errore, per cui non ripeteremo cose già note. Presenteremo solo la legge, uguale a quella della propagazione degli errori ma con simboli diversi, che ci permette di ottenere informazioni sulla tolleranza  $\Delta y$  di una grandezza misurata per via indiretta a partire dalle tolleranze di grandezze primarie  $\Delta x_i$ :

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i. \quad (1.70)$$

Ovviamente, la relazione appena scritta può essere scritta anche in termini relativi  $\Delta y/y$ , che nel caso in cui la  $y$  sia espressa solo tramite prodotti e divisioni da luogo all'espressione:

$$\frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i}{x_i}, \quad (1.71)$$

grazie alla quale possiamo scrivere l'incertezza relativa come somma di incertezze relative della grandezze primarie.

### 1.13.1 Incertezza e tolleranza nelle specifiche industriali

C'è tuttavia da tener conto di un aspetto importante che si presenta quando è necessario verificare se le specifiche di tolleranza siano rispettate o no. Supponiamo infatti che periodicamente dalla produzione venga misurato lo spessore di un certo numero di lastre d'acciaio. Il metodo di misura avrà una sua incertezza che dovrà essere tenuta in conto nel determinare se lo spessore verifica le specifiche fissate in fase contrattuale. La situazione cioè è quella mostrata in Fig. 1.8, in cui oltre all'intervallo tra il *Limite Inferiore di Specifica* (LIS) e il *Limite Superiore di Specifica* (LSS) è necessario tenere in conto anche l'incertezza  $U_y$ , in particolare se i valori misurati sono in prossimità degli estremi dell'intervallo di specifica.

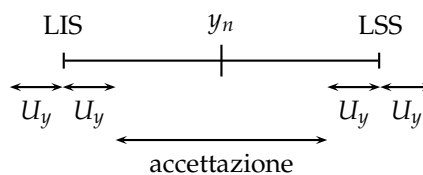


Figura 1.8: Verifica delle specifiche industriali

Infatti, se il valore misurato cade all'interno dell'intervallo e a distanza maggiore di  $U_y$  dall'estremo più vicino, allora possiamo ritenere che la misura rispetti le specifiche,

e definiremo pertanto un *intervallo di accettazione*, meno ampio dell'intervallo di specifica. Al contrario, se la misura cade all'esterno dell'intervallo di specifica e a distanza maggiore di  $U_y$ , dovremo ritenere che essa non rispetti le specifiche fissate. Infine, se la misura cade all'interno dell'intervallo centrato su LIS o LSS e di semiampiezza pari a  $U_y$ , nulla potrò dire sull'effettivo rispetto delle specifiche, ritorvandomi pertanto in una zona di indeterminazione.

### Bibliografia

- [1] "Accuracy and precision," <http://www.flatsurv.com/accuprec.htm>.
- [2] "The international system of units (si)," <http://www.bipm.org/en/si/>.
- [3] G. Zingales, *Misure Elettriche: Metodi e Strumenti*. Torino: UTET, 1992.
- [4] National Institute of Standard and Technology, "Uncertainty of measurement results," <http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty/index.html>.
- [5] ISO-IEC, *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*.
- [6] NIST, "Guidelines for evaluating and expressing the uncertainty of nist measurement results, Tech. Rep. 1297, 1994.



**Parte II**

**Strumentazione**



## Capitolo 2

# Strumentazione Analogica

La strumentazione analogica che di seguito presenteremo è solo una parte di quella usata per le diverse misure nel settore elettrico e elettronico, ma è comunque sufficiente a presentare i principi base della strumentazione impiegata nelle misure di corrente e di tensione. Prima di passare alla descrizione dei diversi strumenti, vale la pena fissare alcuni principi generali a cui ci si deve attenere nella scelta della strumentazione. Tali indicazioni, presentate per la strumentazione analogica, valgono anche per quella numerica.

Cominciamo dagli strumenti di **misura della corrente** (*amperometri*). Lo schema di sinistra in Fig. 2.1 mostra lo schema equivalente secondo Thévenin del circuito di alimentazione di un carico rappresentato mediante la sua resistenza equivalente  $R$ , di cui si vuole misurare la corrente assorbita. Quando non c'è l'amperometro, la cui più semplice raffigurazione è ottenuta mediante la resistenza equivalente  $R_a$ , la corrente che circola è pari a:

$$I = \frac{E_0}{R_0 + R}, \quad (2.1)$$

che diventa:

$$I' = \frac{E_0}{R_0 + R + R_a} \quad (2.2)$$

quando viene inserito l'amperometro in serie al carico  $R$ . Pertanto la corrente che si misura è tanto più vicina a quella che idealmente si vorrebbe misurare quanto più piccola è la resistenza equivalente dell'amperometro  $R_a$ . Analogamente, negli strumenti per la **misura della tensione** (*voltmetri*), la tensione ai capi della resistenza  $R$  in assenza dello strumento è:

$$V = E_0 \frac{R}{R_0 + R} \quad (2.3)$$

che diventa

$$V' = E_0 \frac{R \parallel R_v}{R_0 + R \parallel R_v}. \quad (2.4)$$

Affinché la tensione  $V'$  sia prossima alla tensione  $V$  è necessario che  $R_v$  sia molto maggiore della resistenza  $R$ .

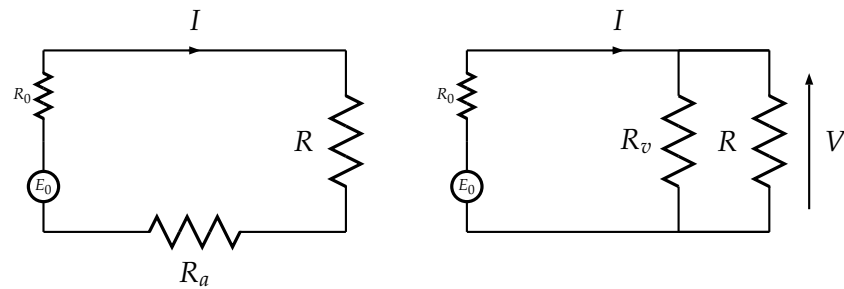


Figura 2.1: Schema equivalente di una misura di corrente (a sinistra) e di tensione (a destra)

L'effetto degli strumenti di misura viene solitamente valutato in termini di autoconsumo: un amperometro dissipa per effetto Joule una potenza pari a:

$$P_d = I^2 R_a, \quad (2.5)$$

potenza che deve essere fornita dal circuito a monte, schematizzato mediante l'equivalente di Thevenin in Fig. 2.1. La (2.5) ci dice che al crescere della portata in corrente dell'amperometro, è necessario ridurre sempre più la resistenza equivalente  $R_a$  affinché l'autoconsumo resti al valore più basso possibile.

Per il voltmetro vale invece:

$$P_d = \frac{V^2}{R_v}, \quad (2.6)$$

che ci dice che al crescere della portata è necessario rendere anche la resistenza interna del voltmetro più grande, in base a considerazioni del tutto analoghe al caso dell'amperometro.

## 2.1 Strumento magnetoelettrico

Lo schema di un *amperometro* magnetoelettrico è riportato in Fig. 2.2. Esso è composto da un magnete permanente, un traferro a sezione circolare e una bobina di sezione rettangolare posta all'interno del traferro e ancorata mediante una molla che consente la rotazione intorno all'asse del traferro. Per questa caratteristica, lo strumento viene anche detto *a bobina mobile*. La bobina è percorsa dalla corrente  $I$  che si vuole misurare, e che interagisce con il campo magnetico statico  $B$  generato dal magnete. A causa della forma del traferro, il campo è radiale verso il centro del traferro. L'interazione si manifesta sotto forma di una forza  $F$  perpendicolare sia alla corrente  $I$  che al campo  $B$  e di intensità:

$$F = B \cdot NI \cdot l, \quad (2.7)$$

dove  $N$  è il numero di spire da cui è composta la bobina e  $l$  la sua altezza. Questa forza imprime alla bobina una rotazione con un braccio pari a  $d/2$ , con  $d$  uguale alla larghezza della spira, di dimensioni praticamente uguali al diametro del traferro. Poichè il

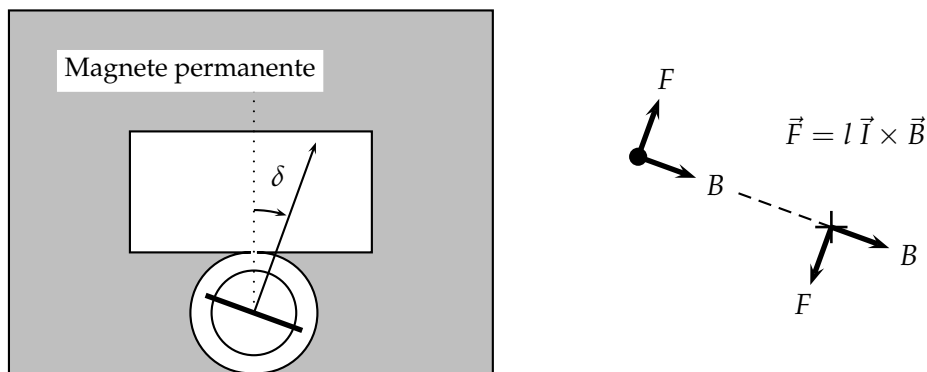


Figura 2.2: Schema del milliamperometro magnetoelettrico

campo  $B$  si mantiene radiale indipendentemente dall'angolo della bobina rispetto alla sua posizione di riposo, la forza  $F$  sarà sempre diretta lungo la tangente al cerchio di rotazione, e di ampiezza costante, e la coppia rotante avrà perciò:

$$C_m = 2F \cdot \frac{d}{2} = B \cdot NI \cdot l \cdot d = k_m I. \quad (2.8)$$

La coppia è dovuta alle due componenti di forza, di ampiezza uguale e che agiscono con lo stesso senso di rotazione (vedi Fig. 2.2).

Alla rotazione si oppone l'azione di richiamo della molla, usata anche per portare la corrente alla bobina. La *coppia resistente*  $C_r$  è proporzionale allo spostamento angolare:

$$C_r = k_r \delta. \quad (2.9)$$

Quando la coppia resistente uguaglia quella motrice, si ha:

$$C_r = C_m \Rightarrow \delta = \frac{BN(ld)}{k_r} I = SI, \quad (2.10)$$

dove  $S$ , detta *sensibilità in corrente* e con unità di misura [div/ $\mu$ A], indica la variazione angolare  $\delta$  causata da una variazione unitaria di corrente.

### 2.1.1 Amperometro

Per evitare eccessivi riscaldamenti della bobina, la corrente massima che può percorrere la bobina è limitata ai mA. È possibile tuttavia aumentare la *portata* dello strumento utilizzando una resistenza di *shunt*, secondo lo schema in Fig. 2.3. Il partitore di corrente realizzato inserendo in parallelo al milliamperometro una resistenza  $R_s$

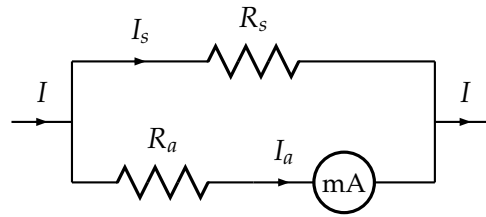


Figura 2.3: Dal milliamperometro all'amperometro

fa sì che la corrente  $I_a$  che circola in  $R_a$  (solo per comodità rappresentata esterna al milli-amperometro) sia pari a:

$$I_a = I \frac{R_s}{R_s + R_a}. \quad (2.11)$$

La resistenza  $R_s$  deve essere di valore tale da portare la corrente  $I_a$  che circola nel milli-amperometro al valore di fondo scala  $I_{FS}$  quando la corrente in ingresso  $I$  assume il valore massimo  $I_{max}$  che si vuole misurare con questo strumento:

$$I_{FS} = I_{max} \frac{R_s}{R_s + R_a} \Rightarrow \boxed{R_s = \frac{I_{FS}}{I_{max} - I_{FS}} R_a} \quad (2.12)$$

Ad esempio, se un amperometro di portata  $I_{FS} = 10 \text{ mA}$ , ha  $R_a = 500 \Omega$ , per misurare una corrente di  $10 \text{ A}$  è necessario usare una resistenza  $R_s = R_a/999 \approx 0.5 \Omega$ .

### 2.1.2 Voltmetro

Lo strumento magnetoelettrico nasce intrinsecamente come milliamperometro. Tuttavia, è possibile impiegarlo per la misura di una tensione inserendo in serie una resistenza  $R_v$  di valore elevato, come mostrato in Fig. 2.4. La corrente  $I$  che circola nella

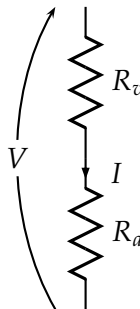


Figura 2.4: Dal milliamperometro al voltmetro

serie di  $R_v$  e  $R_a$  è data da:

$$I = \frac{V}{R_v + R_a}, \quad (2.13)$$

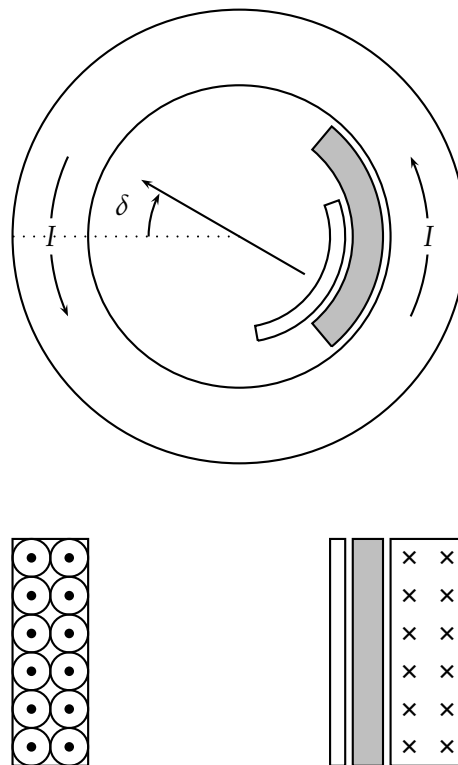


Figura 2.5: Schema dell'amperometro elettromagnetico

e perciò la resistenza necessaria affinché con la tensione massima  $V_{\max}$  da misurare si raggiunga la portata  $I_{FS}$  è pari a:

$$R_v = \frac{V_{\max}}{I_{FS}} - R_a. \quad (2.14)$$

Se, ad esempio, vogliamo creare un voltmetro con portata  $V_{\max} = 100 \text{ V}$  mediante un amperometro con  $I_{FS} = 10 \text{ mA}$  e  $R_a = 500 \Omega$ , abbiamo bisogno di una resistenza pari a  $R_v = 10000 - 500 = 9,5 \text{ k}\Omega$ . La grandezza  $1/I_{FS}$  è espressa in  $[\text{k}\Omega/\text{V}]$  e il suo valore numerico indica di quanti  $\Omega$  debba essere la resistenza addizionale  $R_v$  affinché il voltmetro abbia fondoscala in tensione pari a  $V_{\max}$ .

## 2.2 Strumento elettromagnetico

Lo schema di uno strumento elettromagnetico è illustrato in Fig. 2.5. La corrente da misurare percorre la bobina esterna, genera un campo magnetico che magnetizza i due blocchetti di ferro uno dei quali (colorato in grigio in figura) è fisso, mentre l'altro è mobile. La magnetizzazione del ferro genera una forza di repulsione fra i due blocchetti

la cui entità è riportata su una scala mediante un indice mobile solidale con il blocchetto mobile. La magnetizzazione, e quindi la forza di repulsione, è proporzionale alla corrente che circola nella bobina. Come nello strumento magnetoelettrico, una molla elicoidale genera una coppia antagonista. Poichè però, a differenza dello strumento a bobina mobile, la molla antagonista non è percorsa da corrente, lo strumento elettromagnetico può misurare correnti più elevate.

## 2.3 Caratteristiche degli strumenti

Presentiamo di seguito alcune caratteristiche degli strumenti analogici:

**Portata** È l'indicazione dell'intervallo dei valori rappresentabili dallo strumento con determinate impostazioni. Un amperometro con portata di 10 mA può misurare correnti fra 0 e 10 mA. Nella strumentazione numerica il *range* oltre al valore massimo determina anche il valore minimo rappresentabile;

**Accuracy** è quella caratteristica dello strumento che indica quando il risultato della misurazione dista dal valore vero  $\mu$ . Meno una misura è *accurata* più essa dista dal valore vero  $\mu$ .

**Risoluzione** È la minima differenza fra due grandezze che lo strumento può rilevare. Gli strumenti analogici hanno solitamente una scala graduata suddivisa in tacche, la distanza fra le quali è pari ad un valore noto (ad esempio 1  $\mu$ A). Convenzionalmente, si ritiene che l'occhio umano possa risolvere distanze pari alla metà della distanza fra due tacche successive (la cosiddetta *mezza tacca*), e pertanto tutte le grandezze che distano meno della mezza tacca saranno attribuite alla stessa misura (*errore di apprezzamento*). Nella strumentazione numerica, la risoluzione corrisponde al valore dell'ultima cifra visualizzata. Ad esempio, se sullo schermo compare l'indicazione 11,45743 V la risoluzione di tale misura è pari a 0,00001 V, ovvero 10  $\mu$ V. Facciamo notare che la risoluzione è ben diversa dall'accuracy: uno strumento con risoluzione di 10  $\mu$ V può avere caratteristiche di accuracy tali da dare contributi maggiori della risoluzione. Ad esempio, alcuni strumenti (come il Fluke) hanno accuracy espressa come somma di un contributo legato al valore del misurando (come per altri strumenti) più un contributo legato al numero di *digit*, ovvero al peso dell'ultima cifra indicata nel risultato (es., 3 *digit*);

**Sensibilità** È il rapporto fra la variazione dell'uscita corrispondente ad una variazione nota dell'ingresso. Per un amperometro analogico, essa è riportata in termini di deviazioni per ampere [div/A], per microampere [div/ $\mu$ A] o addirittura per nanoampere [div/nA].

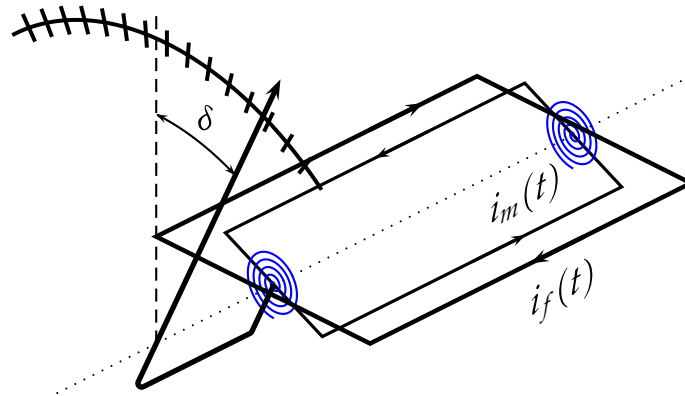


Figura 2.6: Schema circuitale dello strumento elettrodinamico

## 2.4 Strumento elettrodinamico

Il funzionamento degli strumenti elettrodinamici si basa sulle forze che si generano fra correnti che circolano in uno stesso circuito. Lo schema è riportato nella Fig. 2.6, ed è costituito da una bobina fissa, le cui spire hanno sezione maggiore, in cui circola la corrente  $i_f(t)$ , e da una mobile in cui circola la corrente  $i_m(t)$ , di peso e con spire di sezione minore rispetto alla bobina fissa. Alla bobina mobile è anche fissato un ago la cui posizione indica lo spostamento angolare  $\delta$  della bobina rispetto alla posizione di riposo. Nel sistema formato dalle due bobine è immagazzinata in ogni istante  $t$  l'energia magnetica  $W_m(t)$ :

$$W_m(t) = \frac{1}{2}L_f i_f^2(t) + \frac{1}{2}L_m i_m^2(t) + M i_f(t) i_m(t), \quad (2.15)$$

dove  $L_f$  e  $L_m$  sono le induttanze delle due bobine e  $M$  è il coefficiente di induttanza mutua fra di esse. A causa della circolazione di corrente, nelle due bobine si crea una coppia motrice pari a:

$$C_m(t) = \frac{\partial W_m(t)}{\partial \delta} = \frac{\partial M}{\partial \delta} i_f(t) i_m(t), \quad (2.16)$$

dal momento che l'unica grandezza dipendente da  $\delta$  è la mutua induttanza  $M$ . Tale dipendenza è mostrata in Fig. 2.7 ed è di tipo cosinusoidale. Se però ci poniamo in un intorno di  $\delta = \pi/2$  di semiampiezza pari a circa  $\pi/4$ , possiamo approssimare tale andamento con una costante  $k_m$  pari alla derivata della curva nel punto  $\delta = \pi/2$ . Sotto tali ipotesi, la coppia  $C_m(t)$  risulterà proporzionale al prodotto delle correnti che circolano nelle due bobine, da cui il nome di *strumento a prodotto* assegnato allo strumento elettrodinamico. La bobina mobile viene calettata su un perno e collegata ad una molla elicoidale di richiamo che si oppone alla rotazione dovuta alla coppia motrice  $C_m$  me-

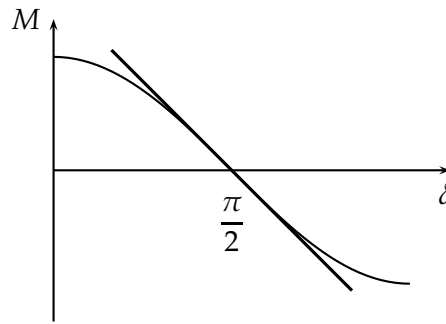


Figura 2.7: Mutua induttanza fra le bobine  $M$  in funzione di  $\delta$

dianete una coppia resistente  $C_r$  proporzionale allo spostamento angolare  $\delta$ . Analogamente a quanto detto per gli strumenti studiati nella sezioni precedenti, l'equilibrio si raggiunge quando le due coppie sono uguali:

$$C_m(t) = C_r \implies k_m i_f(t) i_m(t) = k\delta \implies \boxed{\delta = K_s i_f(t) i_m(t)}. \quad (2.17)$$

Dalla (2.17) possiamo ottenere le due espressioni valide in caso di funzionamento in regime di corrente continua o alternata. Nel primo caso, poichè  $i_f(t) = I_f$  e  $i_m(t) = I_m$ , otteniamo:

$$\delta = K_s I_f I_m, \quad (2.18)$$

e pertanto lo spostamento angolare sarà proporzionale al prodotto fra i valori delle correnti circolanti nelle bobine. Se invece supponiamo che le due correnti abbiano andamento sinusoidale, che siano isofrequenziali e che siano sfasate tra di loro di un angolo  $\phi$ :

$$\begin{aligned} i_m(t) &= I_m \sin(\omega t) \\ i_f(t) &= I_f \sin(\omega t + \phi), \end{aligned} \quad (2.19)$$

avremo che la coppia  $C_m(t)$  assumerà l'espressione:

$$C_m(t) = k_m I_m I_f \sin(\omega t) \sin(\omega t + \phi) = k_m \frac{I_m I_f}{2} [\cos(\phi) - \cos(2\omega t + \phi)], \quad (2.20)$$

dove la seconda uguaglianza è stata ottenuta mediante l'applicazione delle formule di Werner. L'espressione precedente può essere scissa nei due contributi:

$$C_{m,dc} = k_m \frac{I_m I_f}{2} \cos(\phi) \quad (2.21)$$

$$C_{m,ac} = k_m \frac{I_m I_f}{2} \cos(2\omega t + \phi), \quad (2.22)$$

dove  $C_{m,dc}$  è una componente continua, che costituisce il valore medio della coppia, e  $C_{m,ac}$  è invece una componente alternata a frequenza doppia rispetto a quella dei segnali d'ingresso. Le caratteristiche costruttive degli strumenti elettrodinamici sono tali

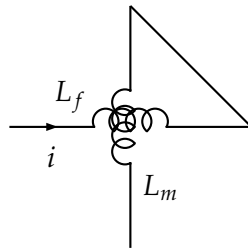


Figura 2.8: Schema circuitale del milliamperometro elettrodinamico

per cui le oscillazioni  $C_{m,ac}$  dell'indice intorno al valore medio  $C_{m,dc}$  risultano fortemente attenuate. L'uscita dello strumento pertanto è proporzionale solo alla coppia media e, in termini di spostamento angolare, sarà pertanto proporzionale alla grandezza  $I_{m,e}I_{f,e} \cos(\phi)$ , ovvero al prodotto dei valori efficaci<sup>1</sup> delle correnti  $i_f(t)$  e  $i_m(t)$  in ingresso alle due bobine moltiplicato ancora per il coseno dell'angolo di sfasamento  $\phi$  fra di esse:

$$C_m = k_m I_{m,e} I_{f,e} \cos(\phi), \quad (2.24)$$

e quindi in ultima analisi:

$$\delta = K_s I_{m,e} I_{f,e} \cos(\phi). \quad (2.25)$$

A partire dal principio di funzionamento illustrato nella (2.25) è possibile definire i diversi strumenti analogici descritti di seguito.

### 2.4.1 Milliamperometro

Con un semplice collegamento in serie delle due bobine, come mostrato in Fig. 2.8, si impone che in esse circoli la stessa corrente  $i = i_m = i_f$  e questa uguaglianza rende ovviamente nullo lo sfasamento  $\phi$ . Il valore di spostamento angolare  $\delta$  dipenderà dal regime temporale delle correnti: se siamo in **corrente continua** avremo

$$\delta_{DC} = K_s I_m I_f = K_s I^2, \quad (2.26)$$

ovvero una proporzionalità di  $\delta$  con il quadrato del valore di corrente che scorre nelle bobine. Se invece siamo in regime di **corrente alternata** sarà:

$$\delta_{AC} = K_s I_{m,e} I_{f,e} = K_s I_e^2, \quad (2.27)$$

<sup>1</sup>Il valore efficace di una grandezza  $v(t)$  di periodo  $T$  è definito come

$$v_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt}. \quad (2.23)$$

Se  $v(t) = A \sin(2\pi ft)$ , il valore efficace vale  $v_e = A/\sqrt{2}$ . Del valore efficace, oltre alla definizione matematica, se può dare un analogo energetico: il valore efficace  $v_e$  di un segnale  $v(t)$  è quel valore di tensione continua che dissipa su una resistenza  $R$  la stessa potenza media dissipata dal segnale  $v(t)$  in un intervallo di ampiezza  $T$ .

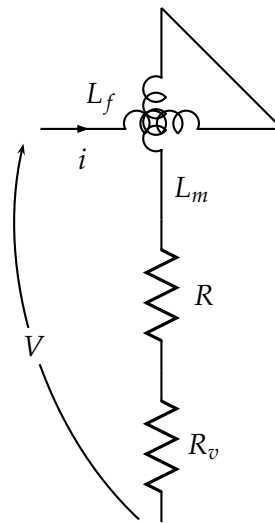


Figura 2.9: Schema circuitale del voltmetro elettrodinamico

ed in questo caso l'andamento sarà proporzionale al quadrato del valore efficace della corrente. In entrambi i casi, comunque, la scala di lettura dello strumento dovrà tener conto di questo andamento quadratico, per cui le tacche di lettura dovranno essere a distanza crescente l'una dall'altra al crescere dell'intensità della corrente.

Lo strumento presentato è intrinsecamente un milliamperometro perché per evitare che la corrente generi un aumento della temperatura intollerabile per la bobina mobile, di resistenza maggiore perché a sezione più piccola, è necessario che la corrente non superi il valore di alcune decine di milliampere.

## 2.4.2 Voltmetro

Per realizzare un voltmetro a partire da un milliamperometro possiamo operare in maniera analoga a quanto mostrato nel § 2.1.2 a pagina 42, ovvero impiegando una resistenza di zavorra  $R_v$  da dimensionare opportunamente. Se ci troviamo in regime di **corrente continua**, le due bobine possono essere rappresentate semplicemente mediante le resistenze degli avvolgimenti  $R_m$  e  $R_f$ , o più semplicemente dalla loro somma  $R = R_m + R_f$  come rappresentato in Fig. 2.9. La corrente che scorrerà nel voltmetro a causa della tensione  $V$  applicata ai suoi capi sarà pari a:

$$I = \frac{V}{R + R_v}. \quad (2.28)$$

La conoscenza del fondoscala in corrente e del valore resistivo degli avvolgimenti permette di ricavare il valore di  $R_v$  necessario per raggiungere il fondoscala in tensione desiderato. Lo spostamento angolare risulterà di ampiezza pari a:

$$\delta_{DC} = K_s I_m I_f = K_s I^2 = \frac{K_s}{(R + R_v)^2} V^2 = K'_s V^2, \quad (2.29)$$

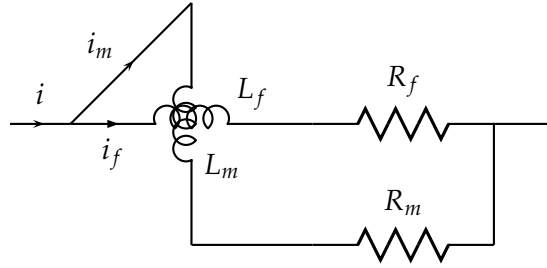


Figura 2.10: Schema circuitale dell'amperometro elettrodinamico

proporzionale al quadrato della tensione applicata. In regime di **corrente alternata** non è invece possibile trascurare la componente induttiva dei due avvolgimenti. In tal caso la corrente assume la forma:

$$I_e = \frac{V_e}{|R + R_v + j\omega L|} = \frac{V_e}{\sqrt{(R + R_v)^2 + (\omega L)^2}} \quad (2.30)$$

con  $L = L_m + L_f$ . Lo spostamento angolare sarà pari a:

$$\delta_{AC} = K_s I_{m,e} I_{f,e} = K_s I^2 = \frac{K_s}{(R + R_v)^2 + (\omega L)^2} V_e^2 = \boxed{\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega L}{R + R_v}\right)^2}} K'_s V_e^2. \quad (2.31)$$

Il termine nel riquadro contiene una dipendenza dalla frequenza che riduce la sensibilità dello strumento per alte frequenze. Per limitare tale effetto è necessario realizzare la condizione:

$$\frac{\omega L}{R + R_v} \ll 1, \quad (2.32)$$

che impone che la banda di funzionamento dello strumento si estenda al più fino a qualche kHz.

### 2.4.3 Amperometro

Per aumentare la portata del milliamperometro fino a valori dell'ordine delle decine di ampere è possibile impiegare lo schema riportato in Fig. 2.10, dove per semplicità i valori di  $R_f$  e  $R_m$  inglobano le componenti resistive delle due bobine e delle resistenze addizionali. Esso non è altro che un partitore di corrente in cui le resistenze di partizione sono scelte in modo tale da limitare il valore di corrente  $i_m$  che circola nella bobina mobile, più sensibile — come già più volte ricordato — agli incrementi di temperatura. In regime di **corrente continua** si può scrivere:

$$I_m = I \frac{R_f}{R_f + R_m} = I \frac{R_f/R_m}{1 + R_f/R_m} = I \frac{\alpha}{1 + \alpha} \quad (2.33)$$

$$I_f = I \frac{R_m}{R_f + R_m} = I \frac{1}{1 + R_f/R_m} = I \frac{1}{1 + \alpha'} \quad (2.34)$$

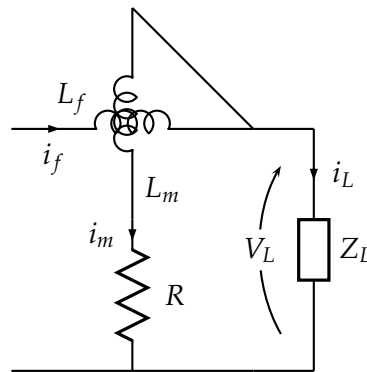


Figura 2.11: Schema circuitale del wattmetro elettrodinamico

ed ovviamente è nullo lo sfasamento. Affinchè la corrente  $I_m$  si mantenga entro limiti accettabili è necessario fissare in maniera opportuna il rapporto  $\alpha = I_m/I_f = R_f/R_m < 1$ . Si ha, in conclusione:

$$\delta_{DC} = K_s I_m I_f = K_s \frac{\alpha}{(1 + \alpha)^2} I^2 = K_s'' I^2. \quad (2.35)$$

In regime di **corrente alternata** anche le componenti induttive partecipano alla determinazione del coefficiente di partizione:

$$\frac{i_m}{i_f} = \frac{R_f + j\omega L_f}{R_m + j\omega L_m} = \alpha \frac{1 + j\omega L_f/R_f}{1 + j\omega L_m/R_m}. \quad (2.36)$$

A causa della variazione di  $\alpha$  rispetto al caso di corrente continua dovuta alla presenza delle induttanze, l'indicazione dell'amperometro subirà una modifica sia nel fattore di ampiezza (che lo studente potrà facilmente ricavare con passi analoghi a quelli dell'amperometro in continua sostituendo nella (2.35) la nuova espressione di  $\alpha$  contenuta nella (2.36)) sia nello sfasamento  $\phi$  fra le correnti nei due rami, che assume un valore pari a:

$$\begin{aligned} \phi &= \angle(1 + j\omega L_f/R_f) - \angle(1 + j\omega L_m/R_m) \\ &= \arctan(\omega L_f/R_f) - \arctan(\omega L_m/R_m), \end{aligned} \quad (2.37)$$

e che è necessario rendere nullo per ottenere invece  $\cos \phi = 1$ . A tal fine, è necessario imporre l'uguaglianza fra gli argomenti delle arcotangenti in (2.37), ovvero

$$\phi = 0 \Leftrightarrow L_f/R_f = L_m/R_m \Leftrightarrow L_f/L_m = R_f/R_m. \quad (2.38)$$

#### 2.4.4 Wattmetro

Il wattmetro è quello strumento che consente la misura della potenza assorbita da un carico  $Z_L$ , in particolare della potenza attiva pari al prodotto dei valori efficaci della tensione  $V_L$  ai capi del carico e della corrente  $I_L$  in esso, moltiplicato ancora per il

coseno dell'angolo  $\phi$  compreso fra di essi. Tale espressione ovviamente si riduce al solo prodotto di tensione e corrente quando si opera in regime continuo, essendo nullo l'angolo compreso fra i fasori rappresentativi di  $V_L$  e  $I_L$ . Lo schema di un wattmetro elettrodinamico e delle modalità di collegamento con il carico<sup>2</sup> sono illustrate nella Fig. 2.11, in cui si riconosce un ramo detto *amperometrico* destinato alla misura della corrente realizzato attraverso la bobina fissa, ed uno *voltmetrico* per la misura della tensione ottenuto con l'impiego della bobina mobile e di una resistenza di zavorra (vedi § 2.4.2). Ricordando che l'indicazione dello strumento elettrodinamico è proporzionale al prodotto delle correnti nelle due bobine e al coseno dell'angolo che esse formano, notiamo che  $i_f = i_L$  se supponiamo che il ramo voltmetrico assorba un'aliquota trascurabile di corrente, e che  $i_m = V_L/Z_V$ , con  $Z_V$  pari all'impedenza del ramo voltmetrico, che in regime continuo vale  $Z_V = R_V = R_m + R$ , ed in regime alternato  $Z_V = R_V + j\omega L_m = R_m + R + j\omega L_m$  con ovvio significato di  $R_m$  e  $L_m$ . L'indicazioni del wattmetro in regime **continuo** è:

$$\delta_{DC} = K_s I_m I_f = K_s \frac{V_L}{R_V} I_L = K'_s P_L, \quad (2.39)$$

che mostra la diretta proporzionalità fra la posizione dell'indice e il valore della potenza assorbita dal carico.

Prima di dare l'espressione valida in regime **alternato**, osserviamo la figura seguente nella quale sono riportati i fasori rappresentativi della corrente nel carico (uguale a quella che circola nella bobina amperometrica), della tensione sul carico e della corrente nella bobina voltmetrica. A causa dell'induttanza  $j\omega L_m$ , di valore non nullo per pulsazioni  $\omega > 0$ , la corrente  $i_m$  (oltre a presentare un fattore di scala variabile con la frequenza e che quindi limita l'impiego del wattmetro ad una certa banda, con considerazioni analoghe a quelle fatte nel caso del voltmetro) è sfasata rispetto alla tensione ai capi dell'amperometrica  $v_m$  e quindi ai capi del carico. In particolare, l'angolo il cui coseno determina la potenza attiva assorbita dal carico, è quello  $\beta$  compreso fra  $i_L$  e  $v_L$ , mentre quello che determina l'indicazione del wattmetro è quello  $\phi$  fra  $i_f$  ed  $i_m$ . Determiniamo l'indicazione del wattmetro con riferimento a quest'ultimo, salvo poi mostrare l'effetto dell'errore dovuto allo sfasamento  $\epsilon$  sulla misura della potenza:

$$\delta_{AC} = K_s I_{m,e} I_{f,e} \cos \phi = K_s \frac{V_L}{\sqrt{R_V^2 + (\omega L_m)^2}} I_L \cos \phi = K''_s V_L I_L \cos \phi. \quad (2.40)$$

L'errore associato a questa misura è facilmente valutabile partendo dall'espressione della potenza attiva  $P$  nell'ipotesi che l'errore  $\epsilon$  commesso su  $\beta$  sia piccolo:

$$P = V_L I_L \cos \beta \Rightarrow \Delta P = \frac{dP}{d\beta} d\beta = \frac{dP}{d\beta} \cdot \epsilon = -V_L I_L \sin \beta \cdot \epsilon, \quad (2.41)$$

dalla quale si può ricavare l'espressione del valore assoluto dell'errore relativo  $\Delta P/P$ :

$$\left| \frac{\Delta P}{P} \right| = \frac{V_L I_L \sin \beta}{V_L I_L \cos \beta} \epsilon = \epsilon \tan \beta, \quad (2.42)$$

<sup>2</sup>Gli effetti delle modalità di inserzione nel circuito di misura saranno descritte nel paragrafo successivo.

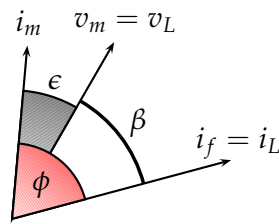


Figura 2.12: Fasori di correnti e tensione

che mostra che l'errore relativo è tanto maggiore, a parità di  $\epsilon$ , quanto più tensione e corrente del carico sono vicini alla perfetta quadratura. Per questo, quando si deve misurare la potenza attiva assorbita da carichi *quasi* reattivi, è importante che l'errore  $\epsilon$  si mantenga quanto più piccolo possibile, e ciò richiede wattmetri di particolare pregio.

## 2.5 Errori di inserzione degli strumenti

In Fig. 2.13 sono illustrati due metodi per la misura contemporanea di tensione e corrente, ad esempio per effettuare misure di potenza come illustrato nelle sezioni 2.4.4 e 1.12. Con il metodo a sinistra, in cui il voltmetro è **a monte** dell'amperometro, il valore di tensione misurato  $V_v$  è pari alla somma della caduta di tensione sull'amperometro  $V_a = I_a R$  e alla tensione esistente sul carico  $V$ . La corrente misurata  $I_a$ , invece, è pari alla corrente che effettivamente circola nel carico  $R$ , e quindi non è affetta da errori di stima. Pertanto,  $V_v$  è affetta da un errore che in termini relativi è esprimibile come:

$$\epsilon = \frac{V_v - V}{V} = \frac{V_a}{V} = \frac{I_a R}{V} = R_a \frac{1}{V} \frac{V}{R} = \frac{R_a}{R}. \quad (2.43)$$

L'errore è tanto più piccolo quanto minore è il valore di resistenza  $R_a$  rispetto a quella di carico  $R$ . Pertanto, questo metodo va scelto quando la resistenza di carico è molto

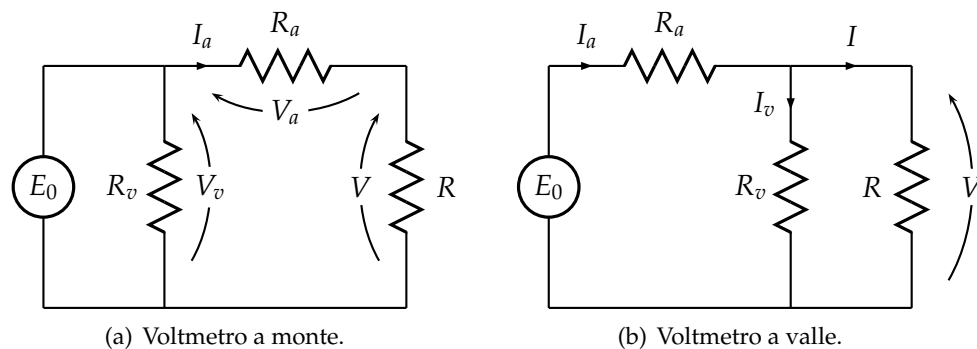


Figura 2.13: Misura di tensione e corrente.

maggiore della resistenza interna dell'amperometro, perché in caso contrario avremmo un'indicazione del voltmetro sbagliata.

Con il volmetro **a valle** dell'amperometro (circuito a destra in Fig. 2.13) sarà invece quest'ultimo a dare una misura errata. Infatti, la corrente  $I_a$  misurata contiene sia l'aliquota  $I$  di corrente che circola effettivamente nel carico, sia quella  $I_v$  che viene derivata dal voltmetro. In questo caso, l'errore relativo si può valutare come:

$$\epsilon = \frac{I_a - I}{I} = \frac{I_v}{I} = \frac{V}{R_v} \frac{R}{V} = \frac{R}{R_v}, \quad (2.44)$$

e quindi è tanto più piccolo quanto maggiore è il valore della resistenza interna del voltmetro  $R_v$  rispetto a quella di carico  $R$ . Questo metodo, al contrario della configurazione a monte, è da preferirsi quando la resistenza di carico è molto più piccola della resistenza interna del voltmetro.

## 2.6 Oscilloscopio analogico

Gli strumenti presentati finora operano nel dominio delle ampiezze, nel senso che danno informazioni relative ad ampiezza di tensione o di corrente, e, almeno per le realizzazioni presentate, in regime di tensione continua. L'universo dei segnali, tuttavia, non si esaurisce certo a quelli a frequenza zero, anzi. Poter eseguire misure su grandezze variabili nel tempo è di primaria importanza nel mondo industriale e della ricerca: le telecomunicazioni, l'alimentazione elettrica, i segnali usati nelle schede madri dei PC sono caratterizzati da più o meno forti variabilità temporali, e riuscire ad ottenere informazioni circa tale variabilità è fondamentale per rendere completa la caratterizzazione di tali segnali.

Lo strumento principe per effettuare misure nel dominio del tempo è l'oscilloscopio [1], sia di tipo analogico che numerico. Cominciamo con la versione analogica, chiarendo fin da ora che molti dei principi che introduciamo adesso sono validi anche per la versione numerica. Bisogna preliminarmente chiarire che per rappresentare un segnale nel tempo è necessario disporre di due grandezze: una che simuli lo scorrere del tempo, e un'altra che invece sia legata all'ampiezza del segnale. Se su uno schermo i due segnali vengono opportunamente composti, possiamo ottenere un segnale che contemporaneamente si sposta lungo l'asse orizzontale e verticale, riuscendo nel complesso a formare una traccia che rappresenta l'ampiezza del segnale in funzione del tempo.

### 2.6.1 Tubo a raggi catodici

Uno dei componenti dell'oscilloscopio è il tubo a raggi catodici (CRT, *catodic ray tube*), la cui funzione è ricreare su uno schermo la traccia che rappresenta il segnale che si vuole visualizzare. La traccia viene creata mediante un fascio elettronico che impatta su uno schermo ricoperto di fosfori che vengono eccitati dagli elettroni e che emettono

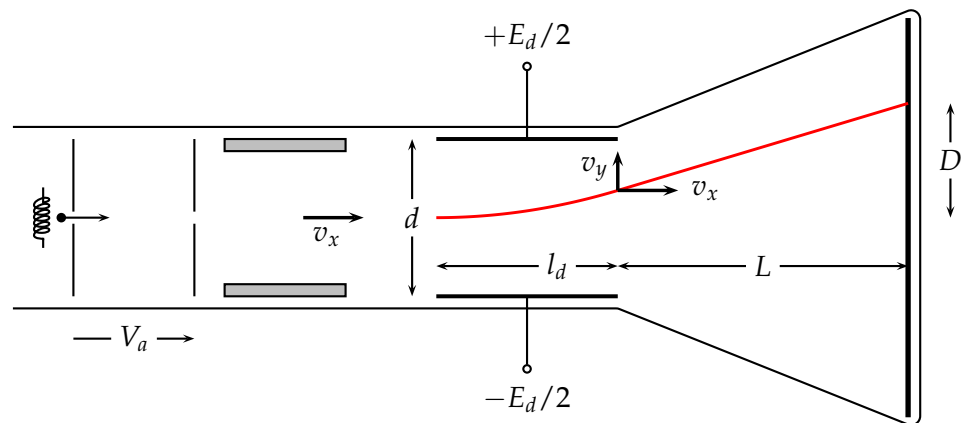


Figura 2.14: Schema del tubo a raggi catodici

luce, in genere nella banda del verde, quando ritornano allo stato di quiete (fosforescenza). È possibile rappresentare un segnale variabile nel tempo imprimendo un'accelerazione lungo l'asse orizzontale, per ricreare il trascorrere del tempo, e verticale, di valore dipendente dall'ampiezza del segnale in un dato istante temporale. Lo schema del tubo a raggi catodici, del tutto analogo a quello che si trova nelle televisioni o nei monitor dei desktop computer, è rappresentato in Fig. 2.14. Esso è essenzialmente un tubo a vuoto a simmetria cilindrica. Procedendo da sinistra a destra, troviamo innanzitutto la sorgente del fascio elettronico: un filamento (il **catodo**) che viene alimentato mediante una tensione continua di 6,3 V, e che quando si riscalda alla temperatura di 700-800 °C emette elettroni, alcuni dei quali entrano in una **camera di accelerazione** mediante un foro in un diaframma posto nelle immediate vicinanze del filamento. Nella camera, il flusso di elettroni viene sottoposto all'azione di una tensione  $V_a$ , grazie alla quale la velocità finale passerà da zero a un valore  $v_x$  che si ottiene uguagliando l'energia dovuta alla differenza di potenziale  $V_a$ , pari a  $E_p = qV_a$ , a quella cinetica finale  $E_c = m_q v_x^2 / 2$ :

$$E_p = E_c \Rightarrow qV_a = \frac{1}{2} m_q v_x^2 \Rightarrow v_x = \sqrt{\frac{2qV_a}{m_q}} \quad (2.45)$$

Successivamente, il fascio di elettroni deve essere focalizzato. A ciò provvede un gruppo di lenti elettromagnetiche, il cui scopo è di rendere minimo lo spessore della traccia nel punto di impatto del pennello elettronico sullo schermo. Dopo la focalizzazione, l'elettrone giunge nella zona di azione delle **placche di deflessione**. Esse servono a deflettere l'elettrone dalla traiettoria rettilinea mediante l'azione di un campo elettrico applicato dall'esterno. Con ovvio significato, le placche orizzontali servono a spostare il fascio in orizzontale, e quindi rappresentano il segnale temporale, mentre quelle verticali spostano il fascio lungo la direzione verticale di un'aliquota che dipende dall'ampiezza del segnale d'ingresso. Focalizziamo l'attenzione sulle placche di deflessione verticale. L'elettrone entra nella zona di influenza delle placche con velocità  $v_x$ , e

sentirà la forza deflettente  $F_y$  dovuta al campo elettrico di ampiezza  $E_d/d$  causato dalla differenza di potenziale  $E_d$  proporzionale all'ampiezza del segnale d'ingresso, esistente fra le due placche poste a distanza  $d$ :

$$F_y = m_q a_y = q \frac{E_d}{d} \Rightarrow v_y = a_y t = q \frac{E_d}{d m_q} t, \quad (2.46)$$

dove  $t$  è il tempo durante il quale l'elettrone risente dell'azione delle placche. Se la velocità  $v_x$  resta costante durante il transito dell'elettrone tra le placche, il tempo  $t$  si può calcolare come  $t = l_d/v_x$ . L'elettrone, uscito dalla zona di influenza delle placche, proseguirà con traiettoria rettilinea con velocità longitudinale  $v_x$  e trasversale  $v_y$ . La distanza  $D$ , detta **deflessione**, ottenuta dopo un percorso di lunghezza  $L$  lungo la direzione longitudinale, è pari a:

$$D = v_y t' = q \frac{E_d}{d m_q} \cdot \frac{l_d}{v_x} \cdot \frac{L}{v_x} = \frac{1}{2} \frac{E_d l_d L}{d V_a}, \quad (2.47)$$

nella quale si è trascurato il termine addizionale pari alla deflessione iniziale all'uscita delle placche in quanto esse sono di lunghezza  $l_d$  molto minore di  $L$ . La deflessione  $D$  è pertanto uguale a:

$$D = \frac{1}{2} \frac{E_d l_d L}{d V_a}. \quad (2.48)$$

Mettiamo in evidenza alcune caratteristiche:

- la deflessione  $D$  aumenta con il campo elettrico  $E_d$  la cui ampiezza è proporzionale al segnale di ingresso;
- al crescere di  $L$  aumenta la deflessione. Perciò, al fine di aumentare la risoluzione, è opportuno avere un valore di  $L$  il più grande possibile, rispettando però un limite dovuto all'ingombro, e un altro relativo alle maggiori difficoltà di focalizzazione del fascio quando aumenta la distanza fra la zona di focalizzazione e lo schermo;
- $D$  aumenta con  $l_d$ , lunghezza delle placche. Tuttavia, valori troppo grandi di lunghezza comportano una limitazione alla massima frequenza rappresentabile dal segnale. Le relazioni precedenti, ed in particolare quella relativa alla velocità  $v_y$  in (2.46), sono state infatti ottenute in condizioni di tensione  $E_d$  costante. Ciò vuol dire che durante la permanenza all'interno delle placche il segnale d'ingresso non deve variare significativamente, imponendo di fatto un limite alla massima frequenza del segnale.

### 2.6.1.1 Parametri caratteristici del CRT

Tra i parametri più importanti del tubo a raggi catodici troviamo:

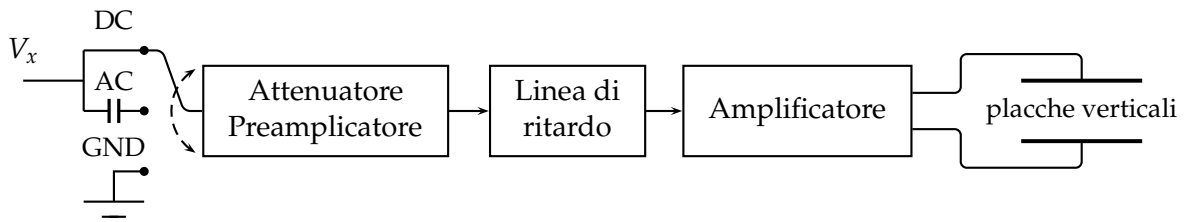


Figura 2.15: Schema del canale verticale dell'oscilloscopio analogico

**Sensibilità di deflessione  $S$** , definita come

$$S = \frac{D}{E_d} = \frac{l_d L}{2d V_a'} \quad (2.49)$$

espressa in cm/V, e indica di quanti centimetri viene deflesso il fascio elettronico per ogni volt di tensione sulle placche di deflessione. Ad esempio, se  $l_d = 0,02$  m,  $L = 0,2$  m,  $d = 0,005$  m e  $V_a = 2000$  V, si ottiene

$$S = 0,02 \text{ cm/V}; \quad (2.50)$$

**Fattore di deflessione  $F$** , pari all'inverso della sensibilità. Indica quanti volt sono necessari per ottenere una deflessione di 1 cm;

**Linearità**, indica quanto uniforme sia la sensibilità su tutto lo schermo.

## 2.6.2 Canale di amplificazione verticale

In Fig. 2.15 è riportato lo schema a blocchi della sezione verticale dell'oscilloscopio analogico. Il primo blocco che incontra il segnale  $V_x$  è detto **selettore d'ingresso**, tramite il quale si può decidere come deve essere applicato il segnale ai blocchi di elaborazione successivi:

**DC** Tramite la modalità DC (*Direct Coupling*, accoppiamento diretto) il segnale viene applicato agli stadi d'ingresso senza alcuna modifica.

**AC** La modalità *Alternate Coupling* (accoppiamento in alternata) filtra, mediante l'impiego di un condensatore posto in serie, la componente continua del segnale così che l'oscilloscopio visualizzi solo l'eventuale componente alternata superiore alla frequenza del filtro passa-alto risultante. Sebbene il comportamento ideale del filtro sia quello di un'attenuazione della sola frequenza nulla, nella realtà è necessario considerare la presenza di una banda di transizione di una certa ampiezza. Attualmente la frequenza di taglio a 3 dB è di una decina di Hz circa.

**GND** La modalità *Ground* a rigore non è una modalità di accoppiamento del segnale d'ingresso, perché posizionando il selettore su di essa, al segnale d'ingresso

viene sostituita una tensione di riferimento, solitamente pari al potenziale di terra. L'impiego di questa modalità è utile ai fini di una taratura iniziale dello strumento. Supponiamo che i blocchi successivi del canale verticale presentino nel complesso una tensione di offset  $V_{\text{off}}$  diversa da zero. Essa si somma al segnale nullo imposto in ingresso mediante la scelta della modalità GND, e pertanto sullo schermo apparirà una traccia orizzontale (perché si veda una traccia e non un solo punto come ci si aspetterebbe verrà chiarito successivamente, quando parleremo della base dei tempi) di ampiezza pari a  $V_{\text{off}}$ . Operando mediante l'apposita vite di regolazione del posizionamento verticale, è possibile riportare la traccia sull'asse orizzontale, compensando in tal modo l'offset, che continuerà ad esistere ma che non darà effetti sui livelli del segnale.

A valle del selettore d'ingresso c'è una sezione di **attenuazione e preamplificazione**, necessaria per portare il segnale ad un livello sufficiente per una corretta visualizzazione. Per spiegarne il funzionamento, supponiamo che il fattore di deflessione del CRT sia di 20 V/cm, e che l'amplificatore finale abbia un'amplificazione di 2000. Ipotizziamo inoltre che la rete di attenuazione e pre-amplificazione possa essere regolata in un intervallo che va da un'attenuazione di 2000 a 0. Ciò vuol dire che applicando la completa attenuazione, posso visualizzare un segnale riportandolo su una scala di 20 V/cm, mentre senza attenuazione posso ottenere deflessioni pari a 10 mV/cm.

Successivamente, il segnale incontra una **linea di ritardo**, necessaria innanzitutto a rendere il ritardo di propagazione sul canale verticale uguale a quello del canale orizzontale (la base dei tempi) — di solito maggiore a causa della complessità dei circuiti che lo costituiscono, — in modo che i segnali di movimento verticale e orizzontale arrivino alle relative placche di deflessione correttamente sincronizzati. Infatti, se a causa del maggiore ritardo, il segnale orizzontale arrivasse dopo quello verticale, il tracciamento del segnale d'interesse avverrebbe a partire da un istante successivo a quello di preferenza (scelto mediante la definizione di un evento di trigger di cui si parlerà nella Sez. 2.6.3), e pertanto non sarà possibile visualizzare il segnale in un intorno di tale evento, e per un intervallo pari alla differenza di ritardo fra i due canali.

Infine, il segnale incontra il blocco **amplificatore**, grazie al quale la sua ampiezza viene portata al livello necessario per poter deflettere il fascio elettronico. Tipicamente, l'amplificazione è dell'ordine di circa 2000. Nella progettazione è da tenere in conto il fatto che il prodotto banda per guadagno di un amplificatore è costante, per cui un aumento dell'amplificazione comporta una proporzionale riduzione della banda utile dello strumento. L'uscita dell'amplificatore è bilanciata: le differenze di potenziale applicate alle placche non sono riferite a massa, ma sono simmetriche rispetto ad essa, come indicato in Fig. 2.14, al fine di mantenere la simmetria elettromagnetica del tubo a raggi catodici ed evitare ciò che viene definita distorsione trapezoidale, dovuta alla presenza di campi elettrici radiali e trasversali spuri che modificano la traiettoria del fascio elettronico in modo diverso a seconda della polarità del segnale d'ingresso, con l'effetto di distorcerne la visualizzazione.

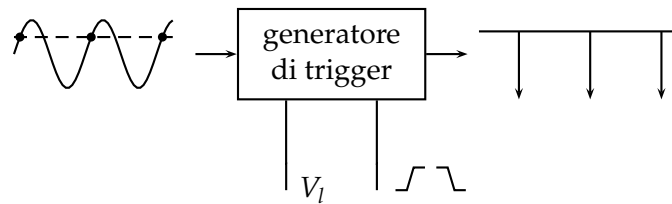


Figura 2.16: Circuito di generazione degli impulsi di trigger.

### 2.6.2.1 Effetto della banda sulla misura del tempo di salita

Per l'elevato guadagno caratteristico dell'amplificatore finale del canale verticale, la banda dell'oscilloscopio risente di una forte limitazione. Infatti, un gradino in ingresso potrebbe essere privato delle sue componenti a frequenza più elevata, rendendo così il comportamento dell'oscilloscopio simile a quello di un filtro passabasso, con resistenza  $R_o$  e capacità  $C_o$ . Nel complesso, la frequenza di taglio sarebbe pari a:

$$f_t \equiv B = \frac{1}{2\pi R_o C_o} \quad (2.51)$$

in base alla quale il tempo di salita  $t_s$ , definito come il tempo necessario al segnale visualizzato per passare dal 10% al 90% del valore di regime quando in ingresso è posto un segnale a gradino, è pari a:

$$t_s \approx \frac{2,2}{2\pi f_t} = 2,2 R_o C_o, \quad (2.52)$$

da cui discende:

$$t_s = \frac{0,35}{B}. \quad (2.53)$$

### 2.6.3 Base dei tempi

Il canale orizzontale, detto anche base dei tempi, è quello che determina, a partire da un segnale d'ingresso, il segnale che sposta il pennello elettronico lungo l'asse orizzontale. È facile intuire, con l'esperienza maturata finora, che tale segnale orizzontale deve essere a rampa, con valore minimo e massimo uguali ma di segno opposto, così che tutto lo schermo possa essere spazzolato. Il primo dispositivo del canale orizzontale è il **generatore di impulsi di trigger**, il cui compito (vedi Fig. 2.16) è di generare impulsi negativi in corrispondenza degli **eventi di trigger**, ovvero degli istanti in cui il segnale d'ingresso assume il valore e la pendenza (positiva o negativa) fissata dall'utente. Esso è composto da tre diversi dispositivi: un circuito comparatore, un derivatore e un cimatore. Il circuito **comparatore** è mostrato in Fig. 2.17, nella quale ne è illustrato anche il funzionamento. Supponiamo che la tensione  $V_{in}$  da visualizzare abbia un andamento sinusoidale, e fissiamo una posizione del potenziometro così che sull'altro

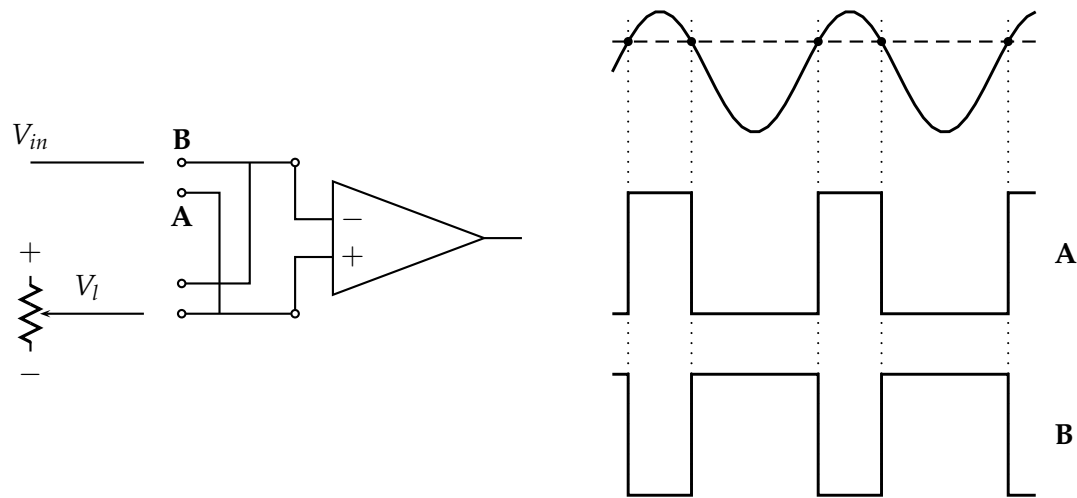


Figura 2.17: Circuito comparatore

ingresso ci sia una tensione  $V_l$  nota. Con l'interruttore, fissiamo una configurazione dei collegamenti, ad esempio in modo tale che il segnale  $V_{in}$  vada al morsetto non invertente dell'amplificatore differenziale e la tensione  $V_l$  a quello invertente. Identifichiamo tale configurazione con **A**, e notiamo che l'uscita del comparatore sarà alta quando il segnale  $V_{in}$  è maggiore del segnale  $V_l$  e bassa quando viceversa  $V_l$  è maggiore di  $V_{in}$ . Se invece scelgo la configurazione **B**, nel quale  $V_{in}$  e  $V_l$  si invertono, ovviamente l'uscita sarà alta quando  $V_l$  è maggiore di  $V_{in}$ , come rappresentato in figura.

Da un segnale sinusoidale, abbiamo ottenuto un segnale rettangolare che cambia stato negli istanti temporali in cui l'ingresso  $V_{in}$  uguaglia la soglia  $V_l$ . La polarità delle transizioni è positiva o negativa in dipendenza dalla particolare configurazione dell'interruttore: se ci troviamo in configurazione **A**, se la transizione avviene con pendenza positiva di  $V_{in}$  si ha uscita del comparatore con transizione positiva, mentre se la transizione avviene quando la pendenza di  $V_{in}$  è negativa, anche il verso della transizione in uscita sarà negativo. Viceversa se stiamo utilizzando la configurazione **B**.

A valle del circuito comparatore è presente un circuito **derivatore** che, in corrispondenza degli istanti di transizione del segnale rettangolare, emette impulsi la cui polarità dipende dal verso delle transizioni del segnale rettangolare: impulsi positivi per transizioni verso l'alto, negativi per transizioni verso il basso (vedi Fig. 2.18). Infine, il segnale impulsivo passa attraverso un circuito **cimatore** che consente il passaggio dei soli impulsi di polarità negativa. Ricordando che per generare correttamente la rampa di alimentazione delle placche orizzontali è necessario avere un impulso negativo in corrispondenza dell'evento di trigger, fissato mediante un livello e una pendenza, è evidente che bisognerà scegliere la configurazione **B** (**A**) se vogliamo che la visualizzazione parta da un livello  $V_l$  con pendenza **positiva** (**negativa**).

Una volta generati gli impulsi negativi in corrispondenza dell'evento di trigger desiderato, è necessario generare il segnale che, amplificato, piloterà il pennello elet-

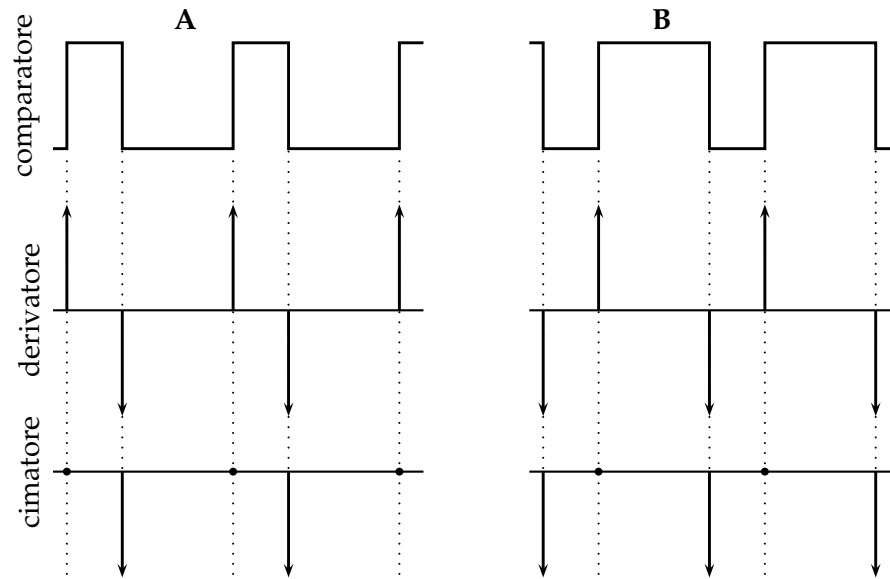


Figura 2.18: Circuito derivatore e cimatore

tronico lungo l'asse orizzontale. Tale operazione è svolta dalla **base dei tempi** mostrata in Fig. 2.19. Il circuito è costituito da un circuito di **gate**, un **generatore di rampa** e un **circuito di hold off**. La gate impiegata è un dispositivo *ad isteresi*, poichè cambia stato solo quando viene superata la soglia inferiore  $V_L$  o quella superiore  $V_H$ : finchè il segnale in ingresso resta nella fascia intermedia, l'uscita rimarrà nello stato imposto dalla precedente transizione.

Per illustrarne il funzionamento, facciamo ricorso al diagramma temporale delle tensioni mostrato in Fig. 2.20, dove  $V_T$  è il segnale in uscita dal circuito di generazione del trigger, costituito da impulsi negativi negli istanti temporali in cui è presente nel segnale d'ingresso l'evento di trigger;  $V_{HO}$  è il segnale in uscita dal circuito di hold off;  $V_G$  è l'uscita del circuito di gate. Supponiamo che tutti i circuiti partano da una condizione iniziale nulla: la gate ha in uscita un segnale basso, la rampa è nella condizione

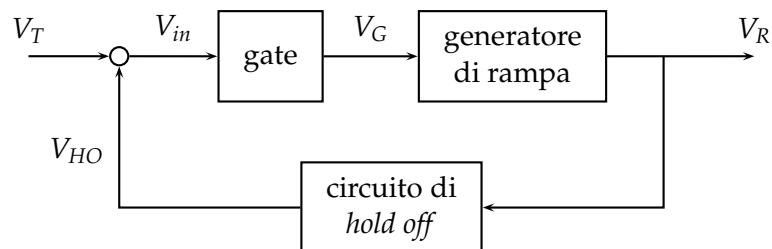


Figura 2.19: Circuito della base dei tempi

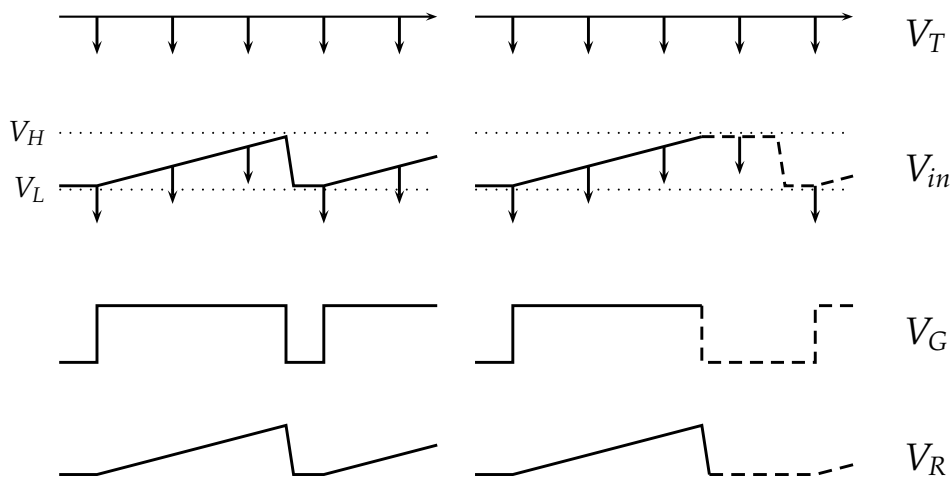


Figura 2.20: Evoluzione temporale dei segnali della base dei tempi

di riposo, supponiamo nulla, e l'uscita dell'hold off è uguale (in figura, per comodità di rappresentazione, è indicata come leggermente più alta) a  $V_L$ . Quando giunge il primo impulso di trigger, che si va a sommare alla tensione nulla  $V_{HO}$ , l'ingresso della gate assumerà un valore più basso di  $V_L$ , e pertanto la gate cambierà stato presentando in uscita un valore alto. A questo punto il generatore di rampa comincerà a dare in uscita la rampa che poi andrà amplificata e portata alle placche di deflessione orizzontale. Questa stessa rampa viene riportata in ingresso al circuito di hold off, che in questa fase non fa altro che ripresentare in uscita lo stesso segnale che si presenta in ingresso. La presenza di altri impulsi di trigger durante la fase di salita della rampa non modifica il comportamento del circuito e in particolare della gate, in quanto essi sono di polarità negativa, tale cioè da spingere verso una modifica di stato dell'uscita della gate che già è avvenuta. Lo stato cambierà invece quando la rampa tocca il valore  $V_H$ , in corrispondenza del quale la gate tornerà nuovamente al valore basso. Questa modifica viene registrata dal generatore di rampa che riporterà il segnale al valore nullo in un tempo detto tempo di *fly back*, durante il quale il pennello elettronico percorre lo schermo da destra verso sinistra per riprendere al momento opportuno la spazzolata. Durante il *fly back*, non deve essere visualizzata alcuna traccia sullo schermo, e quindi la base dei tempi prevede che dall'uscita della gate venga generato un segnale di *unblanking*, disattivando il quale il flusso di elettroni viene annullato durante il *fly back*. Il segnale di blanking è solitamente un segnale fortemente negativo ( $\sim 2$  kV) applicato alla griglia presente nella camera di focalizzazione in modo tale che gli elettroni non vengano accelerati verso lo schermo, ma anzi vengano respinti nella direzione opposta.

A partire dall'istante in cui la rampa comincia la sua fase di scarica, il comportamento della base dei tempi varia in dipendenza delle impostazioni del circuito di hold off.

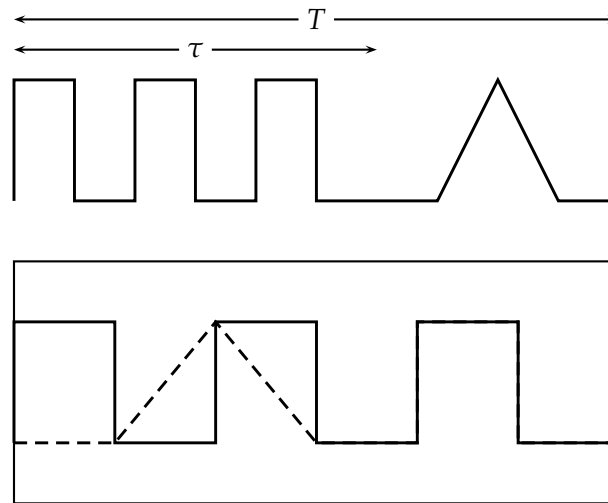


Figura 2.21: Esempio di applicazione del circuito di hold off

In un primo momento, supponiamo che il circuito non effettui alcuna azione particolare: il segnale della rampa viene praticamente replicato in uscita dall'hold off, cosicchè il successivo impulso di trigger (il quarto contando da sinistra) avrà l'effetto di rimettere in moto tutto il ciclo di generazione e quindi di far partire una nuova visualizzazione del segnale a partire dal corrispondente istante temporale. La seconda configurazione è quella in cui l'uscita dell'hold off viene mantenuta alta per un certo intervallo temporale detto *tempo di hold off* dopo l'istante di inizio della fase di scarica della rampa (il fly back): in tale modo, l'impulso di trigger che prima dava il via ad una nuova fase di visualizzazione, risulterà inefficace perché si sovrapporrà al segnale in uscita dall'hold off quando esso è ancora alto e pertanto non riuscirà a far scendere il segnale in ingresso alla gate al di sotto della soglia inferiore  $V_L$ . Al termine del tempo di hold off il segnale tornerà al livello basso e un successivo impulso di trigger provocherà l'inizio della spazzolata.

Nel complesso, tutti gli impulsi che si presentano durante l'intervallo di hold off risultano inefficaci ai fini dell'inizio di una nuova fase di visualizzazione. Per mostrare l'utilità dell'azione del circuito di hold off usiamo l'esempio mostrato in Fig. 2.21. In esso è rappresentato il periodo  $T$  di un segnale composto da due gruppi di segnali, magari con durata diversa. Supponiamo che di questo segnale si voglia visualizzare solo un intervallo  $\tau$ : imposterò la base dei tempi così da rendere la pendenza della rampa  $V_R$  tale da far percorrere l'intervallo da  $V_L$  a  $V_H$  in un tempo pari a  $\tau$ . Supponiamo che  $\tau$  contenga il primo gruppo di tre impulsi; se al termine del burst non tenessi alta l'uscita dell'hold off, il successivo trigger darebbe il via ad una nuova scansione, che però si riferirebbe ad una porzione di periodo che non è di mio interesse: sullo schermo vedrò la sovrapposizione di due segnali distinti, il blocco dei primi tre impulsi e quello del successivo impulso triangolare.

Impostando correttamente la durata del tempo di hold off posso invece far sì che gli impulsi si trigger relativi alla frazione di periodo non d'interesse, siano inefficaci, e che quindi la successiva spazzolata dello schermo parta in corrispondenza del primo impulso di trigger del successivo periodo, come è corretto che sia.

### 2.6.3.1 Modalità di gestione del trigger

Il segnale da cui prelevare le informazioni per la generazione degli impulsi di trigger può essere:

**INT** in cui lo stesso segnale da visualizzare è impiegato per la generazione degli impulsi;

**EXT** in cui è un segnale diverso ad essere usato per la generazione del trigger, ovviamente sincrono con quello da visualizzare. In questo modo si possono visualizzare segnali di piccola ampiezza in cui il livello di trigger è ad elevata incertezza perché magari affetto da rumore;

**LINE** in cui la sorgente del segnale di trigger è il segnale di rete (50Hz).

Il trigger può essere gestito in tre modalità differenti:

**NORMAL** è la modalità utilizzata nella descrizione del funzionamento della base dei tempi fin qui fatta, ed è la modalità tipica di funzionamento;

**SINGLE** o **ONE SHOT** è la modalità in cui solo il primo trigger ha effetto, e serve ad esempio nei casi in cui si voglia fotografare un preciso evento, ad esempio un transitorio, mediante un'opportuna scelta del livello di trigger;

**AUTO** è la modalità in base alla quale se il circuito della base dei tempi non vede un trigger entro un intervallo predefinito (in genere nell'ordine della decina o al più centinaia di millisecondi), vengono emessi autonomamente dallo strumento impulsi di trigger. È una modalità prettamente diagnostica, in quanto consente di verificare, ad esempio, se la mancanza di una traccia sullo schermo dell'oscilloscopio dipenda da un'errata impostazione del livello di trigger o da problemi sul segnale da visualizzare.

### 2.6.4 Sonde attenuatrici compensate

È possibile che il segnale che si vuole analizzare con un oscilloscopio sia spesso di ampiezza così grande da arrecare danno ai circuiti dello strumento se applicato direttamente ai morsetti d'ingresso. In tale caso, è necessario utilizzare delle sonde attenuatrici che hanno il compito di attenuare l'ampiezza del segnale di un fattore noto (10, 100 o 1000 volte, indicate rispettivamente come 10X, 100X a 1000X). Come vedremo, la sonda porterà un beneficio anche alla banda utile dello strumento, ovvero all'ampiezza dell'intervallo di frequenze del segnale che rientrano nell'intervallo di funzionamento

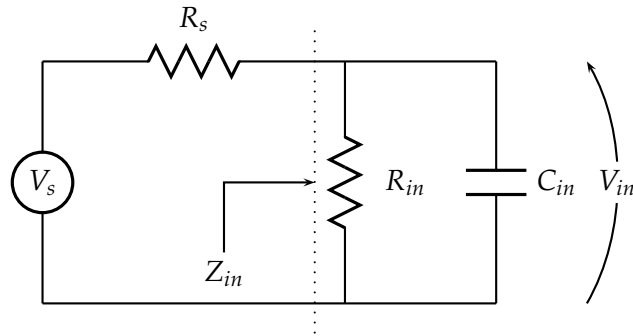


Figura 2.22: Circuito equivalente del segnale e dell'oscilloscopio

dell'oscilloscopio. Per comprendere come funzionino le sonde e i benefici che esse portano, consideriamo preliminarmente il comportamento dell'oscilloscopio senza sonde attenuatrici. In Fig. 2.22 è riportato un circuito in cui è rappresentato lo schema equivalente della sezione generatrice del segnale d'interesse, costituito dal generatore  $V_s$  e dalla sua resistenza in serie  $R_s$  (tipicamente dell'ordine dei  $50 \Omega$ ), e il circuito equivalente dell'oscilloscopio, rappresentato dal parallelo di una resistenza d'ingresso  $R_{in} \approx 1 \text{ M}\Omega$ , e una capacità  $C_{in} \approx 20 \text{ pF}$ , che rappresenta la capacità parassita dovuta, ad esempio, alla vicinanza fra i due conduttori metallici dei morsetti d'ingresso dell'oscilloscopio. L'impedenza d'ingresso  $Z_{in}$  ha l'espressione:

$$Z_{in} = \frac{R_{in}}{j\omega C_{in}} = \frac{R_{in}}{R_{in} + \frac{1}{j\omega C_{in}}}, \quad (2.54)$$

che dipende evidentemente dalla frequenza. Ciò implica che la tensione di segnale  $V_s$  si ripartisce su  $R_s$  e  $Z_{in}$  diversamente in base alla frequenza:

$$V_{in} = V_s \frac{Z_{in}}{Z_{in} + R_s} = V_s \frac{\frac{R_{in}}{1 + j\omega R_{in} C_{in}}}{R_s + \frac{R_{in}}{1 + j\omega R_{in} C_{in}}} = V_s \frac{R_{in}}{R_s + R_{in} + j\omega R_{in} C_{in} R_s}. \quad (2.55)$$

Ponendo  $\tau_{in} = R_{in} C_{in}$ , poiché è  $R_{in} \gg R_s$ , mettendo in evidenza  $R_{in}$  al numeratore e al denominatore, otteniamo:

$$V_{in} = V_s \frac{1}{1 + j\omega \tau_{in} \frac{R_s}{R_{in}}}, \quad (2.56)$$

della quale ci interessa in particolare l'espressione della costante di tempo equivalente  $\tau'$ :

$$\tau' = \tau_{in} \frac{R_s}{R_{in}} \quad (2.57)$$

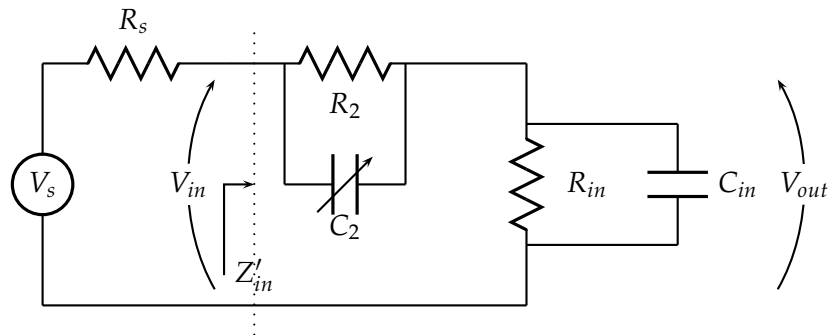


Figura 2.23: Circuito equivalente di segnale, sonda e oscilloscopio

che confronteremo successivamente con quella ottenuta con la sonda attenuatrice. La (2.56) e (2.57) ci dicono che qualora il segnale contenesse frequenza al di sopra e al di sotto della frequenza di taglio  $f_{3dB} = 1/2\pi\tau'$ , esse sarebbero trattate diversamente dallo strumento, e pertanto il segnale visualizzato sarebbe una versione distorta del segnale d'ingresso.

La sonda attenuatrice viene inserita tra i morsetti d'ingresso dell'oscilloscopio e il segnale, e pertanto lo schema equivalente diventa quello in Fig. 2.23. La funzione di trasferimento si valuta facilmente come rapporto di partizione della tensione tra l'ingresso e l'uscita della sonda, e quindi  $W = V_{out}/V_{in}$ :

$$W = \frac{Z_{in}}{Z_2 + Z_{in}} = \frac{\frac{R_{in}}{1 + j\omega\tau_{in}}}{\frac{R_2}{1 + j\omega\tau_2} + \frac{R_{in}}{1 + j\omega\tau_{in}}}, \quad (2.58)$$

dove  $\tau_2 = R_2C_2$ . Se lavoriamo a frequenza nulla, ovvero in regime statico, avremo l'espressione:

$$W_0 = \frac{R_{in}}{R_2 + R_{in}}, \quad (2.59)$$

che ci consente di calcolare facilmente il valore da dare a  $R_2$  per ottenere attenuazioni di 10, 100, 1000 volte con  $R_{in} = 1 \text{ M}\Omega$ :

$$\begin{aligned} 10X &\rightarrow R_2 = 9 \text{ M}\Omega \\ 100X &\rightarrow R_2 = 99 \text{ M}\Omega \\ 1000X &\rightarrow R_2 = 999 \text{ M}\Omega. \end{aligned} \quad (2.60)$$

La (2.58) evidenzia comunque che al crescere della frequenza l'attenuazione comincia a variare, ed in particolare essa cresce al crescere di  $\omega$ . Tuttavia, se scelgo  $\tau_2 = \tau_{in}$ , l'espressione in (2.58) si riduce a quella in (2.59) e pertanto la funzione di trasferimento della sonda resterà costante al valore  $W_0$  al variare della frequenza del segnale d'ingresso. L'operazione che mi permette di impostare il valore corretto della capacità  $C_2$ , unica

grandezza su cui posso agire in quanto  $R_2$  è determinata dall'attenuazione desiderata, è detta **compensazione**. Nella realtà, la capacità  $C_2$  è ottenuta mediante il parallelo di due capacità: una di valore fisso che compensa la parte più significativa della capacità parassita  $C_{in} \approx 20$  pF, e un'altra di valore regolabile dall'utente per ottenere una regolazione fine e quindi compensare l'aliquota meno significativa di  $C_{in}$ .

La compensazione avviene mediante l'uso di un segnale a onda quadra generato all'interno dell'oscilloscopio e prelevabile mediante un morsetto di calibrazione (indicato come CAL): regolando mediante la vite apposita il valore della capacità  $C_2$ , il segnale sullo schermo avrà l'andamento a onda quadra desiderato, indice del raggiungimento della compensazione.

Per evidenziare il beneficio in termini di ampliamento della banda utile dell'oscilloscopio conseguente all'introduzione della sonda, calcoliamo prima di tutto l'impedenza equivalente  $Z'_{in}$  vista dal circuito di segnale:

$$Z'_{in} = Z_2 + Z_{in} = \frac{R_2}{1 + j\omega\tau_{in}} + \frac{R_{in}}{1 + j\omega\tau_{in}} = \frac{R_2 + R_{in}}{1 + j\omega\tau_{in}}. \quad (2.61)$$

Procedendo analogamente alla (2.55), abbiamo:

$$V_{in} = V_s \frac{Z'_{in}}{Z'_{in} + R_s} = V_s \frac{\frac{R_2 + R_{in}}{1 + j\omega\tau_{in}}}{R_s + \frac{R_2 + R_{in}}{1 + j\omega\tau_{in}}} = V_s \frac{R_2 + R_{in}}{R_s + R_2 + R_{in} + j\omega\tau_{in}R_s}, \quad (2.62)$$

che nel caso in cui  $R_2 + R_{in} \gg R_s$ , diventa:

$$V_{in} = V_s \frac{1}{1 + j\omega\tau_{in} \frac{R_s}{R_2 + R_{in}}}, \quad (2.63)$$

nella quale compare la costante di tempo equivalente:

$$\tau'' = \tau_{in} \frac{R_s}{R_2 + R_{in}}. \quad (2.64)$$

Confrontando la (2.64) con la (2.57), si ricava che nel caso di una sonda con attenuazione 10X, nella quale  $R_2 + R_{in} = 10$  M $\Omega$ , la frequenza di taglio è circa 10 volte maggiore di quella ottenuta senza sonda.

## 2.6.5 Oscilloscopio a doppia traccia

Le soluzioni per la visualizzazione di più segnali contemporaneamente sono molteplici. Quella più ovvia prevede che per ognuno degli ingressi ci sia un canale verticale, orizzontale ed un sistema di generazione del fascio elettronico con un unico tubo a raggi catodici sullo schermo del quale visualizzare tutte le tracce. Alla qualità però, questa

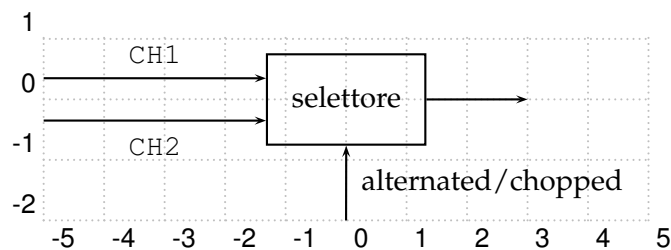


Figura 2.24: Circuito di selezione della modalità di visualizzazione.

soluzione contrappone una complessità realizzativa ed un costo che la rendono tipicamente la meno adottata. Una semplificazione si può ottenere impiegando un unico cannone elettronico il cui fascio viene successivamente suddiviso in più fasci ciascuno dei quali è comandato da un sistema di amplificazione distinto, dando così luogo ad un sistema leggermente più compatto del precedente. La soluzione però universalmente utilizzata per la realizzazione di oscilloscopi multi-traccia è quella di condividere un unico sistema di amplificazione orizzontale e verticale fra più segnali (tipicamente 2, 3 o 4). Le due modalità di funzionamento, per mostrare le quali faremo riferimento ad un sistema a doppia traccia, sono dette **alternated** (*alternata*) e **chopped** (letteralmente *affettata*), e vengono scelte mediante un opportuno selettore.

### 2.6.5.1 Modalità *alternated*

Il principio base di funzionamento della modalità alternata è quello di dedicare il fascio elettronico *alternativamente* ai due segnali: durante una spazzolata (la ① e la ③ in Fig. 2.25) viene visualizzato il segnale di un canale (CH1), durante la successiva (la ② e la ④) il pennello elettronico segue invece l'andamento dell'altro canale (CH2). La possibilità di osservare entrambe le tracce contemporaneamente è data dalla persistenza dei fosfori sullo schermo e, parzialmente, alla permanenza sulla retina dell'immagine visualizzata.

Il segnale di sincronismo orizzontale è ricavato da uno qualsiasi dei canali. In Fig. 2.25 si vede che se scegliamo CH1 ed impostiamo il trigger al livello  $V_I$  con pendenza negativa, il segnale a dente di sega che comanda l'asse orizzontale sarà sincrono con gli istanti temporali in cui CH1 è uguale a  $V_I$ , e ciò rende stabile la visualizzazione di quel segnale. La stessa figura mostra che se il segnale presente su CH2 ha la stessa frequenza (o al più un multiplo intero) del segnale presente su CH1, come è il caso del segnale CH2-A, anche esso sarà correttamente visualizzato. Se invece il segnale non è isofrequenziale al segnale usato per la generazione del trigger, come succede invece per il segnale CH2-B, in corrispondenza di ogni spazzolata associata al canale 2 verrà visualizzata una porzione diversa del segnale, che così risulterà di difficile discriminazione. Quanto evidenziato può essere risolto se il segnale di sincronismo viene prelevato alternativamente dai due segnali, facendo cioè in modo che ad ogni spazzolata il segnale di trigger sia generato a partire dallo stesso segnale che viene visualizzato. Tale soluzione, adottata in alcuni oscilloscopi, è rappresentata in Fig. 2.26, osservando la quale però si

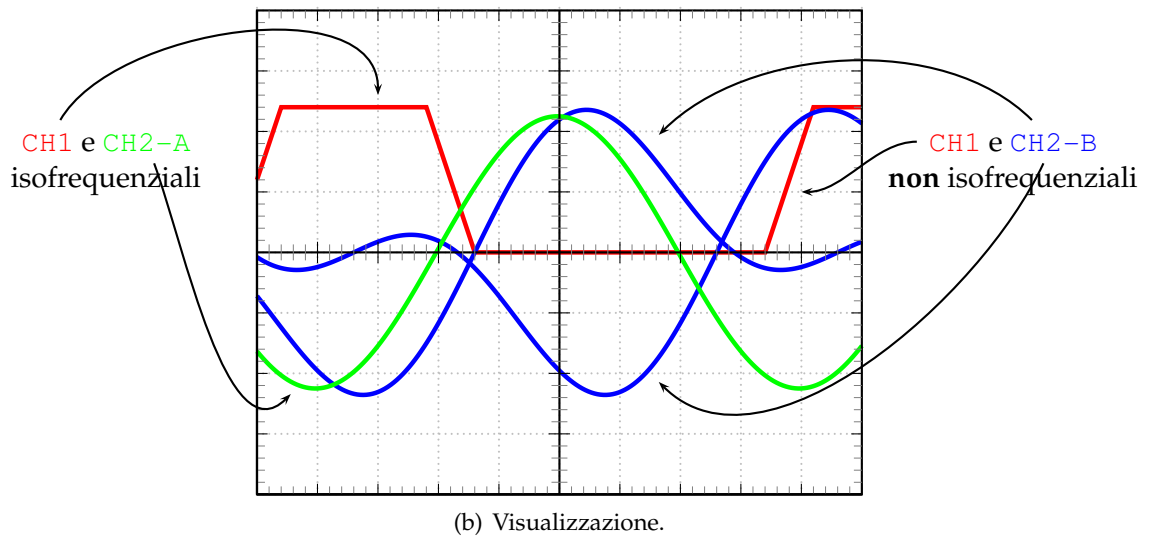
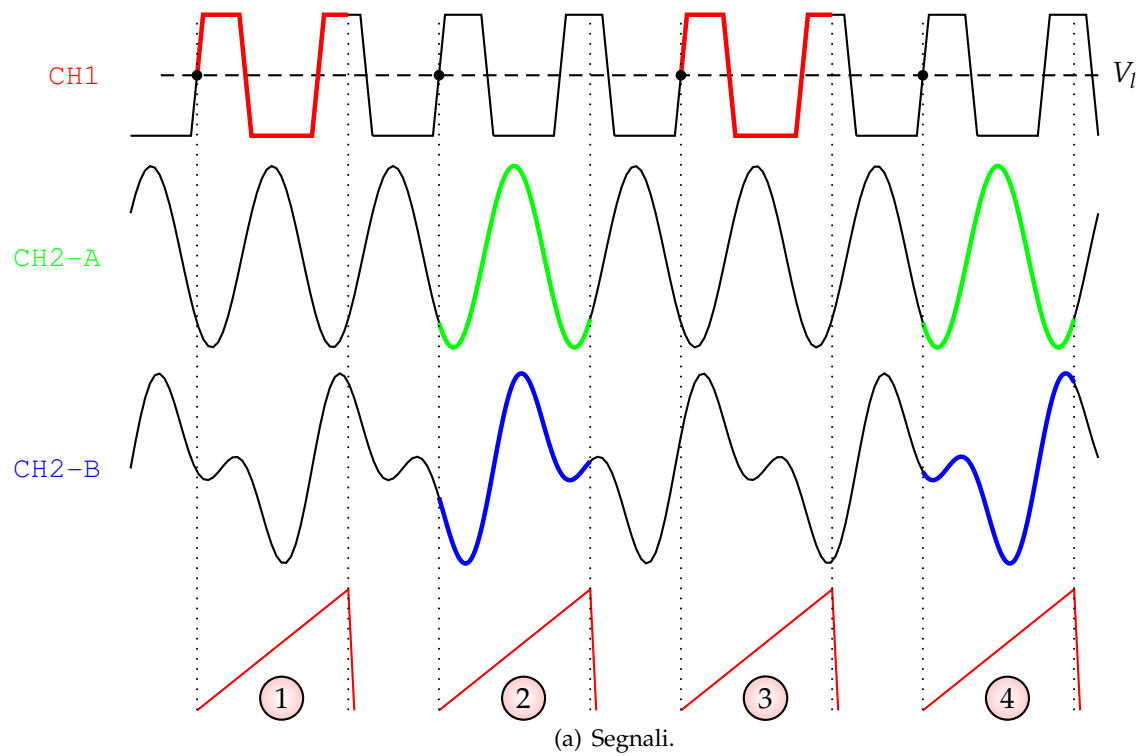


Figura 2.25: Modalità **alternated** con sincronizzazione sul canale 1.

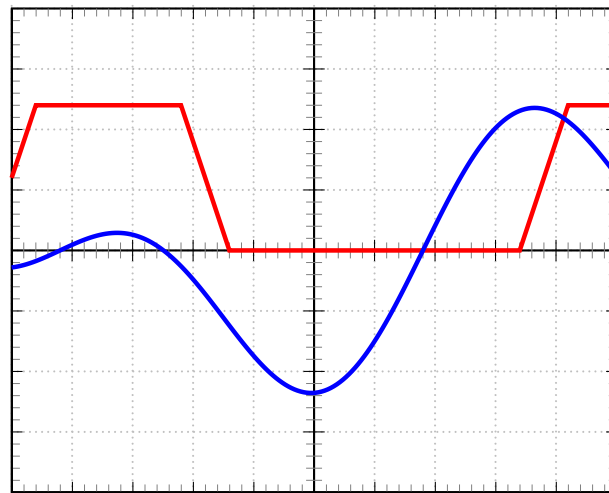
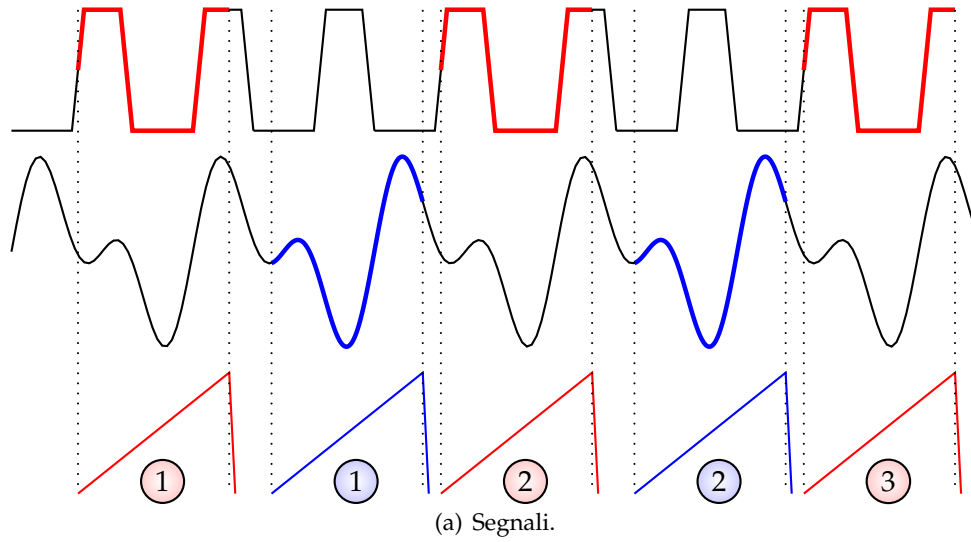


Figura 2.26: Modalità **alternated** con sincronizzazione alternata.

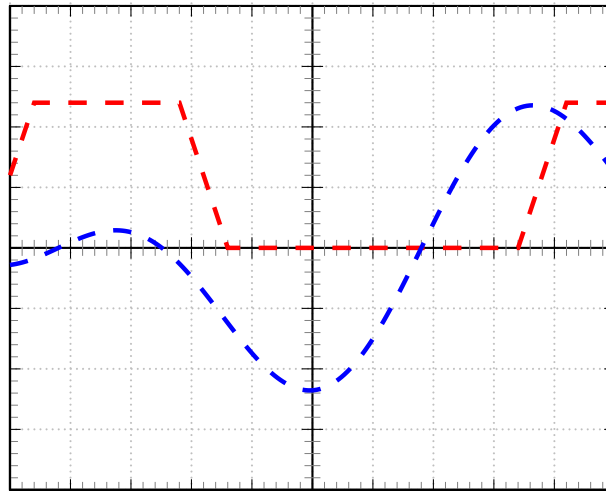


Figura 2.27: Modalità **chopped**.

nota che, pur risolvendo i problemi di sincronizzazione fra segnali non isofrequenziali, la gestione del sincronismo secondo questa modalità causa la perdita dell'informazione sulla fase relativa fra i segnali. Notiamo infine che se il segnale è troppo lento ( $\sim$  Hz), o comunque se l'intervallo temporale di visualizzazione è troppo ampio (ad esempio, dell'ordine del secondo), a causa della limitata persistenza dei fosfori il tempo trascorso fra due spazzolate successive dello stesso segnale potrebbe causare una riduzione sensibile della luminosità della traccia sullo schermo e di conseguenza un fastidioso effetto di sfarfallamento del segnale. In questi casi, la modalità di visualizzazione più adatta è la modalità *chopped*, di seguito descritta.

#### 2.6.5.2 Modalità *chopped*

In questa modalità il fascio elettronico viene dedicato a ciascun segnale per un tempo  $T_s$  molto più piccolo dell'intero tempo di sweep, ovvero dell'intervallo temporale rappresentato sullo schermo. La conseguenza è che la traccia che si forma sullo schermo è formata da una serie di tratti elementari di breve durata (Vedi Fig. 2.27) che poi l'occhio, per la sua limitata capacità di risoluzione spaziale, vedrà come un tratto unico. Ovviamente, affinché la traccia risulti "campionata" correttamente, è necessario che la frequenza di commutazione sia molto maggiore della frequenza dei segnali in ingresso. Peraltro, a causa della elevata velocità di switching fra i due segnali, questa modalità impone che il segnale di trigger debba essere ottenuto sempre dallo stesso canale.

### Bibliografia

- [1] U. Pisani, *Misure Elettroniche*. Politeko Edizioni, 1999.

## Capitolo 3

# Strumentazione numerica per la misura delle ampiezze

Sebbene i dispositivi che nel seguito presenteremo ricadano sotto due diverse denominazioni, ed in particolare “convertitori” e “voltmetri”, tuttavia è da rilevare che essi assolvono alla stessa funzione di misurazione di un segnale d’ingresso di tipo analogico, che per comodità supporremo sempre essere una tensione<sup>1</sup>. Le differenze che fra essi possono essere segnalate sono di natura prettamente circuitale e funzionale, nel senso che entrambe le tipologie di dispositivi avranno come uscita un valore numerico rappresentativo della tensione in ingresso, al quale però giungiamo attraverso strade differenti ovvero secondo due approcci sostanzialmente differenti.

Ben più importante è invece considerare che i convertitori A/D in senso stretto hanno velocità di conversione più elevata dei voltmetri numerici, ma rispetto ad essi hanno il limite di dover operare su valori istantanei e pertanto suscettibili ad un eventuale rumore sovrapposto al segnale. Essi sono usati, ad esempio, negli oscilloscopi numerici per convertire il segnale analogico. È evidente che per consentire la visualizzazione di segnali ad elevato contenuto frequenziale, i convertitori devono essere i più veloci possibile.

I voltmetri numerici, per contro, sono sistemi più complessi dei convertitori (che spesso, come appena detto, sono solo componenti all’interno di architetture più complesse) e all’elevato tempo di misura oppongono una risoluzione elevata e una immunità (reiezione) elevata nei confronti del rumore, in particolare nel caso di voltmetri ad integrazione, oltre alla possibilità di operare elaborazioni sul segnale convertito.

Il panorama sia degli uni che degli altri è certamente vasto e per brevità di discussione si farà riferimento nel seguito solo alle architetture più usate delle due tipologie.

---

<sup>1</sup>È evidente che, qualora si voglia convertire/misurare un segnale di altra natura, ad esempio una corrente, è possibile usare un trasduttore – per esempio, una resistenza di shunt – che riporti il segnale da misurare in una tensione tramite una relazione nota.

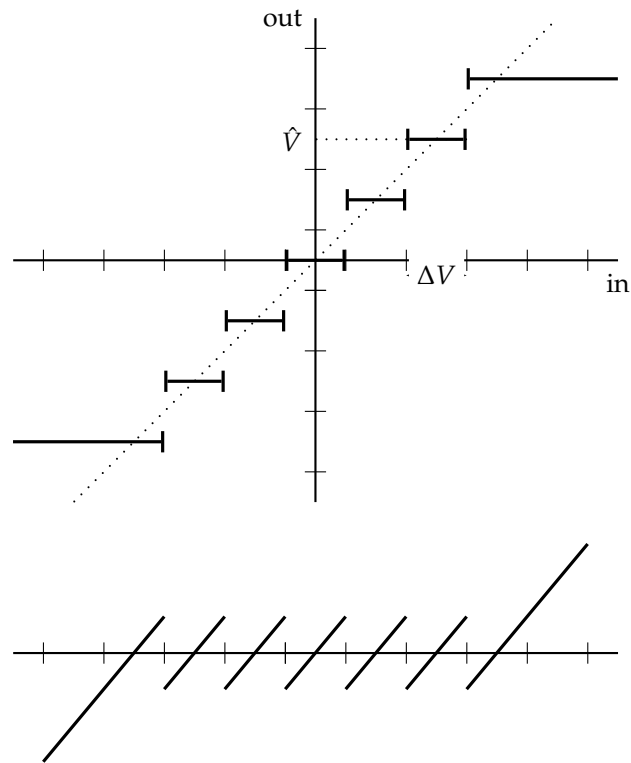


Figura 3.1: Caratteristica di quantizzazione del convertitore flash.

### 3.1 Convertitori analogico/digitale (A/D)

I *convertitori A/D* o *analogico/digitale*<sup>2</sup> sono dispositivi che permettono la conversione di un valore analogico nella sua rappresentazione numerica (solitamente in forma binaria). I più comuni sono quelli *flash* e ad *approssimazioni successive*, i primi eventualmente in configurazione *pipeline*. Caratteristica essenziale di un convertitore è quella di effettuare una *quantizzazione* del campione in ingresso e la successiva *codifica* in binario. La quantizzazione non è altro che la suddivisione dell'asse reale in intervalli (solitamente di ampiezza uguale) a cui viene assegnata la stessa codifica. Ovviamente, codificare un intero intervallo con un solo valore implica una perdita d'informazione, che in termini misuristici si traduce in una riduzione della risoluzione con cui viene effettuata la misura. Solitamente il quantizzatore ha una caratteristica ingresso/uscita come quella mostrata in Fig. 3.1: ad esempio, l'intervallo di ampiezza  $\Delta V$ , detto *intervallo di quantizzazione*, collasserà nel valore  $\hat{V}$ , che sarà rappresentato in forma numerica mediante un opportuno codice binario. Nella stessa figura è riportato anche l'errore massimo

<sup>2</sup>Sebbene il termine *digitale* rientri ormai tra quelli comunemente usati nella lingua italiana, il termine da considerarsi più appropriato è *numerico*

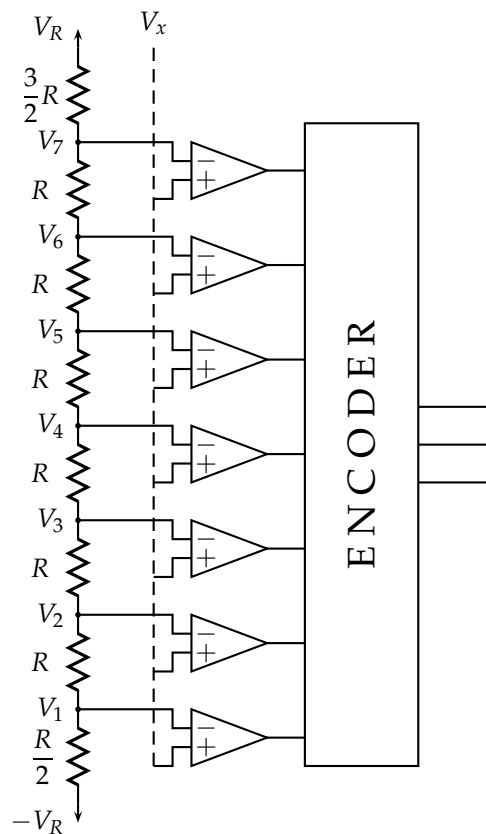


Figura 3.2: Convertitore flash.

che commettiamo nel quantizzare un segnale: se non avessi la quantizzazione, l'uscita sarebbe uguale all'ingresso e la caratteristica sarebbe rappresentata da una retta con pendenza unitaria (rappresentata con la linea punteggiata nella figura in alto). Se invece uso un quantizzatore in cui ogni intervallo è quantizzato mediante il valore medio dell'intervallo stesso, l'errore di quantizzazione è lineare con il misurando, passando da  $-\Delta V/2$  a  $\Delta V/2$ : l'errore massimo di quantizzazione è perciò pari a  $\Delta V/2$ . Non così invece quando il misurando supera i limiti del range di quantizzazione: la necessità di limitare il numero di bit con cui si effettua la codifica del valore quantizzato impone un limite nel numero di possibili livelli in uscita dal quantizzatore. Se il misurando è esterno a tali limiti, l'errore di quantizzazione non è più limitato, perché lo stesso livello di quantizzazione rappresenterà valori in ingresso anche molto lontani da esso.

### 3.1.1 Convertitore Flash

Il primo convertitore di cui ci occupiamo è il convertitore flash, detto anche convertitore parallelo. L'architettura è costituita, se  $N$  è il numero di bit con cui si vuole rappresentare l'uscita, da  $2^N - 1$  comparatori,  $2^N$  resistenze, da una tensione di riferimento

$V_R$  e da un rete combinatoria di codifica. Limitiamoci per comodità ad  $N = 3$  bit per la codifica del segnale d'uscita: avremo 7 comparatori, 6 resistenze di valore  $R$ , una di valore  $R/2$  e una di valore  $3R/2$ . La tensione  $V_x$  viene confrontata con ciascuno dei 7 livelli di soglia  $V_i$ , ottenuti a partire dalla tensione di riferimento mediante il partitore di tensione realizzato con l'impiego della serie di resistenze. I valori di soglia hanno distanza  $\Delta V$  pari alla caduta di potenziale esistente ai capi delle resistenze  $R$ . Innanzitutto, valutiamo la corrente che fluisce nella serie di resistenze:

$$I = \frac{2V_R}{(2^N - 2 + 1/2 + 3/2)R} = \frac{2V_R}{2^N R'} \quad (3.1)$$

da cui la tensione  $\Delta V$  risulta pari a

$$\Delta V = IR = \frac{2V_R}{2^N}. \quad (3.2)$$

Le tensioni di soglia  $\{V_1, \dots, V_{2^N-1}\}$  saranno pertanto di valore pari a:

$$\begin{aligned} V_1 &= -V_R + I \frac{R}{2} = -\frac{7}{8} V_R \\ V_2 &= V_1 + IR = -\frac{5}{8} V_R \\ V_3 &= V_2 + IR = -\frac{3}{8} V_R \\ V_4 &= V_3 + IR = -\frac{1}{8} V_R \\ V_5 &= V_4 + IR = \frac{1}{8} V_R \\ V_6 &= V_5 + IR = \frac{3}{8} V_R \\ V_7 &= V_6 + IR = \frac{5}{8} V_R, \end{aligned} \quad (3.3)$$

e costituiscono i confini fra i diversi intervalli di quantizzazione (vedi Fig. 3.1). La codifica con cui viene rappresentata la tensione quantizzata, determinata dalla tabella di verità implementata dall'encoder, deve essere tale da rappresentare il valore medio di ogni intervallo di quantizzazione. Ad esempio, la codifica relativa all'intervallo di quantizzazione  $[-V_R/8, V_R/8]$  sarà 000, perché essa, pur lasciando i dettagli della decodifica da digitale ad analogico ad una sezione successiva (Sez. 3.2), è rappresentativa del livello analogico  $V = 0$ . In generale, tutti i valori di tensione che cadono fra due livelli di soglia contigui  $V_i$  e  $V_{i+1}$  sono associati al valore analogico centrale dell'intervallo mediante opportuna scelta del codice binario.

Entriamo un po' più nel dettaglio del dispositivo, osservando il tipo di uscita dal parallelo dei componenti. Supponiamo innanzitutto che la caratteristica di uscita  $V_c$  dei comparatori sia la seguente:

$$V_c = \begin{cases} 0 & \text{se } V_x < V_i, \\ 1 & \text{se } V_x > V_i. \end{cases} \quad (3.4)$$

Essi emetteranno un segnale alto quando il valore  $V_x$  è più alto del corrispondente valore di soglia  $V_i$ . Nel caso in cui la tensione d'ingresso ricada, ad esempio, fra  $V_4$  e  $V_5$  tutte le uscite fino al quarto comparatore (contando dal basso) saranno alte, mentre le restanti tre saranno al valore basso. La configurazione d'uscita sarà pertanto 0001111, dove il bit più a destra corrisponde a quello meno significativo, ovvero a quello in uscita dal comparatore  $C_1$ . Notate che le possibili configurazioni di bit costituite dalle sette uscite dei comparatori sono solo otto (0000000, 0000001, ..., 1111111) proprio perché se un'uscita è alta di conseguenza anche le uscite dei comparatori di livello più basso saranno alte. Esiste pertanto una ridondanza di questo "codice a termometro" che viene eliminata dalla macchina combinatoria che codifica le otto possibili configurazioni con solo tre bit, quanti appunto ne servono per una codifica binaria di otto combinazioni.

La velocità di conversione di questi convertitori è dell'ordine dei MHz o al più di qualche GHz, ma con forti limiti di risoluzione. Infatti, già con 6 bit si ha la necessità di usare  $2^6 - 1 = 63$  comparatori e 64 resistenze. Al di là dei problemi di potenza termica che è necessario smaltire, dal punto di vista misuristico si aggiungono altri problemi: 1) innanzitutto è necessario garantire l'uguaglianza di un maggior numero di componenti, come le resistenze  $R$ , e ciò è certamente difficile da raggiungere con incertezze basse; 2) a mano a mano che si riduce la distanza fra le tensioni di soglia, diventa sempre più critico il comportamento dei comparatori, la cui capacità di discriminare fra tensioni più vicine diventa di fondamentale importanza, per cui ad essi sono richieste prestazioni migliori; 3) inoltre, sebbene le resistenze d'ingresso dei singoli comparatori siano di valore elevato, l'impedenza vista da  $V_x$  è data dal parallelo di quella dei comparatori, e pertanto si riduce all'aumentare del numero di bit. Allo stesso modo la capacità complessiva d'ingresso è ben maggiore delle singole capacità dei comparatori in quanto data dalla loro somma. Le variazioni di  $R$ ,  $C$  e del loro prodotto  $RC$  induce nel complesso un comportamento passa-basso, limitando quindi la massima velocità di conversione del dispositivo.

### 3.1.2 Convertitori in pipeline

Le difficoltà causate dall'aumento nel numero dei bit, prima fra tutte il raddoppio del numero di componenti per ogni bit in più di risoluzione, porta all'impiego di soluzioni differenti quando si vuole ottenere un aumento di risoluzione nella conversione A/D. Nella Fig. 3.3 è riportata un'architettura detta a *pipeline* nella quale la conversione avviene mediante due passaggi. Supponiamo di voler realizzare un convertitore a 8 bit: nel primo passaggio, il misurando viene convertito con 4 bit, che costituiranno i 4 bit più significativi della conversione finale. Tale rappresentazione viene poi convertita nuovamente in analogico mediante un convertitore D/A a 4 bit. Il valore così ottenuto viene sottratto al misurando, dando così l'errore della codifica a 4 bit rispetto al misurando. Tale errore deve essere amplificato di un fattore  $2^4$ , e successivamente convertito mediante un altro convertitore A/D a 4 bit. L'amplificazione è necessaria per innalzare l'errore (che costituisce il misurando per il secondo blocco di conversione) ad un valore

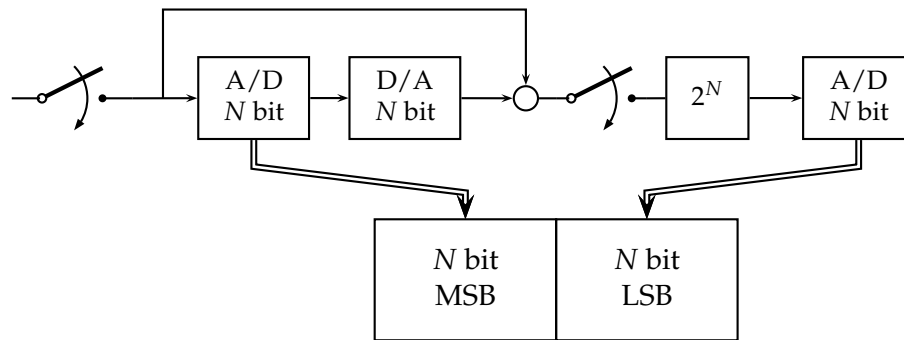


Figura 3.3: Schema di un convertitore in configurazione *pipeline*.

tale da essere convertito nelle migliori condizioni possibili, ovvero ad un valore quanto più vicino possibile al fondoscala.

Qualora utilizzassimo un unico circuito S&H all'ingresso di tutta la catena di conversione, operando quindi una conversione in serie, avremmo un utilizzo non ottimizzato dei due convertitori in quanto il primo blocco non lavorerebbe mentre il secondo sta operando la conversione. Per aumentare la produttività del convertitore, è possibile inserire un secondo circuito S&H subito a valle del sottrattore, riuscendo in tal modo a far lavorare i due blocchi su due misurandi diversi: mentre il secondo blocco converte un campione, il primo blocco anziché restare in attesa, può lavorare su un campione successivo: in tal modo la frequenza di conversione ne risulta raddoppiata.

### 3.1.3 Convertitore ad approssimazioni successive (SAR)

Un secondo tipo di convertitore A/D è quello ad approssimazioni successive (o SAR, dal nome di uno dei componenti) che ha tempi di elaborazione più lunghi rispetto al flash ma consente l'elaborazione con una risoluzione maggiore al prezzo di un piccolo incremento di complessità circuitale e tempi di conversione. Infatti, essa avviene utilizzando gli stessi componenti più volte fino a determinare il valore finale della codifica, procedendo in serie dalle cifre più significative a quelle meno significative. Lo schema è illustrato in Fig 3.4. Esso è composto da:

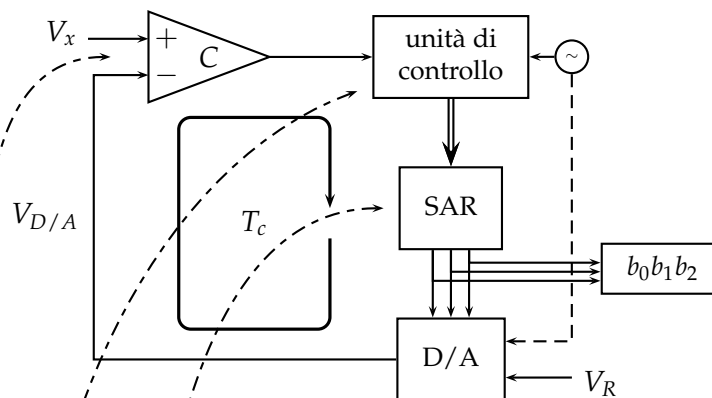


Figura 3.4: Schema del convertitore ad approssimazioni successive (SAR).

- un *comparatore* per il confronto della tensione d'ingresso con la tensione analogica corrispondente alla rappresentazione binaria dell'approssimazione corrente;
- una *unità di controllo* che modifica lo stato del SAR in base all'esito del confronto effettuato dal comparatore;
- un *registro ad approssimazioni successive* (SAR, *successive approximation register*) che viene comandato da un'unità di controllo e che ad ogni ciclo presenta in uscita l'approssimazione corrente della tensione d'ingresso;
- un *convertitore D/A*, per convertire la rappresentazione binaria in uscita dal SAR in forma analogica per il successivo confronto con la tensione d'ingresso.

Per illustrare il funzionamento del convertitore usiamo un diagramma di stato (Fig. 3.5) e un grafico dell'andamento temporale dell'uscita (Fig. 3.6), supponendo per comodità che la conversione sia effettuata con  $N = 3$  bit e che il convertitore sia unipolare, ovvero che possa convertire solo tensioni positive. All'istante iniziale è presente sul bus di uscita del SAR la configurazione 100, che di fatto costituisce la prima approssimazione del misurando  $V_x$ . Tale stima viene convertita nuovamente in forma analogica mediante il

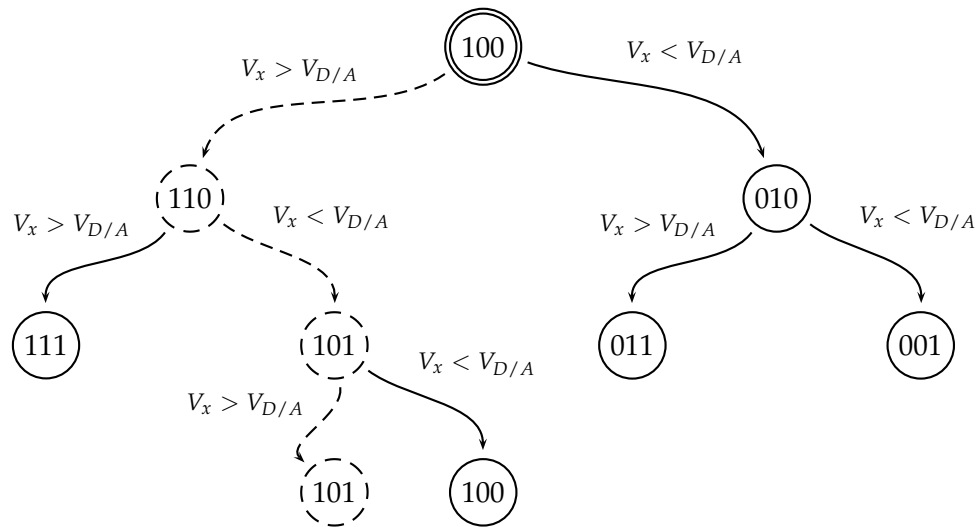


Figura 3.5: Diagramma di flusso del convertitore SAR.

$D/A$ , che opera secondo la relazione:

$$V_{D/A} = V_R \sum_{i=0}^{N-1} \frac{b_i}{2^{i+1}} = V_R \left[ \frac{b_0}{2} + \frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{8} \right], \quad (3.5)$$

dove  $b_0$  è il bit più significativo. Al primo passo, poichè  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 0$ , si ha  $V_{D/A} = V_R/2$ . Fissiamo per comodità  $V_R = 10$  V: avremo che al primo passo sarà  $V_{D/A} = 10/2 = 5$  V. Tale tensione viene confrontata con la tensione di ingresso  $V_x$ : supponiamo che essa sia pari a  $V_x = 7.233$  V, ovvero compresa nell'intervallo  $[5 V_R/8; 6 V_R/8] = [6.25; 7.5]$  V, e che la caratteristica ingresso/uscita del comparatore sia quella riportata nell'eq. (3.4). Poiché risulta  $V_x > V_{D/A}$  il comparatore avrà uscita alta. L'unità di controllo invierà al SAR il comando per tenere alto il bit  $b_0$ , quello più significativo. Inoltre, viene inviato il comando di alzare il bit  $b_1$ . Lo stato del SAR, pertanto, passa da 100 a 110 (linea tratteggiata in Fig. 3.5). Se fosse stato invece  $V_x < V_{D/A}$ , l'unità di controllo avrebbe comandato il SAR di abbassare il bit  $b_0$  e di alzare il bit  $b_1$ , spostando lo stato del SAR verso l'altra configurazione (010).

In termini generali, ad ogni confronto, il bit successivo a quello sotto indagine viene alzato, mentre quello sotto indagine viene mantenuto alto o abbassato a seconda dell'esito del confronto.

Una volta cambiato o mantenuto il valore di un bit, esso non cambia più perché l'attenzione viene spostata sul bit successivo, e pertanto esso risulta determinato una volta per tutte. Tutto ciò avviene in un tempo pari a  $T_c$ , ovvero la somma dei tempi necessari al segnale binario per essere riconvertito in analogico, essere confrontato con il segnale in ingresso e per permettere all'unità di controllo di effettuare la decisione e

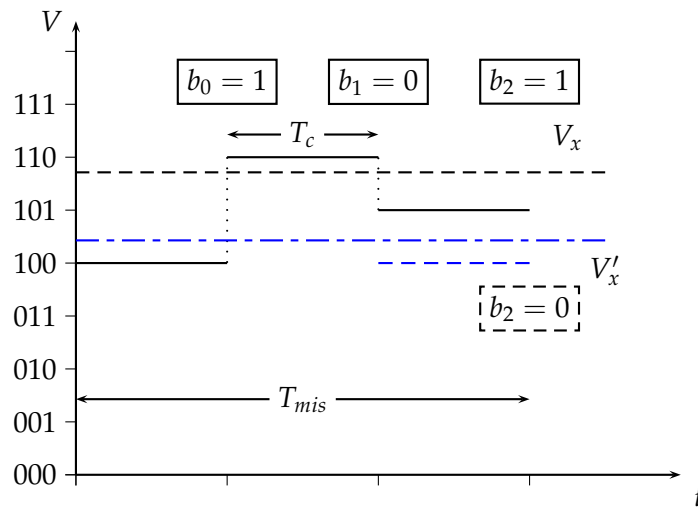


Figura 3.6: Diagramma temporale di funzionamento del SAR.

al SAR per cambiare il suo stato. La temporizzazione viene realizzata tramite il clock il cui periodo è appunto  $T_c$  e che definisce l'istante il cui il controller invia il comando al SAR e quello in cui il D/A effettua la conversione.

Per il bit  $b_1$  la procedura è del tutto analoga: la configurazione 110 viene convertita in analogico nella grandezza  $V_{D/A} = V_R [1/2 + 1/4] = 3 V_R/4 = 7,5 \text{ V}$  e comparata con il valore in ingresso  $V_x$ . Poichè in questo caso è  $V_x < V_{D/A}$  e l'uscita del comparatore sarà bassa e pertanto il bit  $b_1$  sarà abbassato. Il bit  $b_2$  viene invece alzato e pertanto in uscita, dopo un ulteriore intervallo si ha la configurazione 101 (vedi Fig. 3.5), e da questo momento in poi il bit  $b_1$  non varierà più. Si passa quindi alla determinazione del bit  $b_2$ , quello meno significativo, in modo analogo agli altri: esso verrà mantenuto ad 1 perché il confronto fra  $V_x$  e  $V_{D/A} = V_R [1/2 + 1/8] = 5 V_R/8 = 6,25 \text{ V}$  determinerà che il misurando è maggiore dell'approssimazione corrente.

È d'obbligo fare un commento: l'approssimazione del misurando mediante la configurazione 101 corrisponde al valore analogico  $6,25 \text{ V}$ , che dista dal misurando  $0,95 \text{ V}$ . Dal momento che  $\Delta V$  è pari a  $1,25 \text{ V}$ , l'errore commesso è ben maggiore di quello atteso, pari a  $\Delta V/2 = 0,635 \text{ V}$ . Come si spiega ciò? Molto semplicemente, a causa del fatto che la codifica binaria, in considerazione della successiva caratteristica di decodifica D/A, non rispetta la richiesta di essere rappresentativa del valore medio dell'intervallo di quantizzazione: ad esempio, il valore 0 non rappresenta la codifica di  $0,635 \text{ V}$ , ovvero del valore centrale del primo intervallo di quantizzazione, ma il valore minimo  $V = 0$ . Ciò implica che l'errore massimo che io commetto sarà pari a  $\Delta V$  anzichè  $\Delta V/2$ .

La Fig. 3.6 consente di osservare l'evoluzione temporale dell'uscita dal convertitore. Essa è del tutto analoga al diagramma di stato, ma mette in evidenza due elementi:

1. sebbene la conversione D/A associ un unico valore analogico ad una rappresentazione binaria, non è altrettanto vero che un codice binario rappresenti un unico valore analogico. Pur rimandando i dettagli alla precedente trattazione sulla

quantizzazione, è importante comunque sottolineare che ogni codice binario rappresenta un intero intervallo di quantizzazione. Non deve pertanto sorprendere il fatto che la rappresentazione analogica dell'ultima approssimazione 101 non corrisponda al valore  $V_x$  da misurare: ciò che deve interessare è invece che l'errore con cui rappresento la tensione  $V_x$  sia minore di un valore massimo noto a partire dalla caratteristica ingresso/uscita del quantizzatore;

2. l'uscita non varia istantaneamente, a causa dei tempi di elaborazione e propagazione del segnale nei diversi componenti: dopo un tempo pari a  $T_c$  certamente l'uscita avrà raggiunto lo stato finale, ma è necessario considerare anche un transitorio iniziale.

Le architetture SAR consentono un aumento nel numero di bit in quanto il numero di componenti non è legato esponenzialmente al numero di bit di risoluzione. Ne viene però penalizzata la velocità di elaborazione in quanto i bit del risultato non sono determinati in parallelo come nel flash ma in modo sequenziale in un tempo che è pari a  $T_{mis} = NT_c$ , ovvero direttamente proporzionale al numero di bit  $N$ . Attualmente convertitori a 14 bit sono disponibili sul mercato a prezzi accessibili, con frequenze di conversione dell'ordine delle centinaia di kHz.

### 3.1.4 Convertitori multiplexati

## 3.2 Convertitori digitale/analogico (D/A)

Oltre ai convertitori A/D è spesso necessario convertire una grandezza da numerica ad analogica: succede nel convertitore ad approssimazioni successive, dove è necessario convertire l'attuale rappresentazione numerica del misurando in un corrispondente analogico, ma può succedere anche in alcuni oscilloscopi numerici in cui la visualizzazione avviene mediante un tubo a raggi catodici, e quindi è di tipo analogico. Nel seguito vedremo due architetture per la conversione, di cui evidenzieremo le differenze e soprattutto i vantaggi.

### 3.2.1 Convertitore a R pesate

Lo schema in Fig. 3.7 rappresenta una soluzione circuitale per la conversione di un set di bit  $b_1, \dots, b_N$  nel corrispondente valore analogico. La tensione  $V_R$  fa circolare una corrente nel generico ramo  $i$  solo se l'interruttore, rappresentativo del valore del bit  $b_i$ , è chiuso, ovvero se il bit  $i$ -mo è alto. In tale caso, la corrente è pari a  $I_i = V_R/2^i R$ . Nel complesso, data una configurazione qualsiasi di bit, la tensione all'uscita dell'amplificatore in configurazione di sommatore, è pari a:

$$V_{D/A} = -IR = -R \sum_{i=1}^N I_i b_i = -R \sum_{i=1}^N b_i \frac{V_R}{2^i R} = -V_R \sum_{i=1}^N \frac{b_i}{2^i}. \quad (3.6)$$

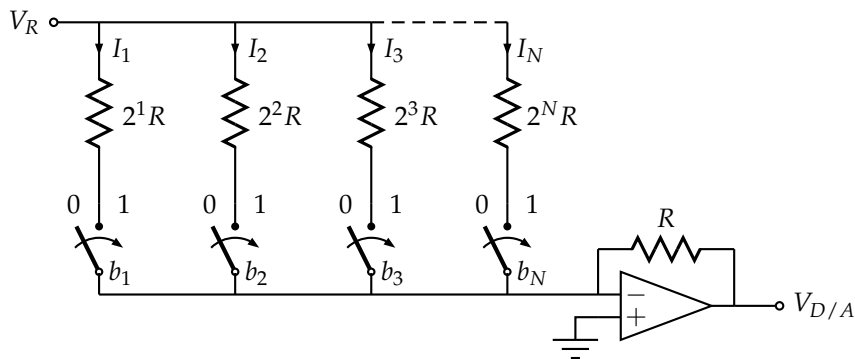


Figura 3.7: Convertitore a resistenze pesate.

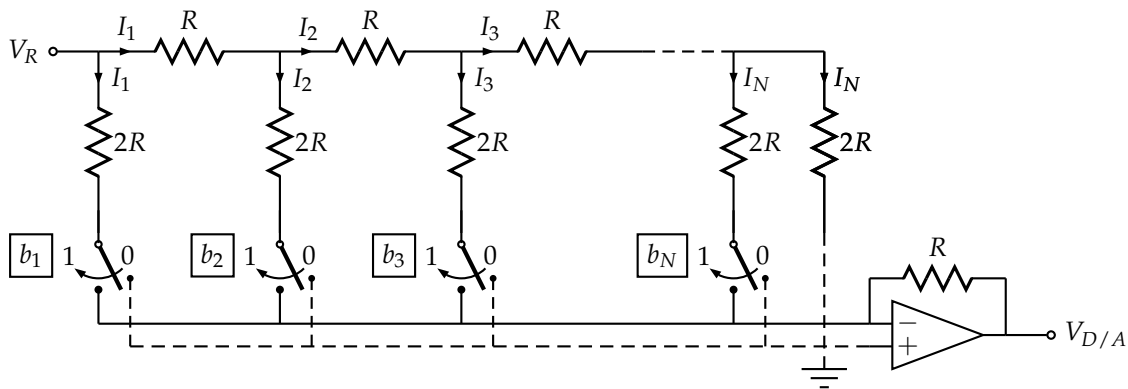


Figura 3.8: Convertitore R/2R.

Mettiamo in evidenza alcune caratteristiche di questo convertitore: innanzitutto, c'è da dire che la resistenza d'ingresso vista dal generatore  $V_R$  varia con la configurazione di bit da convertire, e questo è un problema in quanto la stessa tensione  $V_R$  potrebbe variare al variare della corrente erogata, rendendo incerto il livello di uscita  $V_{D/A}$ . Inoltre, mantenere lo stesso valore di incertezza su intervalli di valori di resistenza così ampi come quelli usati in questo convertitore è molto difficile, e ciò ha un impatto ovvio ed evidente sul funzionamento del dispositivo.

### 3.2.2 Convertitore R/2R

Nella Fig. 3.8 è mostrato lo schema di un convertitore detto R/2R perché in esso sono presenti solo resistenze di due valori. La particolarità del convertitore è che, indipendentemente dal valore del bit  $b_i$ , in ciascuna resistenza scorrerà sempre corrente: se il bit è alto, la corrente fluirà al morsetto d'ingresso invertente dell'amplificatore differenziale attraverso il percorso a tratto continuo, altrimenti scorrerà verso terra lungo il per-

corso tratteggiato. In entrambi i casi, per il corto circuito virtuale ai morsetti d'ingresso dell'amplificatore, la corrente fluirà verso un morsetto a potenziale nullo.

Per questo motivo, la resistenza vista dalla tensione  $V_R$  è sempre la stessa, pari a  $R$ . Infatti, guardando l'impedenza d'ingresso della sezione in cui si trova  $b_n$  vediamo che essa è pari al parallelo fra due resistenze di valore  $2R$ , e che ad essa si aggiunge il valore  $R$  della resistenza supplementare. Procedendo verso sinistra, fino alla sezione d'ingresso vista da  $V_R$  ci accorgiamo che la resistenza complessiva è proprio pari a  $R$ , indipendentemente dalla codifica binaria da convertire. Perciò, la corrente che fluisce nel ramo del bit  $b_1$  è pari a  $I_1 = I/2$ , dove  $I = V_R/R$ . Analogamente, si avrà la corrente  $I_2 = I_1/2$ , e così via fino al ramo  $N$ -mo in cui la corrente vale  $I_N = I/2^N$ , dove  $N$  è il numero di bit del convertitore. Tutte le correnti che, per il valore del bit corrispondente, fluiscono nell'amplificatore differenziale, in uscita daranno luogo alla tensione

$$V_{D/A} = -IR = -R \sum_{i=1}^N I_i b_i = -R \sum_{i=1}^N b_i \frac{V_R/R}{2^i} = -V_R \sum_{i=1}^N \frac{b_i}{2^i}, \quad (3.7)$$

che è del tutto analoga alla (3.6).

Il vantaggio evidente di questa architettura rispetto a quella a resistenze pesate è dato dall'utilizzo di resistenze di due soli valori, anziché di valori proporzionali a  $2^i$  come nell'altro caso, riuscendo in tal modo a rispettare le specifiche di incertezza su tali valori, che invece sarebbe stato più critico verificare per resistenze di valore così diverso come nel caso precedente.

### 3.3 Voltmetri numerici

In questa sezione saranno presentate le architetture più diffuse per i voltmetri numerici. Alcune sono ampiamente utilizzate nell'implementazione di voltmetri commerciali; altre, non più impiegate, vengono comunque illustrate a scopo didattico per un duplice motivo: da una parte, per fornire un approccio graduale alla comprensione del funzionamento delle architetture più complesse; dall'altra, per evidenziare i miglioramenti apportati dalle soluzioni tecnologicamente più avanzate.

Nel seguito distingueremo i voltmetri in due grandi famiglie: i voltmetri a **valore istantaneo** e quelli **ad integrazione**. Pur posticipando il confronto fra le caratteristiche delle due famiglie alla sezione 3.3.5, anticipiamo che, come è facile intuire dal nome dato, i voltmetri a valore istantaneo forniscono il valore che il misurando assume in un preciso istante temporale, mentre i voltmetri ad integrazione effettuano preliminarmente un'integrazione sulla grandezza d'ingresso cosicché il risultato della misura è legato al valore medio del misurando nell'intervallo d'integrazione.

#### 3.3.1 Voltmetro a singola rampa (o a conversione tensione/tempo)

Lo schema del voltmetro a singola rampa è mostrato nella Fig. 3.9. Esso è composto da:

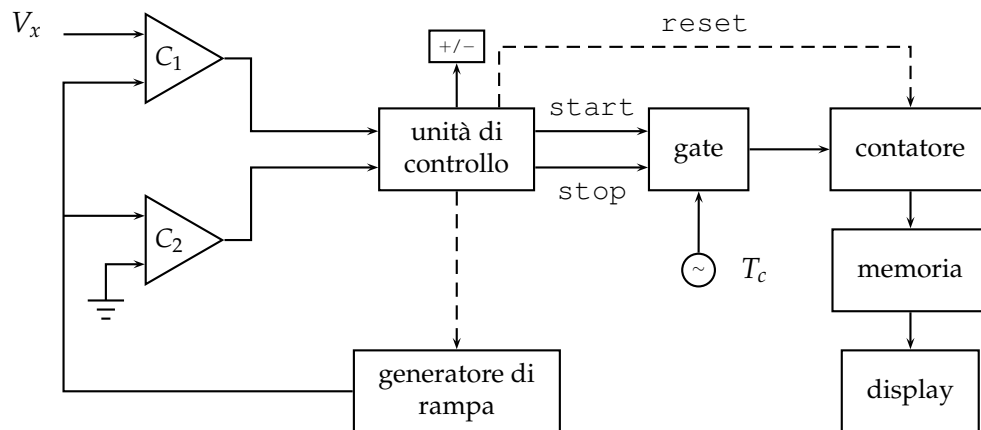


Figura 3.9: Schema a blocchi del voltmetro a singola rampa.

- un *generatore di rampa* la cui uscita è un segnale variabile linearmente fra i due estremi  $V_{FS}$  e  $-V_{FS}$ ;
- due *comparatori* ( $C_1$  e  $C_2$ ) che determinano gli istanti in cui la rampa di tensione ad un ingresso eguaglia la tensione posta all'altro ingresso, rispettivamente pari alla tensione incognita  $V_x$  e quella di terra;
- una *gate* che fa passare gli impulsi di un *clock* che vengono poi indirizzati verso un *contatore numerico*;
- un'*unità di controllo* che sovrintende alle operazioni di conversione dando il via alla generazione della rampa, che apre e chiude la gate in funzione delle uscite dei comparatori, che resetta il contatore ad ogni nuova conversione, e che determina il segno della tensione incognita;
- un dispositivo di memorizzazione e visualizzazione del risultato della misurazione.

Il funzionamento del voltmetro è illustrato mediante il diagramma temporale riportato nella Fig. 3.10. Supponiamo che la tensione da misurare sia  $V_x > 0$ : quando l'unità di controllo rileva il comando di inizio misura impartito dall'utente, dà l'impulso di inizio generazione della rampa, che supponiamo essere con pendenza negativa<sup>3</sup>. All'istante  $t = T_{on}$  il comparatore  $C_1$  rileva l'uguaglianza fra i valori della tensione  $V_x$  e della rampa e modifica di conseguenza il valore d'uscita. Il cambiamento di stato è rilevato dall'unità di controllo che invia il segnale di *start* alla gate che pertanto fa passare gli impulsi che vanno ad incrementare il valore contenuto nel contatore numerico. Al

<sup>3</sup>La pendenza della rampa è impostata *una tantum* dal costruttore dello strumento e non è modificabile dall'utente.

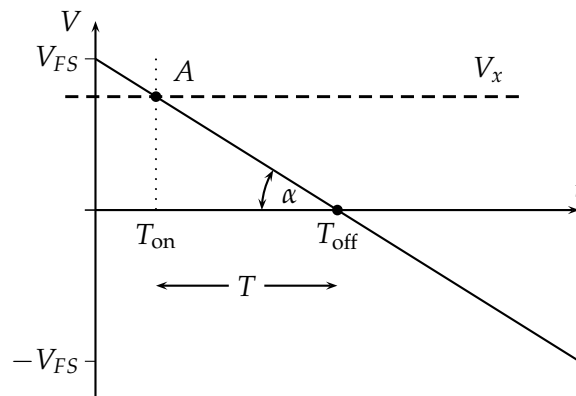


Figura 3.10: Funzionamento del voltmetro a singola rampa.

tempo  $t = T_{\text{off}}$ , quando la rampa incontra lo zero, è il comparatore  $C_2$  a cambiare stato: l'unità di controllo rileva tale cambiamento e chiude la gate mediante il segnale di stop, dando termine al conteggio degli impulsi. L'unità di controllo determina il segno della tensione incognita valutando quale fra i due comparatori abbia cambiato stato per primo: nel caso in esame, il fatto che  $C_1$  cambi stato prima di  $C_2$  indica che il segno della tensione incognita è positivo. Il segno risulta invece negativo, come è atteso, se cambia stato per primo il comparatore  $C_2$ <sup>4</sup>.

Osservando il triangolo  $\triangle AT_{\text{on}}T_{\text{off}}$  è facile ricavare l'espressione che lega la tensione incognita  $V_x$  all'intervallo di tempo  $T = T_{\text{off}} - T_{\text{on}}$ :

$$V_x = T \tan \alpha \stackrel{q}{=} \boxed{N_x T_c \tan \alpha}, \quad (3.8)$$

dove  $N_x$  è il numero di impulsi contati nell'intervallo  $T$ ,  $T_c$  è il periodo del clock,  $\tan \alpha$  è la pendenza della rampa.

### 3.3.1.1 L'errore di conteggio

Il simbolo  $\stackrel{q}{=}$  nella (3.8) è da leggersi *uguale nel senso della quantizzazione*. La misura di  $T$  mediante il conteggio del numero di impulsi di clock di durata  $T_c$  che passano attraverso la gate durante la sua apertura fa sì che  $T$  sia espresso sempre come multiplo intero dell'intervallo di clock: il suo valore, in pratica, risulta *quantizzato* rispetto all'intervallo di clock. In una situazione reale, però, non è detto che la durata dell'intervallo  $T$  sia un multiplo intero del periodo di clock, anzi tale probabilità è alquanto bassa: l'indicazione di  $T$  come multiplo  $N_x$  di  $T_c$  non tiene conto infatti delle frazioni di  $T_c$  che potrebbero esistere fra l'apertura e la chiusura della gate e gli istanti in cui vengono contati il primo e l'ultimo impulso, anche per la mancanza di sincronismo fra il clock e  $T_{\text{on}}$  e  $T_{\text{off}}$ . Di tali

<sup>4</sup>Se la rampa ha pendenza positiva, le considerazioni fatte vanno invertite:  $V_x > 0$  implica l'apertura prima di  $C_2$  e poi di  $C_1$ ; viceversa se  $V_x < 0$ .

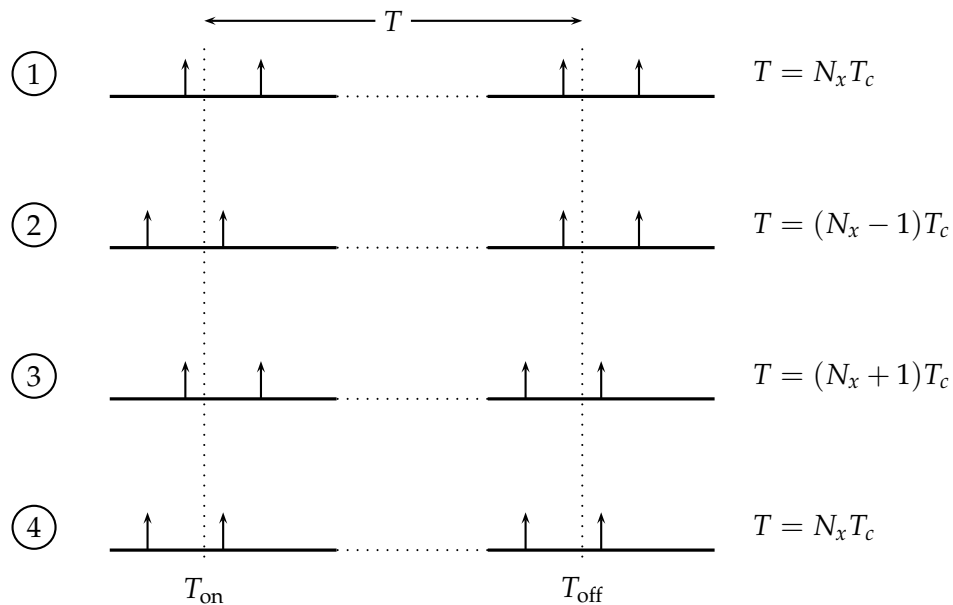


Figura 3.11: Effetto dell'errore di conteggio sulla misura di  $T$ .

aliquote si può tenere conto mediante un'opportuna correzione dell'espressione di  $T$ :

$$T = (N_x \pm \alpha) T_c, \quad (3.9)$$

dove  $\alpha$  è la frazione di periodo  $T_c$  in difetto o in eccesso rispetto alla reale durata dell'intervallo di misura. L'espressione precedente ritorna ad essere una formula esatta, da cui il segno di uguaglianza non quantizzata fra l'intervallo  $T$  e un multiplo (questa volta non intero) del periodo di clock  $T_c$ . Possiamo valutare il valore massimo che assumere  $\alpha$  facendo riferimento alla Fig. 3.11. Poniamoci per semplicità nei casi limite in cui gli impulsi di clock arrivino subito prima o subito dopo l'istante  $T_{\text{on}}$  di apertura e  $T_{\text{off}}$  di chiusura della gate, ovvero di inizio e fine conteggio. Si ottengono nel complesso quattro diverse configurazioni, ciascuna rappresentata in figura e commentata di seguito:

1. l'apertura della gate avviene subito dopo l'arrivo di un impulso, per cui il primo impulso contato rappresenta *praticamente* tutto l'intervallo  $T_c$ ; la chiusura della gate invece avviene subito dopo l'ultimo impulso contato, per cui l'errore è trascurabile anche in questo caso. Nel complesso l'errore di conteggio è nullo, e in questo caso si ha:

$$T = N_x T_c, \quad (3.10)$$

e quindi l'indicazione del conteggio risulta esatta;

2. il primo impulso da contare arriva subito dopo l'istante di apertura della gate, per cui viene contato un impulso di clock anche se nella realtà l'intervallo fra  $T_{\text{on}}$

e l'arrivo dell'impulso è praticamente nullo. Come al punto 1., invece, la chiusura della gate avviene subito dopo l'ultimo impulso contato, per cui la frazione di periodo non misurata è trascurabile. Si può perciò scrivere:

$$T = (N_x - 1)T_c, \quad (3.11)$$

in quanto la correzione dovrà tenere conto della sovrastima di  $T$  dovuta al conteggio del primo impulso;

3. come nel caso 1. l'apertura avviene subito dopo l'arrivo di un impulso, mentre la chiusura avviene subito prima dell'arrivo di un impulso, che perciò non viene contato. Ciò implica che esiste un intervallo di ampiezza praticamente pari a  $T_c$  che non viene tenuto in considerazione nella determinazione della durata di  $T$  e che dovrà essere aggiunto al numero di impulsi memorizzato nel contatore. Sarà pertanto:

$$T = (N_x + 1)T_c; \quad (3.12)$$

4. nell'ultimo caso, non c'è errore di conteggio nè sull'istante di apertura della gate, analogamente a quanto avviene al caso 2., nè sull'istante di chiusura, come nel caso 3.. Nel complesso, la situazione è analoga rispetto al caso 1., ma con errori di segno opposto: come succedeva in 1., essi si compensano e la misura effettuata tramite il contatore risulta priva di errori. Si ottiene pertanto anche per questa situazione:

$$T = N_x T_c. \quad (3.13)$$

### 3.3.1.2 Valutazione dell'incertezza

Per valutare l'incertezza del voltmetro a singola rampa possiamo affidarci ad un approccio deterministico che ci consente di avere una notazione più semplice, che peraltro si alleggerisce ulteriormente se presentiamo l'incertezza in termini *relativi*: poiché la relazione fra  $V_x$  e  $T$  contenuta in (3.8) di tipo moltiplicativo, l'incertezza relativa sarà pari alla somma delle incertezze relative dei singoli fattori (vedi 1.13 a pagina 13):

$$\left| \frac{\Delta V_x}{V_x} \right| = \left| \frac{\Delta \tan \alpha}{\tan \alpha} \right| + \left| \frac{\Delta T_c}{T_c} \right| + \frac{1}{N_x}, \quad (3.14)$$

in cui

- $|\Delta \tan \alpha / \tan \alpha|$  è il contributo dato dalla *stabilità della rampa*: la relazione in (3.8), ottenuta in ipotesi di ideale linearità della rampa, risulta affetta da un contributo di incertezza la cui entità dipende dal grado di affidabilità di questa ipotesi;
- $|\Delta T_c / T_c|$  è il contributo dato dall'incertezza sulla durata del periodo di clock, ovvero dalla *stabilità del clock*. Per diminuire l'entità di tale contributo si adottano oscillatori al quarzo (ne esistono di particolarmente stabili a frequenze intorno ai 10 MHz), eventualmente termostatati per minimizzare gli effetti dalla temperatura;

- $1/N_x$  è il contributo dovuto all'*errore di conteggio*, trattato in dettaglio nella precedente Sez. 3.3.1.1.

Dalla (3.14) si evidenzia che per ridurre l'incertezza è necessario impiegare generatori di qualità migliore per garantire la costanza nel tempo (stabilità) della pendenza della rampa, e l'utilizzo di clock ad elevata stabilità. Un ulteriore miglioramento deriva dall'aumento del numero di impulsi contati  $N_x$ , perché si riduce il contributo relativo all'errore di conteggio. Per giungere a ciò, escludendo la riduzione del periodo di clock  $T_c$  poiché imposto da altre esigenze di stabilità, quali quelle riportate al precedente punto 3.3.1.2, si può pensare in linea di principio di intervenire sulla pendenza della rampa: riducendo infatti il valore di  $\tan \alpha$  si allontana l'istante  $t = T_{\text{off}}$  di chiusura della gate, aumentando di conseguenza l'intervallo  $T$  e quindi il numero di impulsi  $N_x$ . Tuttavia, a causa del fatto che il comparatore presenta maggiore incertezza nella rilevazione dell'istante in cui si realizza l'uguaglianza fra le tensioni d'ingresso quando la pendenza si riduce, non sempre tale soluzione appare convincente e conveniente.

Vale la pena far notare che poichè l'incertezza è pari alla somma di tre diversi contributi, non ha senso ridurre uno all'infinito dal momento che ad un certo punto esso assumerà un valore minore della somma degli altri due. Da quel momento in poi, ridurre ulteriormente significa spendere risorse senza ottenere un risultato apprezzabile in termini di effettivo miglioramento dell'incertezza di misura.

### 3.3.2 Voltmetro a conversione tensione/frequenza

Il primo voltmetro ad integrazione che presentiamo è il voltmetro a conversione tensione/frequenza, detto anche più semplicemente voltmetro ad integrazione, poichè è stato storicamente il primo ad impiegare un integratore al suo interno, dando successivamente il nome alla famiglia di misuratori basati sullo stesso principio. Lo schema è riportato in Fig. 3.12, ed è composto da un amplificatore operazionale in configurazione di integratore che riceve in ingresso la tensione  $V_x$  attraverso la resistenza  $R_x$  e un treno di impulsi di ampiezza  $A$  e durata temporale  $\tau$  attraverso la resistenza  $R_i$ . L'uscita dell'integratore va in ingresso ad un comparatore il cui secondo ingresso è fisso ad una tensione di soglia  $V_s$ , e ad un circuito che misura la frequenza del segnale.

Per illustrarne il funzionamento, facciamo riferimento alla Fig. 3.13. All'istante iniziale  $t = 0$  la tensione d'uscita dall'integratore, in modulo pari alla tensione sul condensatore  $C$ , è pari a  $V_{\text{out}}(t = 0) = 0$  grazie alla presenza dell'interruttore in parallelo a  $C$  che garantisce la scarica verso terra di un'eventuale tensione residua presente ai capi del condensatore stesso. Quando la misura comincia, l'interruttore si apre, e la  $V_{\text{out}}$  comincia a sentire l'effetto di  $V_x$ . La tensione incognita, infatti, genera una corrente  $I_x = V_x/R_x$  che scorre tutta nel ramo di retroazione attraverso  $C$  perché l'elevata impedenza d'ingresso dell'amplificatore impedisce l'ingresso nel morsetto non invertente. La tensione  $V_c$  che si genera su  $C$ , e quindi la tensione di uscita  $V_{\text{out}}$  sarà pertanto:

$$V_c = -I_x \frac{1}{j\omega C} = -\frac{1}{j\omega} \frac{V_x}{RC}, \quad (3.15)$$

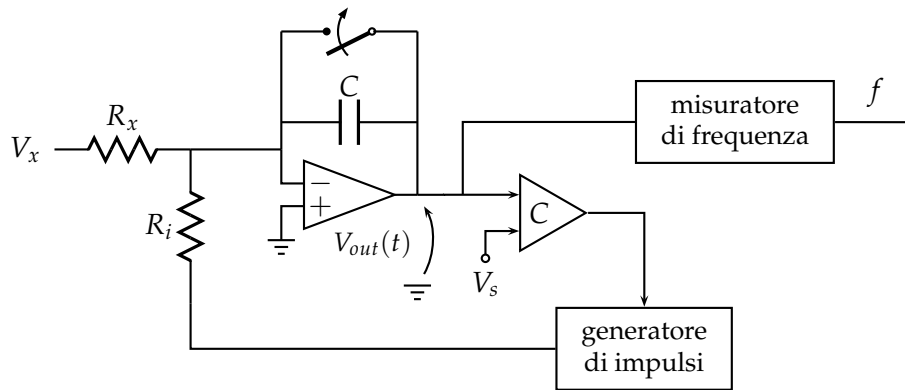


Figura 3.12: Schema a blocchi del voltmetro ad integrazione

dove il segno meno (–) è dovuto al fatto che tensione e corrente del condensatore hanno lo stesso verso. Trasportando la (3.15) nel dominio del tempo, ricordando che la divisione per  $j\omega$  corrisponde ad un'integrazione, abbiamo:

$$V_{out}(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t V_x d\tau + V_{out}(0). \quad (3.16)$$

Supponiamo che la tensione  $V_x$  sia costante e positiva: l'uscita sarà evidentemente una rampa decrescente. L'integrazione procede finché la  $V_{out}$  non raggiunge il livello  $V_s$ , evento che viene segnalato dal comparatore attraverso un cambiamento di stato. La variazione del valore d'uscita del comparatore fa sì che il generatore di impulsi emetta un impulso di ampiezza  $A$  e durata  $\tau$  che, applicato alla resistenza  $R_i$ , dà un contributo addizionale alla corrente che circola nel ramo di retroazione del circuito integratore. La polarità dell'impulso è opposta a quella del segnale d'ingresso in modo tale che anche la corrente ad esso associato sia di segno opposto a quella associata a  $V_x$ . L'ampiezza  $A$  deve essere tale che la rampa in uscita sia di pendenza positiva (in generale, di segno opposto a quello determinato dal segnale d'ingresso). Affinchè ciò succeda per tutti i possibili valori di tensione incognita d'ingresso, è evidente che l'ampiezza  $A$  deve essere almeno pari al valore di fondo scala del voltmetro, ovvero all'ampiezza massima del segnale che il dispositivo può misurare.

Una volta esauritosi il contributo dell'impulso, dopo un intervallo  $\tau$ , la corrente  $I_x$  ritorna ad essere l'unica a caricare il condensatore, e la rampa pertanto ritorna ad essere decrescente: un nuovo impulso viene generato quando essa torna ad eguagliare la tensione di soglia  $V_s$ , ed il ciclo ricomincia. Nel complesso, se la tensione  $V_x$  si mantiene costante durante tutta la misura, in uscita dall'integratore si ottiene un segnale a dente di sega (vedi Fig. 3.13) di frequenza  $f$  che può essere misurata per via diretta.

Per ricavare la relazione che lega  $V_x$  a  $f$  osserviamo l'andamento della tensione tra i due istanti consecutivi in cui la tensione  $V_{out}(t)$  raggiunge la soglia  $V_s$ , ad esempio  $t = t_0$  e  $t = t_0 + T$ . Consideriamo che nell'intervallo  $T$  la tensione  $V_x$  è sempre presente,

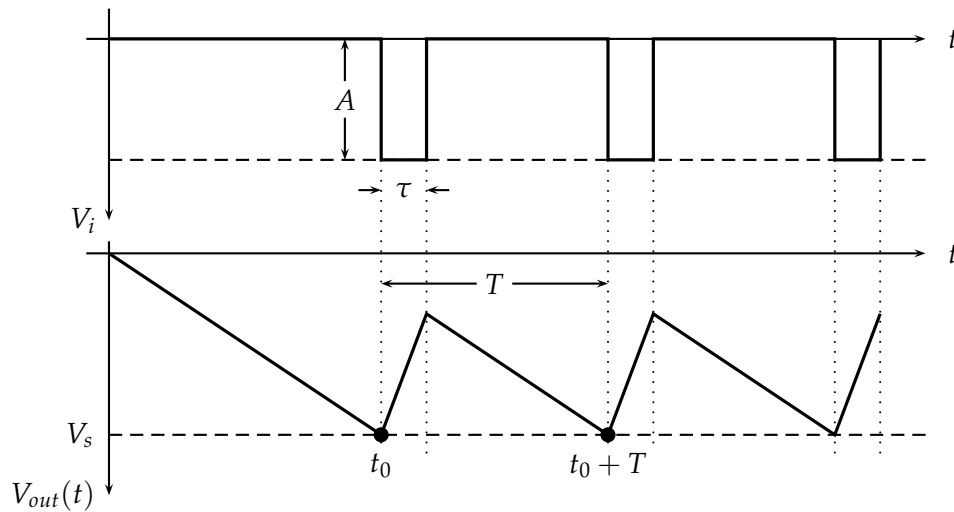


Figura 3.13: Principio di funzionamento del voltmetro ad integrazione

mentre la tensione  $V_i$  è presente solo durante l'intervallo  $\tau$ . Pertanto avremo:

$$V_{out}(t_0 + T) = -\frac{1}{R_x C} \int_{t_0}^{t_0+T} V_x dt - \frac{1}{R_i C} \int_{t_0}^{t_0+\tau} A dt + V_{out}(t_0). \quad (3.17)$$

Poichè  $V_{out}(t_0 + T) = V_{out}(t_0) = V_s$ , e sulla base dell'ipotesi di  $V_x$  costante e di stabilità a breve termine di  $C$ , si ha:

$$\frac{1}{R_x} V_x T = -\frac{1}{R_i} A \tau \Rightarrow \boxed{V_x = -A \tau \frac{R_x}{R_i} f}, \quad (3.18)$$

che mostra che la tensione incognita si può misurare per via indiretta mediante la conoscenza del rapporto tra  $R_x$  e  $R_i$ , il prodotto  $A\tau$  e la misura di  $f$ .

### 3.3.2.1 Valutazione dell'incertezza

Utilizzando un approccio deterministico, l'incertezza relativa della misura ottenuta dal voltmetro tensione/frequenza ha i seguenti contributi:

$$\left| \frac{\Delta V_x}{V_x} \right| = \left| \frac{\Delta(A\tau)}{A\tau} \right| + \left| \frac{\Delta(R_x/R_i)}{R_x/R_i} \right| + \left| \frac{\Delta f}{f} \right|, \quad (3.19)$$

dalla quale si evince che l'incertezza dipende dalle incertezze relative all'area dell'impulso  $A\tau$ , al rapporto fra le resistenze, e alla misura di frequenza  $f$ .

### 3.3.2.2 Commenti

La (3.18) può essere ottenuta per altra via, cioè facendo semplicemente riferimento alla legge che lega la tensione  $V_{out}(T)$  ai capi di un condensatore di capacità  $C$  e tensione

iniziale  $V_{out}(0)$  alla carica  $Q$  fornita in un intervallo temporale di ampiezza  $T$ :

$$V_{out}(T) = \frac{Q}{C} + V_{out}(0), \quad (3.20)$$

dove  $Q$  è pari a:

$$Q = \int_T I(t) dt, \quad (3.21)$$

con  $I$  corrente nel condensatore. Se le tensioni iniziale e finale sono uguali, la carica totale  $Q$  deve essere nulla ( $Q = 0$ ): nell'intervallo di osservazione, cioè, la carica  $Q_{in}$  ceduta al condensatore deve essere uguale a quella  $Q_{out}$  prelevata da esso. In formula:

$$Q = Q_{in} + Q_{out} = 0 \Rightarrow Q_{in} = -Q_{out}. \quad (3.22)$$

Il contributo  $Q_{in}$  è fornito dalla corrente  $I_x = V_x/R_x$ , ed è presente durante tutto l'intervallo  $T$ ; mentre il contributo  $Q_{out}$ , di segno opposto a  $Q_{in}$  e di valore determinato dalla corrente  $I_i = A/R_i$ , è limitato al solo intervallo di ampiezza  $\tau$ . Pertanto la (3.22), facendo ricorso alla (3.21), diventa:

$$\int_T \frac{V_x}{R_x} dt = - \int_\tau \frac{A}{R_i} dt \Rightarrow \frac{V_x}{R_x} T = - \frac{A}{R_i} \tau, \quad (3.23)$$

dalla quale, risolvendo per  $V_x$ , si ottiene nuovamente, come anticipato, la (3.18).

### 3.3.3 Voltmetro a doppia rampa

Lo schema del voltmetro a doppia rampa è illustrato in Fig. 3.14. Esso consiste in un **amplificatore operazionale** in configurazione di integratore, in ingresso al quale si pone alternativamente la tensione incognita  $V_x$  o quella di riferimento  $V_R$ ; un **comparatore** che verifica l'uguaglianza fra l'uscita dell'integratore  $V_{out}$  e la tensione nulla; una **gate** che consente il passaggio degli impulsi del clock verso il contatore; un'**unità di controllo** che sovrintende al funzionamento del voltmetro. Facciamo riferimento al diagramma temporale riportato con tratto nero continuo in Fig. 3.15 per comprenderne il funzionamento. All'istante  $t = 0$ , l'unità di controllo commuta l'interruttore sulla tensione incognita  $V_x$ , apre l'interruttore in parallelo al condensatore  $C$  necessario ad assicurare che la condizione iniziale sia  $V_{out}(0) = 0$  ed effettua il reset del contatore. La misura ha inizio e la tensione incognita  $V_x$  (supposta in questo esempio negativa) viene integrata nella tensione  $V_{out}(t)$ , pari a:

$$V_{out}(t) \Big|_{t \in [0, T_U]} = - \int_0^t \frac{V_x(\tau)}{RC} d\tau = - \frac{1}{RC} V_m t, \quad (3.24)$$

dove  $V_m$  è il valore medio di  $V_x(t)$  nell'intervallo  $[0, t]$ : l'uscita  $V_{out}$  è pertanto una rampa crescente nel tempo con pendenza uguale a  $V_m/RC$ . Questa fase è detta di *runup*. L'integrazione si interrompe al tempo  $\hat{t} = T_U$ , fissato dall'utente in fase di configurazione iniziale dello strumento; la tensione di uscita si fermerà al valore:

$$V_{out}(T_U) = V^* = - \frac{1}{RC} V_m T_U. \quad (3.25)$$

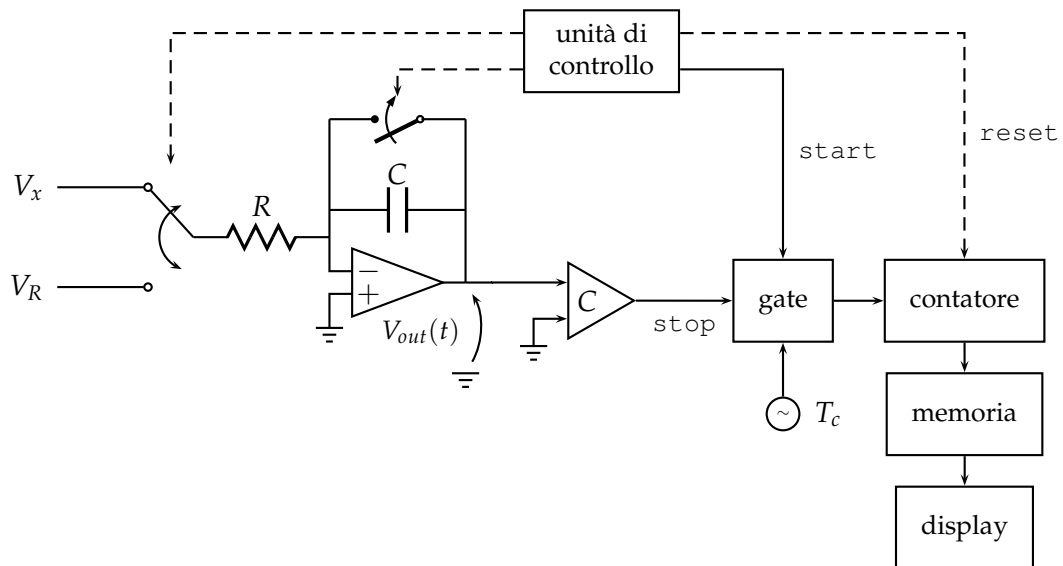


Figura 3.14: Schema a blocchi del voltmetro a doppia rampa.

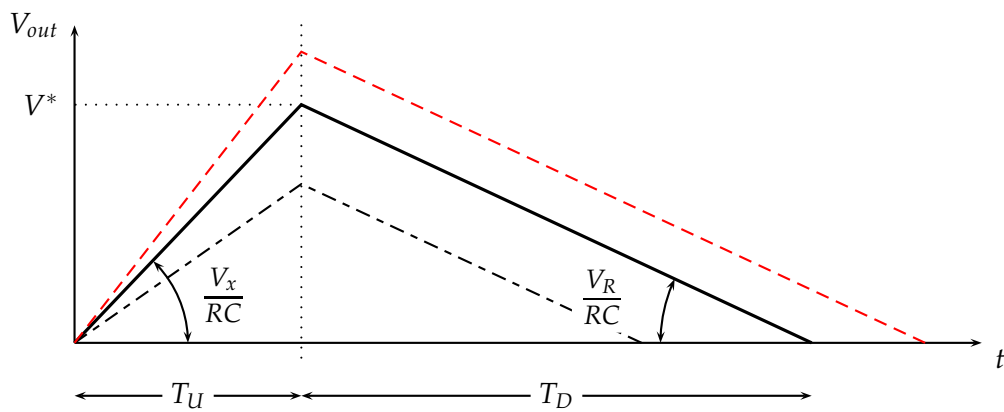


Figura 3.15: Principio di funzionamento del voltmetro a doppia rampa.

A questo punto, l'unità di controllo dà l'impulso di apertura alla gate (*start*), che pertanto comincia a far passare gli impulsi di clock che vengono così contati dal contatore. Contemporaneamente, l'interruttore viene commutato sulla tensione  $V_R$ , che viene scelta di segno opposto a  $V_x$ , imponendo quindi la scarica del condensatore  $C$  a partire dalla condizione iniziale  $V^*$ . Questa fase è detta di *rundown*: la tensione  $V_{out}$  assumerà adesso l'espressione:

$$V_{out}(t) \Big|_{t>T_U} = V^* - \int_{T_U}^t \frac{V_R}{RC} d\tau = V^* - \frac{1}{RC} V_R (t - T_U), \quad (3.26)$$

avendo supposto che la tensione di riferimento  $V_R$  si mantenga rigorosamente costante durante tutto l'intervallo  $[T_U; t]$ . La scarica del condensatore si interrompe dopo un tempo  $T_D$ , ovvero nel momento in cui il confronto con lo zero determina che  $V_{out}(T_U + T_D) = 0$  (vedi Fig. 3.15), e quindi per la (3.26):

$$0 = V_{out}(T_U + T_D) = V^* - \frac{1}{RC} V_R T_D \Rightarrow -\frac{1}{RC} V_R T_D = \frac{1}{RC} V_m T_U, \quad (3.27)$$

nella quale abbiamo sostituito l'espressione di  $V^*$  ottenuta nella (3.25). Contemporaneamente, il comparatore dà l'impulso di *stop* alla gate, cosicché all'intervallo temporale di ampiezza  $T_D$  viene associato un certo numero di impulsi di clock:

$$T_D = N_D T_c, \quad (3.28)$$

con  $T_c$  pari al periodo del clock. Supponendo verificata la condizione di *stabilità a breve termine* del prodotto  $RC$ , ovvero supponendo che  $RC$  resti costante tra la fase di *run-up* e quella di *run-down*, possiamo elidere le due costanti di tempo a primo e secondo membro nella (3.27) e sostituendo in essa l'espressione della (3.28) avremo:

$$\boxed{V_m = -V_R \frac{N_D T_c}{T_U} = -V_R \frac{N_D}{N_U}} \quad (3.29)$$

Nella relazione precedente si è ipotizzata la stabilità sul breve periodo del clock e che l'intervallo  $T_U$  fosse di durata pari ad un multiplo del periodo  $T_c$ .

Ricapitolando, possiamo ottenere l'informazione sull'ampiezza del valore medio  $V_m$  nell'intervallo  $T_U$  della tensione incognita  $V_x$  mediante la relazione:

$$\boxed{V_m = -\frac{V_R}{N_U} N_D.} \quad (3.30)$$

La (3.30) mostra chiaramente ciò che deriva già dall'intuizione: al crescere di  $V_x$ , a parità di  $V_R$  e  $N_U$ , aumenta il numero di impulsi contati  $N_D$ . La Fig. 3.15 rappresenta graficamente questa caratteristica: la linea rossa tratteggiata mostra che se aumenta il valore assoluto di  $V_x$ , aumenta la pendenza della rampa nella fase di *runup* cosicché dopo un tempo  $T_U$  essa raggiunge un valore di tensione finale  $V^*$  maggiore. Ciò comporta che la tensione  $V_{out}$  di scarica del condensatore raggiunge lo zero in un tempo maggiore, in quanto la scarica viene effettuata sempre con la stessa pendenza indipendentemente dal valore della  $V_x$ .

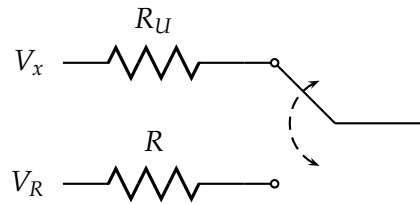


Figura 3.16: Schema dello stadio d'ingresso modificato

### 3.3.3.1 Valutazione dell'incertezza

Utilizzando un approccio deterministico, l'incertezza relativa sulla tensione media  $V_m$  è pari a:

$$\left| \frac{\Delta V_m}{V_m} \right| = \left| \frac{\Delta V_R}{V_R} \right| + \left| \frac{\Delta N_D}{N_D} \right| = \left| \frac{\Delta V_R}{V_R} \right| + \frac{1}{N_D}, \quad (3.31)$$

nella quale abbiamo escluso il contributo del conteggio di  $T_U$  perché riteniamo di poter sincronizzare la fase di *run up* con gli istanti di arrivo di due impulsi. I contributi sono costituiti dalla stabilità della tensione di riferimento  $V_R$  e dalla incertezza sul conteggio nella fase di scarica, al quale si applicano le stesse considerazioni del voltmetro a singola rampa. Concentriamoci sul contributo dovuto all'errore di conteggio  $1/N$  e poniamoci il problema di come ridurre tale valore. Ovviamente, dovremo contare un maggior numero di impulsi:

- possiamo inizialmente pensare di abbassare la rampa di run down mediante una riduzione della tensione  $V_R$ , ma ciò presenta gli stessi inconvenienti che abbiamo già citato in riferimento al voltmetro a singola rampa;
- un'altra possibilità è quella di far partire la fase di *run down* da un valore  $V^*$  maggiore, aumentando cioè il tempo  $T_U$ . Tuttavia, il tempo di *run up* è scelto in base a considerazioni che riguardano la reiezione del rumore sovrapposto al segnale d'ingresso (vedi Sez. 3.3.5), e pertanto la libertà sulla scelta del valore di  $T_U$  è limitata;
- si potrebbe erroneamente pensare di intervenire sui valori di resistenza o di capacità, ma poiché entrambi i valori agiscono sia sulla rampa di salita sia di discesa una loro modifica non avrebbe alcun effetto sul comportamento complessivo.

La scelta deve essere necessariamente di tipo diverso, e solitamente ricade su modifiche architettoniche. In particolare, se la resistenza  $R$  in serie alle tensioni  $V_x$  e  $V_R$  è inserita prima dell'interruttore (vedi Fig. 3.16), è possibile modificare separatamente le pendenze della rampa di carica e scarica: se uso una resistenza  $R_U$  molto minore della resistenza  $R$ , ad esempio  $R_U = R/10$ , ottengo una rampa di *run up* che è 10 volte più ripida di quella ottenuta con la configurazione base. La rampa in *run down*, invece, non subirà

variazioni se  $R$  è scelta del valore precedente, e ciò eviterà problemi di rilevazione dell'istante di passaggio per lo zero. Con  $R_U$  10 volte minore, ottengo un punto di partenza  $V^*$  che è 10 volte maggiore, con un conseguente aumento del numero di impulsi contati durante la fase di scarica. L'espressione che lega la tensione  $V_m$  al numero di impulsi  $N_D$  assumerà la nuova espressione:

$$V_m = -\frac{R_U}{R} \frac{V_R}{N_U} N_D. \quad (3.32)$$

### 3.3.3.2 Confronto fra Tempo di Misura e Risoluzione

Con buona approssimazione si può ritenere che il tempo totale di misura  $T_{mis}$  del voltmetro a doppia rampa sia equivalente alla somma dei tempi di *runup* e *rundown*:

$$T_{mis} = T_U + T_D = (N_U + N_D) T_c; \quad (3.33)$$

la risoluzione, che indicheremo con  $V_{min}$ , invece è data dal minimo valore di  $V_m$  rilevabile dallo strumento, che si ottiene ponendo  $N_D = 1$  nella (3.30):

$$V_{min} = \frac{V_R}{N_U}. \quad (3.34)$$

Dalla stessa equazione, dividendo ambo i membri per  $N_D$ , otteniamo:

$$V_{min} = \underbrace{\frac{V_R}{N_U}}_3 = \underbrace{\frac{V_m}{N_D}}_1 = \underbrace{\frac{V_{FS}}{N_{D_{max}}}}_2 \Rightarrow \begin{cases} N_D = \frac{N_{D_{max}} V_m}{V_{FS}} & \text{per la 1} \\ N_U = \frac{N_{D_{max}} V_R}{V_{FS}} & \text{per la 2,} \end{cases} \quad (3.35)$$

e pertanto possiamo riscrivere la (3.33) come:

$$T_{mis} = \left( \frac{V_m}{V_{FS}} + \frac{V_R}{V_{FS}} \right) N_{D_{max}} T_c. \quad (3.36)$$

Il valore massimo del tempo di misura  $T_{mis} = T_M$  si ottiene quando la tensione  $V_m$  è pari al valore di fondo scala  $V_m = V_{FS}$ , ottenendo:

$$T_M = \left( 1 + \frac{V_R}{V_{FS}} \right) N_{D_{max}} T_c. \quad (3.37)$$

Per ridurre il tempo di misura si potrebbe ridurre la tensione di riferimento  $V_R$ , ma ciò imporrebbe di ridurre anche la durata della fase di *runup*, se si vuole mantenere costante risoluzione (vedi la (3.34)): la riduzione dell'intervallo di integrazione potrebbe peggiorare le proprietà di reiezione del rumore di modo normale (vedi Sez. 3.3.5 a pagina 98)

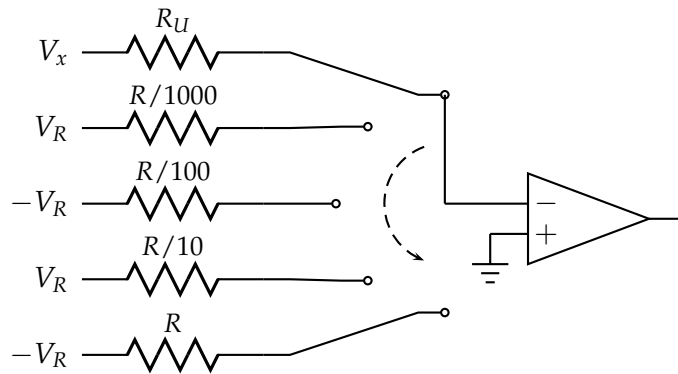


Figura 3.17: Schema dello stadio d'ingresso del voltmetro multirampa *rundown*

e pertanto nelle comuni implementazioni si preferisce invece portare  $V_R$  allo stesso valore della tensione di fondo scala  $V_{FS}$ , ottenendo in conclusione:

$$T_M = 2N_{D_{max}} T_c = 2 \frac{V_{FS}}{V_{min}} T_c, \quad (3.38)$$

dove la seconda uguaglianza è stata ottenuta usando la relazione 3 nella (3.35). Dalla (3.38) si osserva che l'esigenza di contenere i tempi di misura è in contrasto con l'aumento di risoluzione. Inoltre, la diretta proporzionalità fra il tempo di misura e il numero di impulsi contati è utile per mettere in evidenza il legame del primo con il numero di cifre  $d$  con cui viene rappresentato il risultato: supponendo infatti che il contatore funzioni in base 10, il massimo numero di impulsi  $N_{D_{max}}$  è pari a  $10^d$ , evidenziando così un legame esponenziale fra  $T_M$  e  $d$ :

$$\boxed{T_M = 2 \cdot 10^d T_c.} \quad (3.39)$$

Sarà interessante confrontare questa espressione con quella ottenuta nel caso del voltmetro a rampa multipla nella fase di *rundown* (§ 3.3.4).

### 3.3.4 Voltmetro multirampa in fase di *rundown*

Il voltmetro multirampa è un'evoluzione del voltmetro a doppia rampa rispetto al quale ha un maggior numero di rampe nella fase di *rundown*, caratteristica assicurata dall'impiego di un maggior numero di resistenze di ingresso dell'integratore, pari al numero di rampe da realizzare ed in rapporto di 1 : 10 una rispetto all'altra, come riportato in Fig. 3.17.

Il funzionamento del voltmetro è invece mostrato in Fig. 3.18. La fase di *runup* è del tutto uguale a quella del doppia rampa. Quando la tensione  $V_{out}$ , dopo il tempo di integrazione  $T_U = N_U T_c$ , raggiunge il valore  $V^* = -V_m N_U T_c / R_U C$  l'interruttore viene spostato sulla tensione  $V_R$  supposta di segno opposto a  $V_x$  e collegata all'integratore

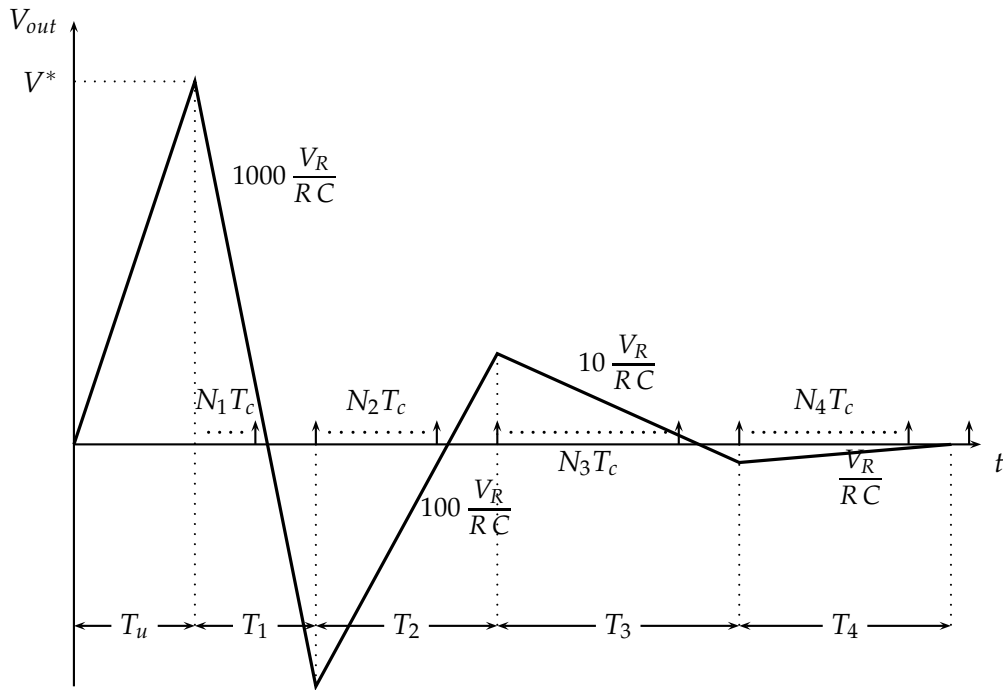


Figura 3.18: Esempio di funzionamento del voltmetro multirampa *rundown*

mediante una resistenza di valore  $10^{-3} R$ . Comincerà in tal modo la fase di scarica del condensatore che avviene con costante di tempo  $\tau_1 = RC/10^3$  e che termina non quando la rampa incontra lo zero ma al primo impulso successivo. L'intervallo di tempo totale sarà pari a  $T_1 = (N_1 + 1) T_c$ , dove  $N_1$  è il numero di impulsi contati fino al raggiungimento della tensione nulla. A questo punto l'interruttore viene commutato sulla tensione  $-V_R$  connessa alla resistenza di valore  $10^{-2} R$ . Si instaurerà una nuova fase di carica del condensatore, stavolta con costante di tempo  $\tau_2 = RC/10^2$  che termina, analogamente al caso precedente, al primo impulso successivo al passaggio per lo zero. Lo stesso avviene per la rampa successiva, mentre per l'ultima rampa il conteggio, così come la misura nel suo complesso, termina all'istante di passaggio per lo zero.

Scriviamo le espressioni di tutte le tensioni  $V_1, \dots, V_4$ :

$$\begin{cases} V_1 = -V_R \frac{1000}{RC} (N_1 + 1) T_c + V^* \\ V_2 = V_R \frac{100}{RC} (N_2 + 1) T_c + V_1 \\ V_3 = -V_R \frac{10}{RC} (N_3 + 1) T_c + V_2 \\ V_4 = V_R \frac{1}{RC} N_4 T_c + V_3 \end{cases} \quad (3.40)$$

Ricordando che  $V_4 = 0$  è possibile partire dall'ultima relazione e mediante successive sostituzioni ottenere, riordinando opportunamente i termini:

$$V_m = -\frac{V_R}{N_U} \frac{R_U}{R} [10^3 N_1 + 10^2(9 - N_2) + 10 N_3 + (10 - N_4)] \quad (3.41)$$

Il tempo associato alla fase di rundown è dato dalla somma dei tempi associati ad ogni rampa, ovvero:

$$T_M = [(N_1 + 1) + (N_2 + 1) + (N_3 + 1) + N_4] T_c = (N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + 3) T_c \quad (3.42)$$

Supponendo che  $N_i$  sia espresso in base 10, il valore massimo che assume il tempo di misura può essere espresso come:

$$T_M \simeq 10^d T_c \quad (3.43)$$

che evidenzia un dipendenza lineare fra il numero di cifre  $d$  (pari al numero di rampe) del risultato e il tempo di misura.

Il vantaggio del voltmetro multirampa rispetto al doppia rampa consiste nella riduzione del tempo di misura a parità di risoluzione offerta, oppure ad un aumento di risoluzione a parità di tempo di misura. Facciamo un esempio di tale caratteristica confrontando la (3.41) e la (3.30) nel caso in cui  $R_U = R$ . Supponiamo di lavorare a **risoluzione costante**: ciò implica che il numero di cifre restituite dai due voltmetri deve essere lo stesso. In particolare, a parità delle altre grandezze, ciò vuol dire che il numero di impulsi contati dal voltmetro a doppia rampa  $N_D$  deve essere uguale al numero equivalente di impulsi  $N'_D = 10^3 N_1 + 10^2(9 - N_2) + 10 N_3 + (10 - N_4)$  del multirampa. Per esempio, fissando  $N_D = N'_D = 4628$ , si avrà:  $N_1 = 4$ ,  $N_2 = 3$ ,  $N_3 = 2$ ,  $N_4 = 2$ . Ma mentre il doppiarampa impiega un tempo  $T_D = N_D T_c = 4628 T_c$  per contare gli  $N_D$  impulsi, al multirampa occorre solo un tempo  $T_M = [(N_1 + 1) + (N_2 + 1) + (N_3 + 1) + N_4] T_c = 14 T_c$ . Pertanto, a parità di risoluzione si ha un risparmio di tempo di circa  $3 \cdot 10^2$ .

Supponiamo adesso di voler lavorare a **tempo di misura costante**. Fissiamo per esempio  $T_M = 25 T_c$ . Nel doppia rampa tale tempo di misura corrisponde ad un numero di impulsi contati pari a  $N_D = 25$ , che indicano un risultato espresso con una risoluzione di due sole cifre. Il multirampa, invece, nello stesso tempo potrà ottenere una risoluzione con un numero massimo di cifre che deve rispettare due relazioni: quella che vincola il tempo di misura, ovvero  $[(N_1 + 1) + (N_2 + 1) + (N_3 + 1) + N_4] = 25$ , e quella che vincola il risultato, cioè  $N'_D = 10^3 N_1 + 10^2(9 - N_2) + 10 N_3 + (10 - N_4) = 25XX$ , dove le ultime due cifre sono ignote perché il multirampa offre una risoluzione maggiore rispetto al doppia rampa e che potrebbero essere, ad esempio, due cifre decimali. Una possibile soluzione ai due vincoli è:  $N_1 = 2$ ,  $N_2 = 4$  (determinate dalla relazione sul risultato),  $N_3 = 8$ ,  $N_4 = 8$ , scelti in modo tale da rispettare il vincolo sul tempo di misura.

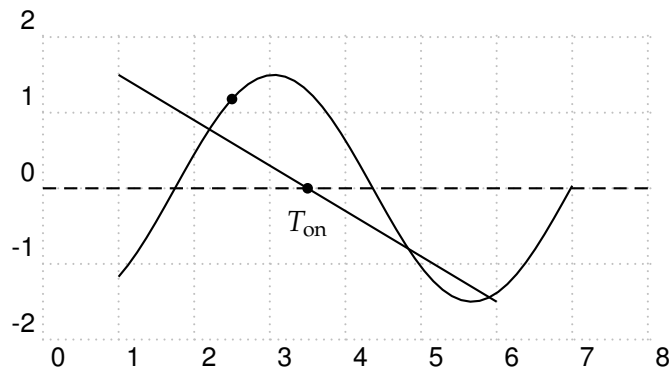


Figura 3.19: Jitter  $t_e$  sull'istante di inizio misura dovuto al rumore sovrapposto.

### 3.3.5 Confronto fra voltmetri ad integrazione e a valore istantaneo

Un confronto preliminare fra i voltmetri a valore istantaneo e quelli ad integrazione evidenzia il fatto che i secondi hanno un tempo di misura certamente maggiore rispetto ai primi. Infatti, essi devono preliminarmente effettuare l'integrazione della grandezza d'ingresso per un intervallo che, nel caso del voltmetro a doppia rampa, abbiamo chiamato fase di *runup*. Ciò determina che la grandezza che viene convertita nell'intervallo temporale la cui durata viene poi misurata mediante un contatore numerico, è nel voltmetro ad integrazione il valore medio nell'intervallo d'integrazione, nel voltmetro a valore istantaneo il valore che la tensione d'ingresso assume in un determinato istante temporale. La differenza è evidente qualora al segnale d'ingresso  $V$  supposto costante si sovrapponga un segnale variabile, quale ad esempio un rumore proveniente dalla tensione di rete, pari a  $V_n \sin 2\pi f_0 t$ , con  $f = 50$  Hz. Nel voltmetro a valore istantaneo tale rumore sposterà il punto in cui il segnale d'ingresso interseca la rampa generata internamente dal voltmetro, spostando di un tempo  $t_e \leq 0$  il punto di inizio della misura dell'intervallo di tempo  $T$ , aumentando così l'incertezza di misura. Per meglio chiarire questo aspetto, si faccia riferimento alla Fig. 3.19, in cui si mostra lo spostamento dell'istante di inizio misura rispetto al valore nominale, dovuto alla presenza di un rumore sinusoidale sovrapposto al segnale d'interesse.

Vediamo a questo punto qual è il beneficio introdotto dall'uso dell'integrazione osservando cosa succede all'aliquota di rumore  $V_n \sin 2\pi f_0 t$  qualora essa venga integrata per un tempo  $T$  tra gli istanti  $t$  e  $t + T$ :

$$\begin{aligned}
 V_{n,out}(t; T) &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} V_n \sin 2\pi f_0 \tau \, d\tau = \\
 &= \frac{-V_n}{2\pi f_0 T} [\cos 2\pi f_0 (t + T) - \cos 2\pi f_0 t] = \\
 &= \frac{V_n}{2\pi f_0 T} 2 \sin \pi f_0 T \sin 2\pi f_0 \left( t + \frac{T}{2} \right) = \\
 &= V_n \frac{\sin \pi f_0 T}{\pi f_0 T} \sin 2\pi f_0 \left( t + \frac{T}{2} \right). \quad (3.44)
 \end{aligned}$$

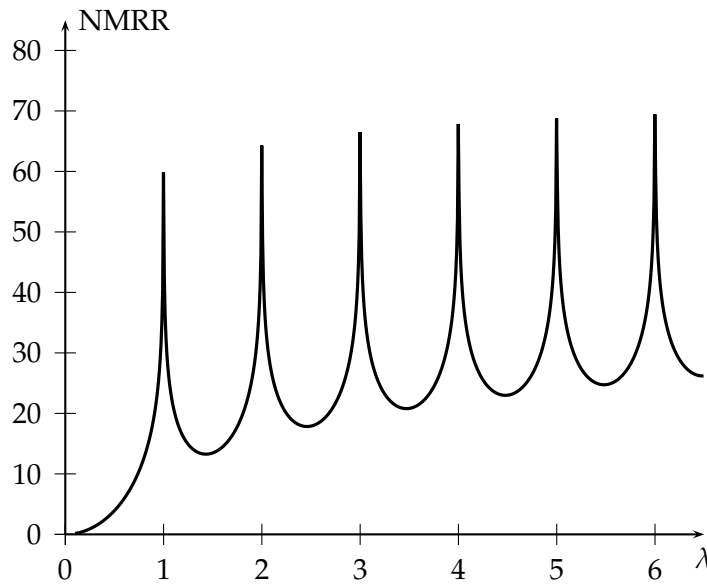


Figura 3.20: NMRR in funzione di  $\lambda = f_0 T$

L'integratore pertanto si comporta come un filtro LTI la cui funzione di trasferimento  $H(f)$  alla frequenza  $f = f_0$  vale:

$$\begin{aligned} |H(f_0)| &= \frac{\sin \pi f_0 T}{\pi f_0 T} \\ \angle H(f_0) &= \pi f_0 T \end{aligned} \quad (3.45)$$

Per valutare l'attenuazione del rumore a valle del filtro integratore, introduciamo il fattore di reiezione di modo normale NMRR (*Normal Mode Rejection Ratio*), definito come il valore assoluto del rapporto fra il valore massimo del rumore all'ingresso e all'uscita:

$$\text{NMRR} = 20 \log_{10} \left| \frac{V_n}{V_n \frac{\sin \pi f_0 T}{\pi f_0 T}} \right| = 20 \log_{10} \left| \frac{\pi f_0 T}{\sin \pi f_0 T} \right| \quad (3.46)$$

Ponendo  $f_0 T = \lambda$ , si ottiene l'andamento in funzione di  $\lambda$  riportato in Fig. 3.20, dal quale si evince che quando l'intervallo di integrazione  $T$  è un multiplo del periodo  $T_0 = 1/f_0$  del segnale di rumore, la reiezione è massima: la scelta dell'intervallo  $T$  pertanto deve essere effettuata dall'utente sulla base della conoscenza della frequenza caratteristica del segnale di rumore. Nel caso di un segnale interferente proveniente dalla rete di alimentazione in bassa tensione, abbiamo  $f_0 = 50$  Hz, da cui  $T_0 = 20$  ms per cui è opportuno scegliere  $T$  almeno pari a quest'ultimo valore, o un suo multiplo. Notiamo, inoltre, che sebbene l'NMRR sia massimo per  $\lambda = k$  con  $k \in \mathbb{N}$ , qualora sovrapposti al misurando vi siano anche segnali la cui frequenza non è in relazione di proporzionalità intera con l'intervallo d'integrazione  $T$ , il grafico mostra comunque una

buona reiezione che aumenta al crescere del numero di periodi del rumore contenuti in  $T$ .

Facciamo un esempio: supponiamo che in ingresso al sistema, oltre al segnale d'interesse, vi sia un rumore costituito dalla somma di un segnale sinusoidale a frequenza  $f_1 = 50$  Hz e di uno a frequenza  $f_2 = 80$  Hz:

$$V_n = \sin 2\pi f_1 t + \sin 2\pi f_2 t = \sin 2\pi 50t + \sin 2\pi 80t. \quad (3.47)$$

Vogliamo determinare, se esiste, il tempo di integrazione  $T$  che rigetti entrambe le componenti del rumore.

Innanzitutto, ricordiamo che per rigettare un rumore è necessario che il tempo di integrazione sia un multiplo intero del periodo del rumore. Il rumore nel caso in questione è composto da una componente a 50 Hz il cui periodo corrispondente è 20 ms e una a 80 Hz di periodo pari a 12,5 ms. Per poter annullare entrambe le componenti è necessario perciò individuare un intervallo di tempo  $T$  di ampiezza pari ad un multiplo di entrambi i periodi. Dovrà perciò essere:

$$T = m T_1 = n T_2, \quad (3.48)$$

da cui si ottiene

$$\frac{m}{n} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{5}{8} = 0.625. \quad (3.49)$$

Sarà pertanto possibile annullare entrambe le componenti se esiste una soluzione all'equazione  $m/n = 0.625$ , con  $n, m \in \mathbb{N}$ . Ma due valori che soddisfano l'equazione sono proprio  $m = 5$  e  $n = 8$ , numeri che apparivano nella (3.49). Pertanto l'intervallo d'integrazione dovrà avere ampiezza pari a:

$$T = m T_1 = n T_2 = 5 \cdot 20 = 8 \cdot 12.5 = 100 \text{ ms}. \quad (3.50)$$

Come fare invece a progettare un voltmetro che possa attenuare la componente di rumore di rete sovrapposta alla tensione misuranda, sia in Italia che negli USA? Nei due Paesi vengono impiegate frequenze di rete diverse: in Europa si usa la 50 Hz, negli USA la 60 Hz. Analogamente all'esempio precedente, dobbiamo determinare se esiste e nel caso quale sia la durata dell'intervallo di integrazione in modo tale che esso sia un multiplo dei periodi di entrambi i segnali di rumore. Pertanto dovrà essere:

$$T = m T_1 = n T_2 \rightarrow \frac{m}{n} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{5}{6}. \quad (3.51)$$

Il periodo corrispondente alla frequenza di 60 Hz è uguale a 0,01666666 ms. Se poniamo  $n = 6$  e  $m = 5$  il loro rapporto risulterà intero e il corrispondente intervallo di integrazione pari a:

$$T = m T_1 = n T_2 = 5 \cdot 20 = 6 \cdot 16.66666666 = 100 \text{ ms}. \quad (3.52)$$

Vediamo un altro esempio. Per poter annullare un rumore ad una certa frequenza, un voltmetro a doppia rampa viene impostato con un tempo di runup pari a 60 ms. Il

voltmetro viene poi portato in un ambiente in cui esiste un rumore elettromagnetico dovuto ad un sistema di telecomunicazioni ad onde convogliate che viaggia sovrapposto al segnale di alimentazione elettrica. La frequenza centrale di tale sistema è di 75 Hz: si determini il valore dell'NMRR per tale rumore. Per rispondere a tale quesito, notiamo innanzitutto che il periodo del segnale a 75 Hz è pari a  $T_0 = 13,333333$  ms, che non è un sottomultiplo intero di 60 ms. Tramite la (3.46) si può valutare il rapporto di reiezione per  $T = 60$  ms e  $f_0 = 75$  Hz ( $\lambda = 4.5$ ):

$$\text{NMRR}(75 \text{ Hz}) = 20 \log_{10} \left| \frac{75 \cdot 0.06 \pi}{\sin(75 \cdot 0.06 \pi)} \right| \approx 23 \text{ dB}, \quad (3.53)$$

il che conferma quanto già evidenziato in precedenza ed evidente peraltro dal grafico in Fig. 3.20, e cioè che anche se  $T$  non è un multiplo intero del periodo del rumore il voltmetro riesce comunque a fornire un buon livello di protezione contro il disturbo.

### 3.4 Convertitori AC/DC

La misurazione di parametri caratteristici di tensioni alternate, quali ad esempio il valore di picco, di picco-picco, il valore efficace o quello medio convenzionale, può essere realizzata mediante l'impiego di voltmetri per la misura di tensioni continue a cui sono aggiunti stadi di ingresso che consentono di ottenere in uscita un segnale proporzionale alla grandezza d'interesse. Questi stadi d'ingresso vengono denominati, per la funzione a cui assolvono, convertitori AC/DC proprio perché trasformano una grandezza alternata (AC) in una continua (DC). Il voltmetro ottenuto dall'aggiunta di questi stadi d'ingresso ad un voltmetro per tensioni continue è un *voltmetro in alternata*.

#### 3.4.1 Misuratore di tensioni di picco

In Fig. 3.21 sono riportati lo schema elettrico e il principio di funzionamento del circuito per la determinazione della *tensione di picco* di un segnale alternato. Come è noto, il diodo ha un comportamento differente in base al segno della tensione ai suoi capi: nell'ipotesi di caratteristica di funzionamento ideale, non appena è  $V_d > 0$ , il diodo si comporta come una resistenza  $R_{\text{on}}$  di valore ohmico estremamente basso (idealmente nullo) che lascerà fluire corrente nel ramo in cui è posto il diodo; mentre se la tensione  $V_d$  è negativa—il diodo si dirà allora *contropolarizzato*,—la resistenza  $R_{\text{off}}$  offerta al passaggio di corrente è di valore ohmico estremamente elevato (idealmente infinito).

Dopo un iniziale transitorio che non ci interessa studiare in questa sede, la tensione sul condensatore, che corrisponde all'uscita  $V_o$ , si porta al valore di picco del segnale  $V_p$ . A questo punto la tensione d'ingresso  $V_i$  comincia la fase di discesa. Pur non presentando le equazioni che ne regolano l'evoluzione, sul diodo esiste in questa fase una tensione negativa  $V_d = V_i - V_o < 0$ , a causa della quale il diodo è interdetto e pertanto non conduce. Il condensatore comincia la scarica grazie alla presenza della resistenza  $R$ . La fase di scarica procede secondo un andamento esponenziale con costante di tempo  $\tau_s = (R || R_{\text{off}})C$ , ovvero pari al prodotto della capacità  $C$  del condensatore con

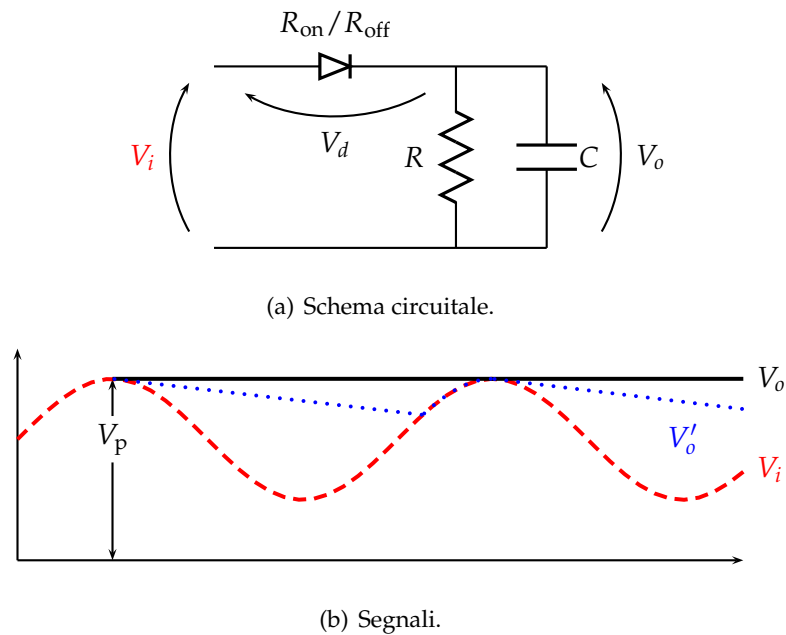


Figura 3.21: Voltmetro per la misura di tensioni di picco: (a) schema circuitale; (b) segnali.

il parallelo tra la resistenza  $R$  e la resistenza  $R_{off}$  offerta dal diodo in interdizione, di valore  $R_{off} \gg R$ . Pertanto, la costante  $\tau_s$  sarà  $\tau_s \approx RC$ . Se tale costante di tempo è scelta in maniera opportuna—ovvero tale da essere  $\tau \gg T$ , con  $T$  periodo del segnale d'ingresso— allora la scarica, che in linea teorica assume un andamento esponenziale, si può approssimare con una retta, tanto meno pendente quanto maggiore è la costante di tempo  $\tau_s$ . Essa procede finché la tensione  $V_o$  non incontra nuovamente la tensione  $V_i$ , cosa che avviene quando quest'ultima si trova nel tratto crescente: da questo momento sul diodo tornerà ad insistere una tensione  $V_d > 0$ , per cui esso conduce facendo fluire corrente nel condensatore che si carica con costante di tempo  $\tau_c = (R || R_{on})C \sim R_{on}C$  poichè la resistenza offerta in fase di carica è  $R_{on} \ll R$ . Tanto più è piccola la costante  $\tau_c$  rispetto al periodo  $T$  del segnale d'ingresso tanto meglio la fase di carica è sovrapposta al segnale d'ingresso.

Dalla resistenza offerta dal diodo nelle due fasi, e dal valore di  $R$  e  $C$  dipende ovviamente l'andamento delle due fasi. In linea teorica, sarebbe preferibile avere  $\tau_s = \infty$  e  $\tau_c = 0$  in modo che l'andamento del segnale d'uscita rappresenti il segnale costante a tratto continuo nero in Fig. 3.21, che rappresenta proprio il valore di picco del segnale d'ingresso. Tuttavia, tale condizione è di difficile realizzazione, per cui l'andamento del segnale  $V_o$  non sarà più costante, ma si presenterà invece come raffigurato dalla curva in tratto punteggiato blu, ovvero con un tratto discendente rettilineo e un tratto crescente di tipo esponenziale. Il segnale risultante  $V'_o$ , ovviamente, non rappresenta il valore di picco del segnale: tuttavia, se  $V'_o$  viene posto all'ingresso di un voltmetro

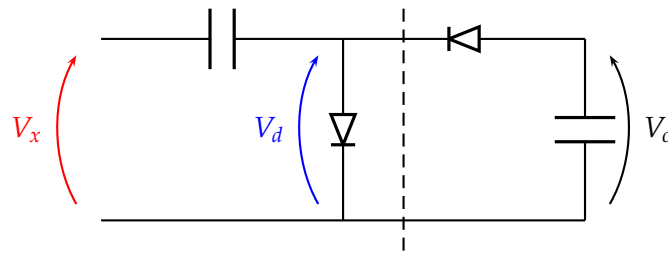


Figura 3.22: Schema circuitale del rivelatore picco-picco

ad integrazione, che in uscita fornisce il valor medio dell'ingresso, l'indicazione che se ne ottiene è certamente legata al valore di picco del segnale, sebbene essa risulti più bassa a causa della presenza del *ripple*, ovvero delle fluttuazioni del segnale  $V_o'$  dovute appunto alla non idealità delle fasi di carica e scarica del condensatore.

### 3.4.2 Misuratore di tensioni di picco-picco

Nel circuito riportato in Fig. 3.22 la misurazione del valore picco-picco di tensioni non costanti nel tempo<sup>5</sup> viene effettuato mediante l'impiego di due diversi dispositivi, separati in figura dalla linea tratteggiata. Quello di sinistra, costituito da un condensatore e un diodo, ha lo scopo di presentare in uscita, una volta esaurito il transitorio iniziale, la tensione  $V_d$  pari alla tensione  $V_x$  privata del suo valore di picco  $V_p$ .

Vediamone in dettaglio il funzionamento: all'applicazione della tensione incognita in ingresso (che per comodità riterremo pari alla somma di un segnale sinusoidale con una costante o *offset*), e supponendo il condensatore inizialmente scarico, nella maglia formata dalla tensione  $V_x$ , dal condensatore e dal diodo fluisce una corrente che porta il diodo in conduzione, inducendo su di esso una tensione che, in ipotesi di idealità, è nulla ( $V_d = 0$ ). Nel frattempo, la corrente carica il condensatore con la stessa velocità con cui evolve la tensione d'ingresso. Poiché la  $V_d$  in questa fase è nulla, risulta banalmente  $V_c = V_x$ . Giunto al valore massimo, ovvero alla tensione di picco  $V_p$ , l'ingresso inizia la sua fase discendente. Da questo momento in poi, poiché il condensatore tende a mantenere la tensione ai suoi capi costante al valore  $V_p$ , il diodo si trova in interdizione perché la tensione ai suoi capi è  $V_x - V_c = V_x - V_p < 0$ . In uscita al primo

<sup>5</sup>Tra i segnali che hanno un andamento variabile nel tempo, assumono particolare rilevanza i segnali:

**periodici** ovvero quelli formati da un segnale che si ripete identico a se stesso dopo un intervallo di tempo  $T$  detto *periodo*. A questa classe appartengono i ben noti segnali sinusoidali, a dente di sega, ad onda quadra, ecc..

**ripetitivi** sono quei segnali non periodici che però presentano nel loro andamento temporale un tratto che si ripete ad intervalli non regolari.

**alternativi** o alternati, che per definizione sono segnali periodici di cui è nullo il valor medio, definito come:

$$V_m = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt \quad (3.54)$$

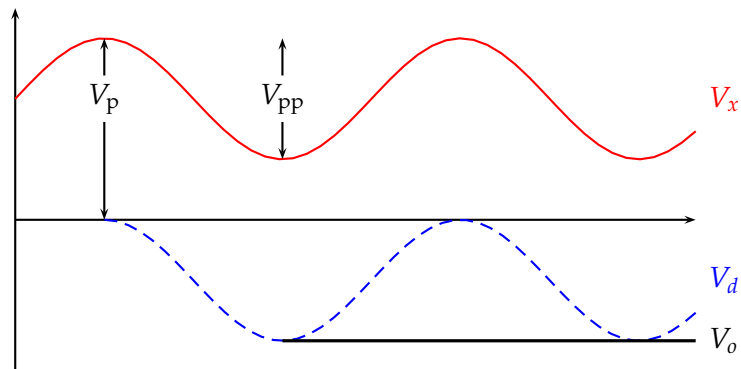


Figura 3.23: Segnali del rivelatore picco-picco

stadio del misuratore avremo pertanto, come anticipato, la tensione d'ingresso privata del suo valore di picco, che risulta di segno negativo.

Il secondo circuito, invece, non è altro che un misuratore di picco (vedi § 3.4.1) che opera sulla tensione negativa  $V_d$ . Il segno della tensione in ingresso motiva il montaggio invertito del diodo di rilevazione rispetto alla Fig. 3.21(a).

### 3.4.3 Misuratore di valor medio

Per definizione, il valor medio di una tensione alternata è uguale a zero. Il valor medio a cui si farà riferimento nel seguito di questo paragrafo perciò, è il valore medio *convenzionale*, definito nel seguente modo:

$$V_{m,c} = \frac{1}{T} \int_0^T |v(t)| dt, \quad (3.55)$$

ovvero uguale al valore medio del segnale *raddrizzato*, in cui cioè i valori negativi siano stati ribaltati rispetto all'asse delle  $x$ . Ottenere il valor medio convenzionale vuol dire perciò in primo luogo raddrizzare il segnale e poi misurare il valore medio del segnale raddrizzato. Limitiamoci a fornire due dispositivi raddrizzatori, dal momento che il valor medio si può semplicemente ottenere mediante un voltmetro ad integrazione.

#### 3.4.3.1 Raddrizzatore a singola semionda

La Fig. 3.24 mostra lo schema circuitale del raddrizzatore a singola semionda, costituito da un diodo e da una resistenza. Il funzionamento è molto semplice, e viene illustrato con l'aiuto dell'immagine in Fig. 3.25. Quando il segnale d'ingresso  $V_i$  è positivo il diodo conduce e in condizioni di idealità la caduta di tensione ai suoi capi è nulla. Pertanto l'uscita  $V_o$  sarà banalmente la replica dell'ingresso  $V_i$ .

Quando invece  $V_i$  è negativo, il diodo è in interdizione e l'assenza di corrente rende nulla la tensione sulla resistenza d'uscita, e di conseguenza il segnale  $V_o$ . Il segnale

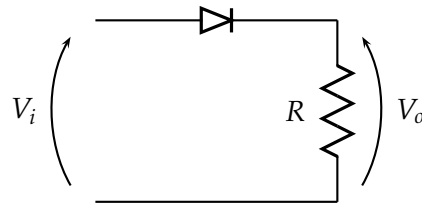


Figura 3.24: Schema circuitale del raddrizzatore a singola semionda

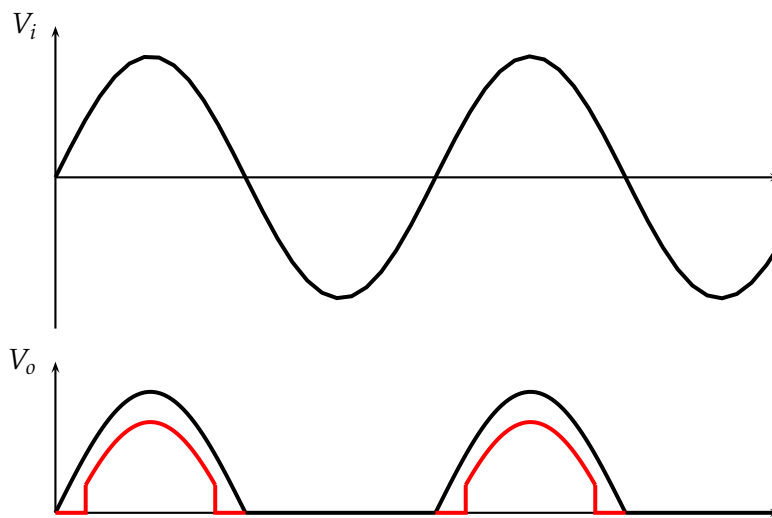


Figura 3.25: Segnali d'ingresso e d'uscita del raddrizzatore a singola semionda

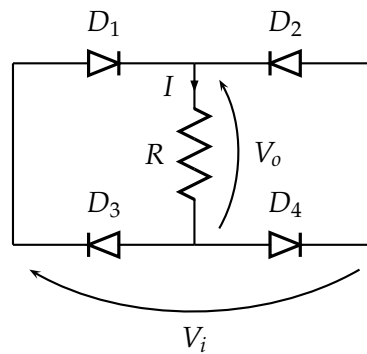


Figura 3.26: Schema circuitale del raddrizzatore a doppia semionda

così ottenuto non è propriamente il valore assoluto del segnale d'ingresso, perché le porzioni negative vengono annullate e non portate al corrispondente valore positivo. Pertanto, per ottenere il valor medio convenzionale  $V_{m,c}$  si può procedere in due modi: si può integrare il segnale  $V_o$  sul semiperiodo del segnale d'ingresso  $V_i$ , o moltiplicare per 2 l'integrale ottenuto su tutto il periodo del segnale d'ingresso.

Il caso reale, in cui il diodo ha una tensione di attivazione  $V_d \neq 0$ , differisce dal caso ideale dalla forma della tensione d'uscita, che resta ferma al valore  $V_0 = 0$  per tutto il tempo in cui la tensione d'ingresso  $V_i$  è  $V_i < V_d$ . La forma del segnale d'uscita è riportata in rosso in Fig. 3.25

### 3.4.3.2 Raddrizzatore a doppia semionda

Un secondo raddrizzatore è quello a doppia semionda o a Ponte di Graetz raffigurato in Fig. 3.26, in cui vengono impiegati quattro diodi montati a coppia e una resistenza su cui viene prelevato il segnale d'uscita. Quando il segnale d'ingresso  $V_i$  è positivo, sono in conduzione i diodi  $D_1$  e  $D_4$ , e il segnale d'uscita ai capi della resistenza è, in condizioni ideali di funzionamento dei diodi, la replica del segnale d'ingresso. La corrente in questo caso fluirà dall'alto verso il basso, nel verso indicato dalla freccia. Quando la tensione d'ingresso è negativa, saranno attivi i diodi  $D_2$  e  $D_3$ , ma poichè anche in questo caso la corrente fluisce secondo lo stesso verso del caso precedente, la tensione sarà ancora positiva. Nel complesso, in uscita al ponte la tensione avrà la forma rappresentata in Fig. 3.27, che corrisponde al valore assoluto del segnale d'ingresso.

## 3.5 Voltmetro a vero valore efficace

Gli appunti relativi agli argomenti che seguono sono ancora in fase di preparazione e vanno perciò studiati quelli presenti sul sito docenti nella directory download/Fondamenti della Misurazione 1.

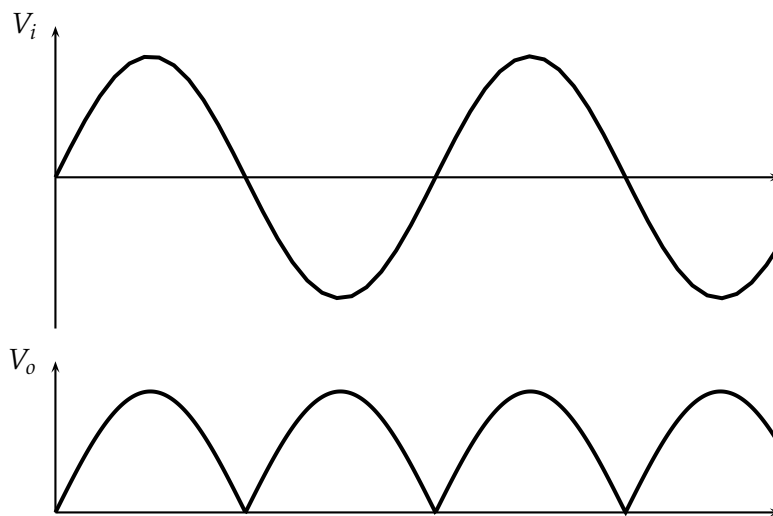


Figura 3.27: Segnali d'ingresso e d'uscita del raddrizzatore a doppia semionda

### 3.5.1 Effetto Seebeck

### 3.5.2 Effetto Peltier

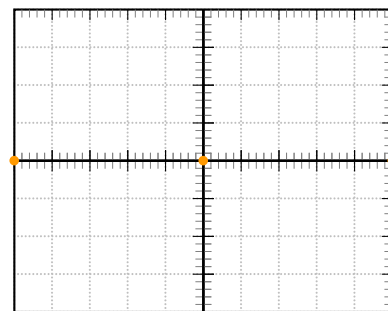
### 3.5.3 Milliamperometro a vero valore efficace

## 3.6 Oscilloscopio numerico

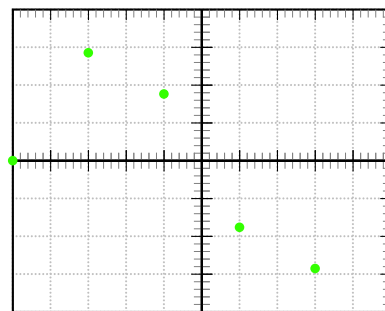
### 3.6.1 Modalità di campionamento

#### 3.6.1.1 Tempo reale

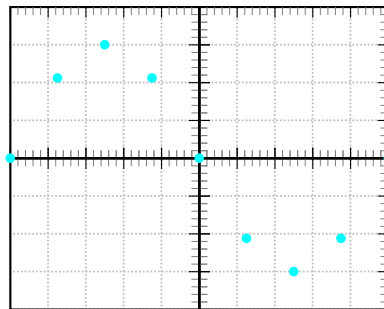
Nella modalità di campionamento in tempo reale, il segnale viene rappresentato sullo schermo con lo stesso ordine con cui viene acquisito, rispettando la distanza temporale fra i diversi campioni. Affinchè il campionamento sia effettuato correttamente, la teoria del campionamento richiede che per ogni periodo  $T$  del segnale siano acquisiti almeno due campioni ( $T_c \leq T$ ), tuttavia ciò non garantisce che la traccia visualizzata sia una fedele rappresentazione del segnale in ingresso. Come si vede in Fig. 3.28(a), 3 punti per periodo di un segnale sinusoidale non consentono un'agevole identificazione pur rispettando il requisito di Nyquist. Anzi, nel caso mostrato addirittura i tre punti mostrerebbero addirittura un segnale di ampiezza nulla. Anche con 6 punti in un periodo si hanno difficoltà nel riconoscere l'andamento sinusoidale del segnale d'ingresso (Fig. 3.28(b)). Con 9 punti (Fig. 3.28(c)) invece, il riconoscimento non presenta particolari difficoltà, e con 12 (Fig. 3.28(d)) praticamente non ci sono più ambiguità. Un aiuto può derivare da un'interpolazione lineare fra due punti adiacenti sullo schermo: se infatti l'oscilloscopio collega due campioni successivi mediante un segmento, l'ambiguità sull'andamento del segnale d'ingresso scompare già con 9 punti acquisiti nel periodo.



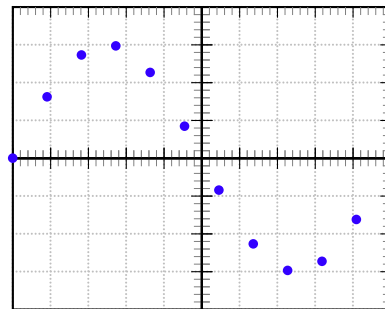
(a) Visualizzazione con 3 punti per periodo.



(b) Visualizzazione con 6 punti per periodo.

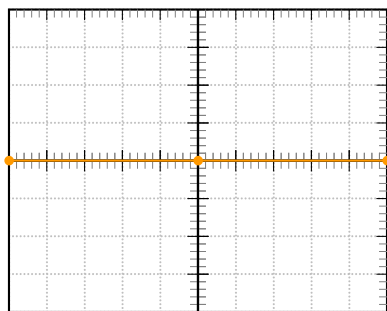


(c) Visualizzazione con 9 punti per periodo.

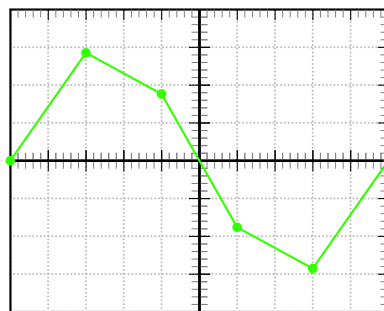


(d) Visualizzazione con 12 punti per periodo.

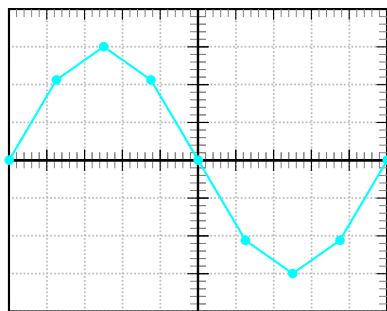
Figura 3.28: Modalità di campionamento in **tempo reale**.



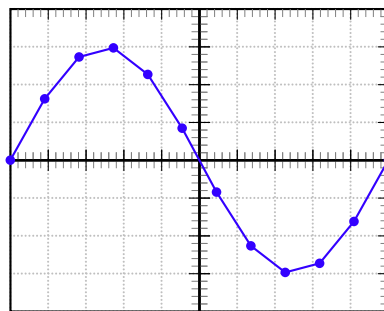
(a) Visualizzazione con 3 punti per periodo.



(b) Visualizzazione con 6 punti per periodo.



(c) Visualizzazione con 9 punti per periodo.



(d) Visualizzazione con 12 punti per periodo.

Figura 3.29: Modalità di campionamento in **tempo reale** con interpolazione lineare.

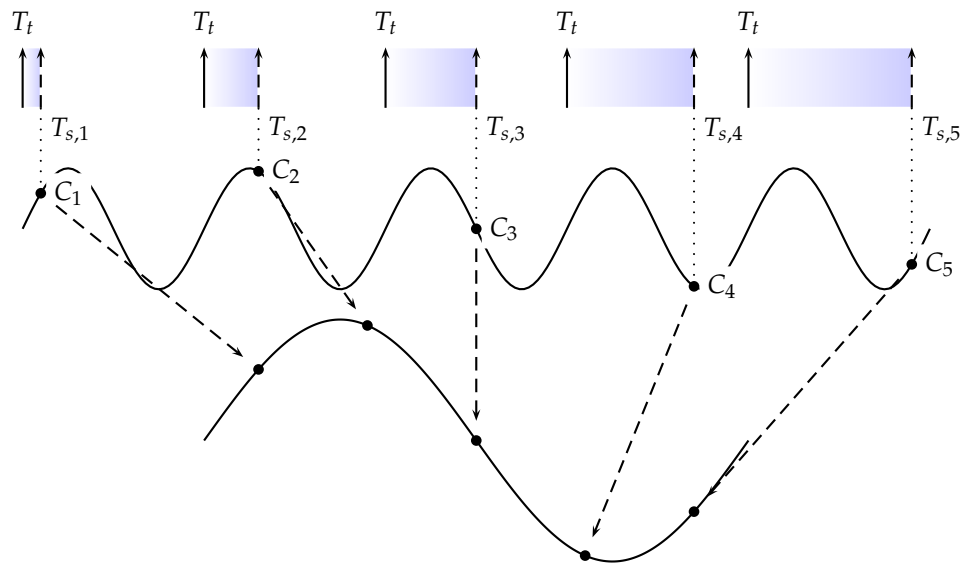


Figura 3.30: Modalità di campionamento in **tempo equivalente sincrono**.

### 3.6.1.2 Tempo equivalente sincrono

Quando i dispositivi di campionamento e conversione non sono sufficientemente veloci da permettere il campionamento del segnale in tempo reale, è possibile ricorrere a soluzioni alternative purchè il segnale da visualizzare sia rigorosamente periodico o al più ripetitivo. In tal caso, infatti, un campione acquisito dopo un tempo  $T_s$  dal trigger è uguale ad uno acquisito al tempo  $kT + T_s$ , ovvero dopo un multiplo intero  $k$  del periodo del segnale. Questo principio di funzionamento è illustrato in Fig. 3.30: il primo campione viene prelevato dopo un tempo  $T_s$  dal trigger, il secondo dopo un intervallo  $T + T_s$  anzichè  $T_s$ , sfruttando così l'uguaglianza fra i due campioni dovuta alla periodicità. Il tempo effettivo con cui viene campionato il segnale è  $T + T_s$ , mentre il tempo *equivalente* è pari a  $T_s$ . La visualizzazione invece non richiede particolari accorgimenti: il secondo campione, e così tutti i successivi, saranno sistemati in locazioni di memoria adiacenti. Questa modalità di acquisizione viene definita in tempo equivalente **sincrono** per l'impiego di segnale di sincronismo (il trigger) che regola gli istanti a partire dal quale si può far partire l'impulso di campionamento.

Poichè i campioni che compongono la traccia in memoria e di lì sullo schermo sono acquisiti in periodi successivi, in genere il tempo richiesto per l'acquisizione di un numero sufficiente di campioni per la corretta visualizzazione del segnale è particolarmente elevato. Ad esempio, supponiamo di impostare voler visualizzare 2500 campioni di un segnale periodico a frequenza 100 kHz (a cui corrisponde un periodo di 10  $\mu$ s) in un intervallo di 20 ms (impostando l'amplificazione orizzontale ad un valore di 2 ms/div). Se

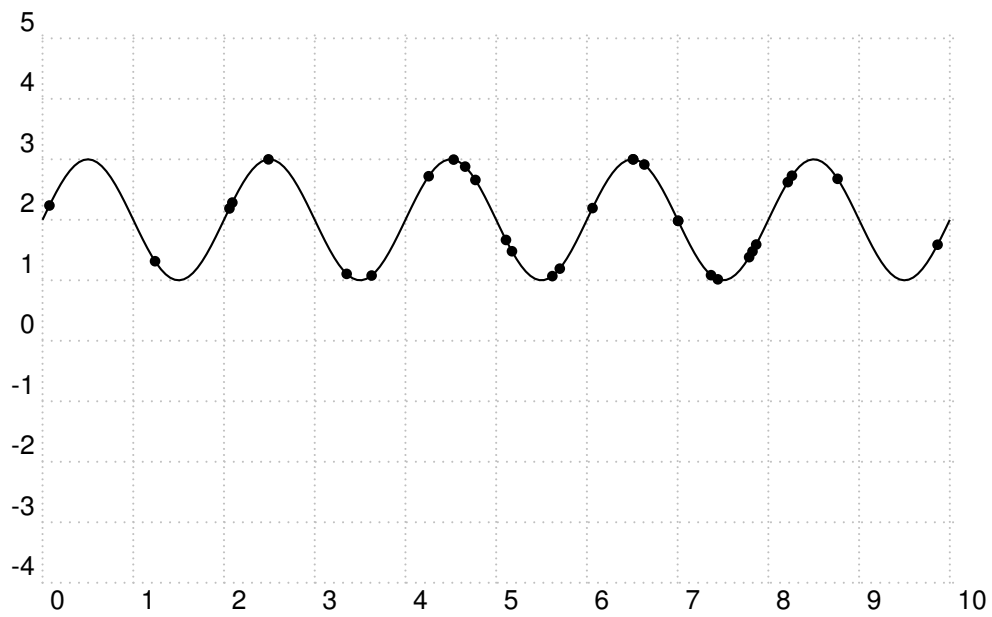


Figura 3.31: Modalità di campionamento in **tempo equivalente asincrono**.

### 3.6.1.3 Tempo equivalente asincrono o casuale



## Capitolo 4

# Misura di Tempo e Frequenza

### Introduzione

Per la misurazione di frequenza, intervallo di tempo, periodo, conteggio di eventi e molti altri parametri di segnali ad essi collegati, lo strumento ideale è il *contatore elettronico* oppure uno strumento strutturalmente molto simile ad esso, l'analizzatore di tempo e frequenza, apparso da poco sul mercato. Questo strumento offre elevata precisione, alta riconfigurabilità e basso costo. I blocchi principali del contatore sono presenti in molti altri strumenti numerici, come ad esempio quei voltmetri numerici (che abbiamo visto nel Cap. 3), che convertono la tensione in un intervallo di tempo, una frequenza o un conteggio di impulsi. Nel seguito si fa riferimento al *contatore universale*, riportandone i blocchi principali e le configurazioni di base per la determinazione di grandezze quali frequenza, periodo, fase. Infine, particolare attenzione viene rivolta alle principali cause di incertezza che intervengono nell'uso del contatore numerico.

### 4.1 Schema a blocchi

Il contatore è uno strumento utilizzato per eseguire la misurazione di diverse grandezze, quali la frequenza, il periodo, l'intervallo di tempo ed il conteggio di impulsi con elevata precisione. Per questo motivo viene spesso chiamato contatore universale. La misurazione di intervalli di tempo viene tipicamente utilizzata per:

- caratterizzare componenti attivi, come ad esempio per misurare il tempo impiegato da un segnale per attraversare un circuito integrato;
- misurare i parametri di segnali impulsivi, come ad esempio la durata, i tempi di salita e di discesa, il periodo;
- caratterizzare un cavo elettrico, ad esempio per misurare il tempo impiegato da un segnale per propagarsi lungo di esso e quindi determinarne la lunghezza;
- misurare lo sfasamento introdotto da un circuito analogico.

Alcuni contatori possono inoltre eseguire operazioni sui valori misurati, come la media di una serie di misure o il confronto tra il valore misurato ed uno di riferimento oppure altre semplici elaborazioni dei dati.

Il contatore universale è costituito da 5 blocchi fondamentali (Fig. 4.1):

1. il circuito d'ingresso;
2. la base dei tempi (oscillatore e catena di divisori);
3. la porta logica (gate);
4. il circuito di controllo;
5. l'unità decimale di conteggio e visualizzazione.

Figura 4.1: Schema a blocchi di un contatore universale

#### 4.1.1 Circuito d'ingresso

I circuiti dello stadio d'ingresso del contatore provvedono al condizionamento del segnale analogico in esame (che può in generale avere un qualsiasi tipo di andamento nel tempo: sinusoidale, rampa, etc.) in una forma opportuna per i successivi stadi digitali. Esso è costituito da:

Figura 4.2: Stadio d'ingresso del contatore universale

- un circuito di accoppiamento AC/DC: nella posizione DC il segnale è inviato direttamente al divisore di tensione (attenuatore), mentre nella posizione AC viene inserita una capacità in serie, che provvede ad eliminare la componente continua del segnale<sup>1</sup>;
- un attenuatore RC compensato, che consente di selezionare diverse sensibilità d'ingresso<sup>2</sup>;

<sup>1</sup>La selezione AC non va usata per segnali impulsivi con duty-cycle variabile, perché questi segnali hanno un valore della componente continua che varia a seconda della forma d'onda del segnale ed una variazione del duty-cycle farà variare anche il relativo livello di trigger. Ad esempio in Figura sono riportati: a) un segnale impulsivo che è sbilanciato rispetto alla sua componente continua (0 V) e che non attraversa i livelli del trigger di Schmitt regolati per un segnale bilanciato; b) una diversa regolazione della finestra di trigger per consentire la misura, sempre dello stesso segnale; c) un segnale con diverso duty-cycle che ora non attraversa più le soglie di trigger stabilite in b);

<sup>2</sup>L'attenuatore varia sia la sensibilità che l'ampiezza della finestra di trigger. Ad esempio con una sensibilità di 25 mV *rms* ed una finestra di isteresi di ampiezza  $2 \cdot 25 \cdot \sqrt{2} = 70,5$  mV, selezionando un'attenuazione x10, si ha una sensibilità di 250 mV *rms* ed una finestra di isteresi di 705 mV.

- un limitatore di tensione, generalmente a diodi, per la protezione del circuito da eventuali sovraccarichi<sup>3</sup>;
- un convertitore d'impedenza con la regolazione di livello (per la selezione del giusto livello di trigger), che converte l'elevata impedenza d'ingresso in una bassa impedenza d'uscita ed è realizzato generalmente con un amplificatore a FET;
- un trigger di Schmitt che converte i segnali in impulsi logici: esso provvede a squadrare i fronti del segnale e permette, con la sua isteresi, di ridurre la sensibilità al rumore. Come si vede da Fig. ?? l'isteresi del circuito di Schmitt produce una finestra di trigger, anziché un solo livello, e quindi vengono prodotti impulsi in uscita solo quando l'ampiezza delle variazioni del segnale d'ingresso è sufficientemente elevata. Ne segue che il rumore eventualmente sovrapposto al segnale non produce effetti indesiderati finché con le sue escursioni non supera l'ampiezza della finestra di trigger<sup>4</sup>.

Lo stadio d'ingresso prevede un controllo di pendenza che determina il funzionamento del trigger di Schmitt con segnali a pendenza positiva (+), per i quali si genera un impulso in corrispondenza dell'attraversamento del livello di trigger superiore, o negativa (-), per i quali si genera un impulso in corrispondenza dell'attraversamento del livello di trigger inferiore.

La sensibilità del contatore rappresenta il minimo valore dell'ampiezza del segnale d'ingresso che può essere misurata. Essa è determinata dal guadagno dell'amplificatore e dalla differenza di tensione tra i due livelli di isteresi del trigger di Schmitt. Se lo strumento è troppo sensibile, avendo uno stadio d'ingresso a larga banda, può risultare sensibile al rumore. La sensibilità deve essere comunque correlata con l'impedenza d'ingresso, poiché maggiore è l'impedenza e maggiore è la sensibilità ai disturbi.

#### 4.1.2 Base dei tempi

La misurazione di grandezze come la frequenza, il periodo o l'intervallo di tempo, richiedono l'utilizzo di una base dei tempi di elevata stabilità e precisione. Essa dovrà inoltre consentire la massima flessibilità per quanto riguarda sia i tempi di abilitazione della porta logica che la frequenza del segnale che viene generato. Essa è costituita da un oscillatore molto stabile (che potrebbe eventualmente essere anche esterno allo strumento) e da una serie di "divisori per (Fig. 4.3). L'oscillatore interno è in genere

Figura 4.3: Schema a blocchi della base dei tempi

<sup>3</sup>Il limitatore protegge il circuito, ma se il segnale supera i valori di soglia, può verificarsi un errore (soprattutto nella misura di intervalli di tempo), a causa dell'eventuale distorsione del segnale.

<sup>4</sup>Se l'amplificatore d'ingresso non ha una risposta in frequenza piatta, all'aumentare della frequenza del segnale si ha un'attenuazione maggiore, mentre la finestra di trigger rimane di ampiezza costante. Ciò può produrre discrepanze tra il livello di trigger misurato e quello effettivo.

al quarzo, la cui frequenza di risonanza dipende però dalla temperatura. Per questo motivo l'oscillatore spesso è posto in un contenitore isolato e termostato.

### 4.1.3 Porta logica

Il segnale, condizionato dal circuito d'ingresso, attraversa la porta che generalmente è una porta logica (*gate*) a due ingressi: ad uno di essi viene collegato il segnale in esame, mentre all'altro un segnale di abilitazione fornito dal flip-flop del circuito di controllo, ai cui ingressi sono applicati i segnali di "start e di "stop. Quando la porta è abilitata, gli impulsi da misurare vengono inviati al contatore decimale (Fig. ??). Per l'esecuzione di alcune misure il segnale d'ingresso provvede invece alla generazione del segnale di abilitazione, mentre il segnale che attraversa la porta è quello prodotto dalla base dei tempi. Questa porta ha un limite in frequenza oltre il quale non è possibile seguire

correttamente le escursioni del segnale e quindi alcuni impulsi potrebbero essere persi.

### 4.1.4 Circuito di controllo

Durante il ciclo di misurazione le condizioni operative devono essere controllate in modo che tutte le fasi siano eseguite correttamente. Questo compito viene assolto dal circuito di controllo, il quale esegue:

- il controllo della porta logica;
- la generazione di un impulso di azzeramento (reset) per le decadi di conteggio e per i divisori della base dei tempi;
- il controllo del tempo di visualizzazione;
- la generazione del segnale di controllo della memoria;
- il controllo di eventuali porte d'uscita verso la stampante o verso un computer.

Le modalità di controllo dello strumento sono essenzialmente legate al tipo di misurazione. Molto spesso il circuito di controllo è costituito da un microprocessore che esegue un opportuno programma.

### 4.1.5 Unità decimale di conteggio e visualizzazione

È costituita da un certo numero di decadi di conteggio, collegate in cascata. Ogni decade è costituita da:

- un contatore a decadi;
- una memoria;
- un decodificatore da formato BCD a formato decimale;

- un driver per il visualizzatore numerico;
- un visualizzatore numerico.

Gli impulsi che attraversano la porta logica vengono inviati alla prima decade che provvede al loro conteggio. Quando viene contato il decimo impulso, la decade passa da 9 a 0, inviando alla decade successiva un impulso di riporto (*carry*). Le decadi, disposte in cascata, alla fine del conteggio forniscono il risultato in formato BCD (*binary coded decimal*) in cui si associa un valore decimale ad ogni gruppo di 4 bit che assumono i valori da 0 (0000) a 9 (1001). Ogni segnale in uscita dalle decadi attraversa un flip-flop di tipo *D* che consente di memorizzazione il risultato e quindi di mantenere stabile la visualizzazione mentre lo strumento sta eseguendo un successivo ciclo di misurazione. L'uscita dalla memoria viene inviata da un convertitore BCD-decimale e quindi ai circuiti di pilotaggio (*drivers*) del visualizzatore numerico. Spesso l'uscita BCD delle decadi è disponibile su una porta ausiliaria.

## 4.2 Modalità operative

### 4.2.1 Conteggio di impulsi

Il segnale d'ingresso, dopo aver attraversato lo stadio di condizionamento, viene inviato alla porta logica e quindi all'unità di conteggio. La porta viene abilitata (*start*) e disabilitata (*stop*) con un interruttore (controllo manuale) o con un impulso fornito da un circuito esterno (controllo remoto). I comandi di *start* e di *stop* definiscono un segnale ad onda quadra (segnale di *gate*) che rappresenta la finestra temporale di misurazione. Il circuito di controllo esegue le necessarie connessioni. In Fig. 4.4 sono riportate la configurazione del contatore ed i segnali più importanti per l'esecuzione di questo tipo di misurazione. Per semplicità la porta logica ed il flip-flop di controllo sono rappresentate con un unico blocco di interruzione, controllato dai comandi di *start* e di *stop*. Il segnale di *gate* individua l'intervallo di tempo in cui la porta è abilitata.

Figura 4.4: Principio di funzionamento del conteggio di impulsi

### 4.2.2 Misurazione di frequenza

La frequenza viene misurata contando il numero di impulsi del segnale d'ingresso durante un intervallo di tempo definito. L'abilitazione della porta viene controllata dalla base dei tempi per un intervallo di tempo stabilito. È evidente l'importanza della precisione con cui deve essere generato tale segnale di abilitazione.

In Fig. 4.5 sono riportate la configurazione del contatore ed i segnali più importanti per l'esecuzione di questo tipo di misurazione. L'oscillatore genera un segnale che viene prima condizionato in modo da ottenere un segnale ad onda quadra che poi

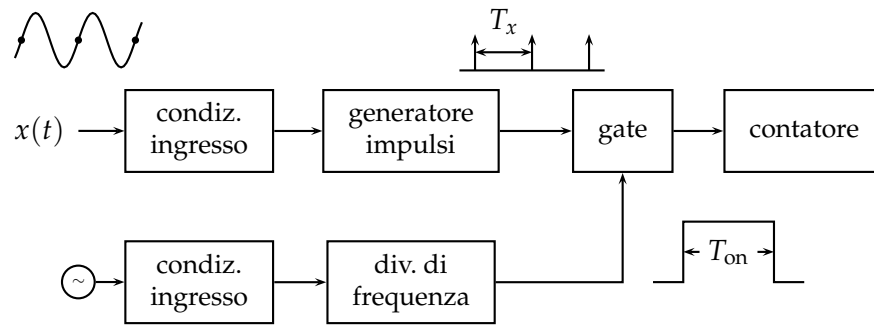


Figura 4.5: Principio di funzionamento della misurazione di frequenza

viene eventualmente diviso in frequenza per far sì che i fronti di salita e discesa, corrispondenti agli istanti di start e di stop che determinano l'ampiezza della finestra di gate di misurazione degli impulsi del segnale d'ingresso, siano alla distanza temporale  $T_{on}$  più adatta alle esigenze di misura, come verrà chiarito a breve.

Gli impulsi contati durante  $T_{on}$  esprimono il valore della frequenza, nell'unità di misurazione corrispondente al fattore di divisione della base dei tempi selezionato. Se  $T_{on}$  rappresenta la durata dell'intervallo di tempo che intercorre tra il comando di start e quello di stop, mentre  $T_x$  è il periodo del segnale di ingresso, ossia la distanza temporale tra due impulsi, si può scrivere:

$$T_{on} = N_x T_x, \quad (4.1)$$

dove  $N_x$  è il numero di periodi contati.

La frequenza incognita  $F_x$  risulta pertanto:

$$F_x = \frac{1}{T_x} = \frac{N_x}{T_{on}}, \quad (4.2)$$

ed è ottenuta perciò con una risoluzione<sup>5</sup> pari a:

$$\Delta F = \frac{1}{T_{on}}, \quad (4.3)$$

inversamente proporzionale al tempo di apertura  $T_{on}$  della gate. Ciò vuol dire che per misurare frequenze più piccole è necessario aumentare il tempo di apertura della gate. Se infatti la frequenza diminuisce, gli impulsi associati all'inizio di ogni periodo sono maggiormente distanziati fra di loro, e pertanto solo con intervalli di apertura della gate maggiori si riuscirà a far sì che almeno un impulso venga contato. Notiamo che la misura richiede un tempo almeno pari al tempo  $T_{on}$  di apertura della gate, pertanto un aumento della risoluzione comporta un uguale aumento del tempo di misura.

<sup>5</sup>La risoluzione è la minima grandezza misurabile, ovvero quella che sposta l'indicazione dello strumento dallo zero, e si ottiene ponendo  $N_x = 1$ .

La risoluzione relativa:

$$\Gamma_F = \frac{\Delta F}{F_x} = \frac{1}{T_{\text{on}} F_x} = \frac{1}{N_x} \quad (4.4)$$

è invece inversamente proporzionale al numero  $N_x$  di periodi del segnale di ingresso considerati. Tale incertezza diminuisce perciò al crescere del valore di  $N_x$ , ossia del numero di cifre con cui viene espresso il risultato. Per ottenere un numero sufficiente di cifre è quindi necessario adeguare la durata di apertura del gate al valore della frequenza da misurare.

Nella misurazione della frequenza, l'operatore può specificare il **tempo di apertura della gate**  $T_{\text{on}}$  oppure la **risoluzione** con cui desidera determinare questa grandezza.

Supponendo di avere fissato il valore di  $T_{\text{on}}$  si può scrivere:

$$N_x = T_{\text{on}} F_x, \quad (4.5)$$

poichè  $T_{\text{on}}$  è fissato, il numero impulsi contati è direttamente proporzionale alla frequenza incognita  $F_x$ . Se ad esempio  $T_{\text{on}} = 1$  s ed  $F_x$  è dell'ordine del MHz, si ottiene  $N_x \approx 10^6$ , per cui la risoluzione relativa è dell'ordine di  $10^{-6}$ . Se però  $F_x$  ha un valore di qualche Hz,  $N_x$  è pari solo a qualche unità, e la risoluzione relativa nel conteggio è dell'ordine di  $10^{-1}$ , valore in genere non accettabile.

È però possibile specificare la risoluzione relativa con cui si desidera conoscere il risultato. Dalle relazioni:

$$\Gamma_F = \frac{1}{N_x} \quad (4.6)$$

$$T_{\text{on}} = \frac{N_x}{F_x} \quad (4.7)$$

si ricava che, fissato  $\Gamma_F$ , resta fissato anche il numero di conteggi  $N_x$ , mentre il tempo di apertura del gate risulta inversamente proporzionale alla frequenza incognita  $F_x$ . Se ad esempio si fissa  $\Gamma_F = 0,1\%$  si ricava  $N_x = 1/\Gamma_F = 1000$ . Per valutare una frequenza incognita dell'ordine dei MHz con la risoluzione fissata è sufficiente un tempo dell'ordine del ms, mentre se la frequenza incognita è dell'ordine dell'Hz, per ottenere la risoluzione desiderata è necessario che la durata dei conteggi sia di circa  $16 \sim 17$  minuti, non accettabile in molte situazioni pratiche.

Le precedenti considerazioni permettono di dedurre che il metodo proposto fornisce buoni prestazioni quando la frequenza da misurare è elevata, mentre non è molto adatto per bassi valori di frequenza.

### 4.2.3 Misurazione del rapporto tra due frequenze

È un metodo molto semplice per confrontare tra loro due frequenze. Lo schema di misurazione, rappresentato in Fig. 4.6, è lo stesso di quello per la misurazione di frequenza, con l'eccezione che l'ingresso della base dei tempi non proviene dall'oscillatore, ma è costituito dal secondo ingresso (il segnale a frequenza inferiore). Si supponga che la

durata  $T_{on}$  di apertura del gate corrisponda a  $N_b$  periodi  $T_b$  del segnale  $x_b$ ; se in tale intervallo vengono contati  $N_a$  impulsi ottenuti dal segnale  $x_a$  di periodo  $T_a$ , si ha:

$$T_{on} = N_b T_b = N_a T_a, \quad (4.8)$$

dalla quale si ricava

$$T_b/T_a = F_a/F_b = N_a/N_b. \quad (4.9)$$

Selezionando un rapporto di divisione unitario per la base dei tempi, il segnale  $x_b$  non viene diviso e quindi il risultato rappresenta direttamente il rapporto  $F_a/F_b$ . La possibilità di variare il numero di periodi del segnale  $x_b$  ossia l'intervallo di apertura del gate, consente di scegliere il numero di cifre del risultato. In particolare, scegliendo  $N_b$  sufficientemente elevato è possibile ottenere un confronto accurato anche di frequenze relativamente prossime tra loro. Lo svantaggio di questo metodo è dovuto al fatto che quando le due frequenze sono dello stesso ordine di grandezza la precisione della misura peggiora.

Figura 4.6: Principio di funzionamento della misurazione del rapporto tra due frequenze

#### 4.2.4 Misurazione di periodo

La misurazione di frequenza con elevata risoluzione implica che il tempo d'apertura della porta logica debba essere il più lungo possibile. Nel caso di segnali a bassa frequenza questo tempo può risultare eccessivamente lungo: ad esempio per avere una risoluzione di 1 ppm con un segnale ad 1 MHz, è necessario avere un segnale di gate di 1 s, mentre con un segnale ad 1 kHz la stessa risoluzione richiede un tempo di misurazione di 1000 s. Questo problema può essere risolto misurando il periodo anziché la frequenza. In Fig. 4.7 è riportata la configurazione per l'esecuzione di questa misurazione. Il segnale da misurare, dopo aver attraversato la sezione d'ingresso, viene inviato all'ingresso di controllo della porta logica, determinandone il tempo di apertura. Sull'altro ingresso della porta viene inviato il segnale proveniente dalla base dei tempi.

Il numero di impulsi contati rappresenta il numero di impulsi prodotti dalla base dei tempi nell'intervallo di tempo in cui la porta è abilitata, cioè in un periodo del segnale d'ingresso. Essendo nota la frequenza di questi impulsi, dal loro numero si risale alla durata dell'intervallo di tempo. Detti  $T_x$  il periodo incognito e  $T_c$  il periodo del segnale fornito dalla base dei tempi, si ha:

$$T_{on} = T_x = N_c T_c, \quad (4.10)$$

la quale mostra che, noto  $T_c$ , per determinare  $T_x$  è sufficiente contare il numero di impulsi  $N_c$  che transitano attraverso il gate durante l'intervallo di apertura. Poiché  $T_c$  non

può essere ridotto oltre un certo valore minimo dipendente dalla base dei tempi utilizzata, per esprimere il risultato con un adeguato numero di cifre (ovvero, aumentarne la risoluzione), è necessario che il periodo  $T_x$  incognito sia sufficientemente maggiore del valore minimo di  $T_c$ .

Figura 4.7: Principio di funzionamento della misurazione di periodo

Lo svantaggio di questo metodo è dovuto al fatto che la precisione può essere bassa per via degli errori di trigger. Questo tipo di errore può essere ridotto eseguendo la lettura di un certo numero di periodi e mediando poi il risultato. In Fig. 4.8 è riportata la configurazione dello strumento per eseguire la misurazione di periodi multipli. Il segnale d'ingresso viene inviato al divisore della base dei tempi<sup>6</sup>, la porta logica viene abilitata dal primo impulso d'uscita dal divisore e disabilitata dal secondo. Essendo noto il numero di impulsi del segnale d'ingresso che provvedono a generare la finestra temporale di misurazione, dal numero di impulsi contati è possibile ricavare il periodo medio del segnale. Il periodo incognito è quindi dato dalla relazione:

$$T_x = \frac{T_{on}}{N_x} = \frac{N_c T_c}{N_x}. \quad (4.11)$$

Le risoluzioni assoluta e relativa valgono pertanto:

$$\Delta T = \frac{T_c}{N_x} \quad (4.12)$$

$$\Gamma_T = \frac{\Delta T}{T_x} = \frac{T_c}{N_c T_c} = \frac{1}{N_c} \quad (4.13)$$

e sono inversamente proporzionali rispettivamente al numero di periodi  $N_x$  e al numero di impulsi contati  $N_c$ . Si noti però che nella misurazione del periodo medio il numero di conteggi  $N_c$  è maggiore di quello che si sarebbe ottenuto se il conteggio fosse stato effettuato su un solo periodo, riducendo di conseguenza la risoluzione relativa. Confrontando il metodo di misurazione della frequenza con quello della misurazione

Figura 4.8: Principio di funzionamento della misurazione di periodi multipli

di periodi multipli, si può dire che il primo permette di ottenere elevate precisioni per frequenze superiori alla frequenza dell'oscillatore, mentre il secondo per frequenze inferiori.

<sup>6</sup>Il divisore permette di regolare la frequenza del segnale ed eliminare il pericolo di overflow nel caso di media su un numero elevato di periodi.

### 4.3 Contatori reciproci

I contatori reciproci sono contatori che eseguono sempre la misurazione di periodo sul segnale d'ingresso. Se è richiesta la misurazione della frequenza viene presentato il valore inverso di quello misurato. Questa tecnica offre due vantaggi.

- L'errore di quantizzazione di  $\pm 1$  impulso è indipendente dalla frequenza del segnale d'ingresso, quindi per un segnale esente da rumore, assumendo trascurabili gli errori di trigger e della base dei tempi, la risoluzione del contatore reciproco è indipendente dal segnale d'ingresso.

Come precedentemente accennato, l'errore relativo nella misurazione della frequenza vale  $\pm 1/F_x$ , mentre l'errore relativo nella misurazione del periodo vale  $\pm T_c/T_x$ . Per una data durata della finestra temporale di abilitazione della porta logica (pari a  $T_{on}$  nella misura di frequenza e  $T_x$  per la misura di periodo), l'errore nella misurazione di frequenza è inversamente proporzionale ad  $F_x$ , mentre nella misurazione di periodo, per la stessa durata della finestra, è costante e dipende da  $T_c$ , come mostrato in Fig. 4.9. Come si evince dalla figura, la tecnica utilizzata dei contatori reciproci con-

Figura 4.9: Errore di quantizzazione

sente di ridurre gli errori di quantizzazione per segnali aventi frequenze minori della frequenza di clock. Oppure, questa tecnica consente di ottenere le stesse prestazioni che si hanno con la misurazione di frequenza, ma con tempi di misurazione notevolmente inferiori. Alcuni contatori reciproci hanno una portata massima pari a quella della frequenza di clock. In quelli con portata superiore, quando il segnale d'ingresso supera la frequenza di clock si esegue automaticamente la misurazione di frequenza. In Fig. 4.10 è riportato lo schema a blocchi di un contatore reciproco, che è del tutto simile ad uno convenzionale, eccetto che il conteggio del tempo e degli eventi viene effettuato in due registri separati. Il risultato di questi conteggi viene elaborato per fornire la grandezza richiesta. Il contatore degli eventi conta gli impulsi del segnale d'ingresso mentre,

Figura 4.10: Schema a blocchi di un contatore reciproco

contemporaneamente, il contatore dei tempi conta gli impulsi prodotti dalla base dei tempi. Durante la misurazione di periodo, la porta logica è aperta per la durata di un periodo, sotto il controllo del segnale d'ingresso. Il contatore degli eventi conterà 1 impulso, mentre quello dei tempi un certo numero di impulsi di clock. Il prodotto del numero di impulsi del contatore dei tempi per il periodo del clock fornisce il periodo del segnale d'ingresso. Durante la misurazione multi periodo, la porta logica è aperta per la durata di più di un periodo. Il contatore degli eventi e quello dei tempi conterranno un certo numero di impulsi di clock. Il prodotto del numero di impulsi del contatore dei tempi per il periodo del segnale di clock fornisce il tempo totale. Dividendo questo tempo per il numero di eventi contati si ottiene il periodo medio.

**Parte III**

**Metodi di Misura**



## Capitolo 5

# Misura di resistenze in continua

### I metodi di ponte

Un metodo utilizzato spesso nelle misure è quello di ponte, così chiamato perché la configurazione del circuito di misura prevede una sezione (detta anche diagonale) di alimentazione attraverso la quale fluisce potenza, e un'altra di misura. Tra la diagonale di alimentazione e di misura sono posti componenti elementari quali resistori, induttanze e capacità, in configurazione singola ma anche in serie o parallelo fra di loro. Il funzionamento del ponte si basa sull'esistenza di un legame funzionale  $f(\cdot)$  fra il misurando, altre grandezze ausiliarie e una tensione (o corrente). Imponendo che quest'ultima abbia un valore noto, di solito lo zero, è possibile ricavare una relazione fra il misurando e le grandezze ausiliarie.

### 5.1 Ponte di Wheatstone

Un metodo classico per la misura di resistenze di ordine medio è il ponte di Wheatstone, una cui schematizzazione è riportata in Fig. 5.1. Come si può vedere esso presenta 4 resistenze connesse in modo da realizzare una maglia di forma quadrangolare. Su una delle diagonali (detta diagonale di *rivelazione*) è inserito un galvanometro a zero centrale  $G$ , mentre sull'altra (diagonale di *alimentazione*) è inserito il circuito di alimentazione potenziometrica. Dei resistori inseriti nei lati del quadrilatero:

- $R_x$  costituisce il misurando;
- $R_a$  ed  $R_b$  sono resistori campione (di valore fisso o variabile a spine);
- $R_c$  è un resistore campione a decadi;

Il rivelatore di zero  $G$  posto tra i nodi  $A$  e  $B$ , è sensibile al passaggio di corrente. Esso solitamente offre la possibilità di impostare diversi valori di fondoscala, sebbene tutti aventi valore molto piccolo (tipicamente nell'ordine dei nA o al più del mA) e selezionabili mediante un apposito selettore di sensibilità. Quando la sua indicazione è

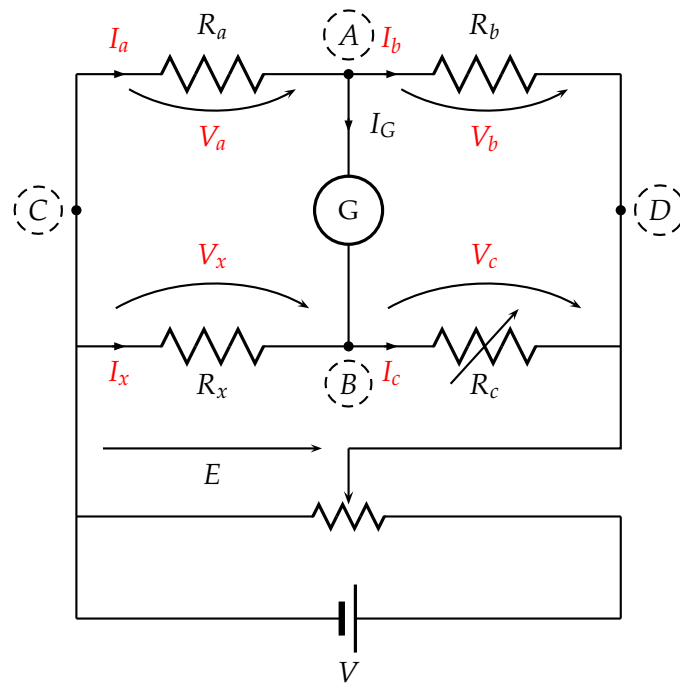


Figura 5.1: Schema circuitale del Ponte di Wheatstone

pari a zero si dice che il ponte è in condizioni di equilibrio. Ciò può essere individuato osservando la posizione dell'indice del galvanometro, che si deve portare al centro della scala galvanometrica. In condizioni di equilibrio, essendo nulla la corrente che fluisce nella diagonale di rivelazione  $I_G$  ( $I_G = 0$ ), risulta:

$$\begin{aligned} I_a &= I_b \\ I_x &= I_c \end{aligned} \quad (5.1)$$

ed ancora, tenendo conto del fatto che per  $I_G$  nulla risulta anche  $V_{AB}$  nulla:

$$\begin{aligned} I_a R_a &= I_x R_x \\ I_b R_b &= I_c R_c. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Dividendo membro a membro (e tenendo conto delle relazioni esistenti tra le varie correnti), si ricava la condizione di equilibrio:

$$R_x = \frac{R_a}{R_b} R_c. \quad (5.3)$$

Pertanto, agendo sulla resistenza a decadi  $R_c$  secondo la procedura illustrata nel successivo paragrafo, si realizza la condizione di equilibrio e poi, applicando la relazione precedente (essendo noti  $R_a$ ,  $R_b$  ed  $R_c$ ) si ricava il valore del misurando  $R_x$ .

### 5.1.1 Procedura di misura

Notiamo innanzitutto, in maniera peraltro abbastanza ovvia, che la presenza di un'alimentazione  $E$  pari ad un'aliquota della tensione  $V$  induce una corrente  $I$  che si ripartisce nei due rami del ponte in dipendenza dei valori dei valori ohmici delle resistenze  $R_a$ ,  $R_b$ ,  $R_c$  ed  $R_x$ . Poiché nella fase iniziale della misura, il valore della resistenza campione  $R_c$  potrebbe essere anche molto diverso da quello che soddisfa la condizione di equilibrio, la corrente nella diagonale di rivelazione  $AB$  potrebbe essere molto maggiore di quella massima sostenibile dal galvanometro  $G$ . Per scongiurare il pericolo di danneggiare lo strumento, si alimenta il ponte con tensioni iniziali sufficientemente piccole (tali cioè da produrre correnti inferiori alla portata del galvanometro anche in condizioni di forte squilibrio iniziale), ottenendo così una riduzione della sensibilità del ponte. Per lo stesso motivo si imposta il galvanometro con sensibilità bassa mediante l'apposito selettore che, grazie all'inserzione di resistenze in serie e in parallelo di valore noto, riduce la corrente che circola nel ramo di rivelazione e nell'elemento sensibile dello strumento, così da fornire un ulteriore livello di protezione.

Partendo perciò da tensioni di alimentazione e sensibilità del galvanometro basse, operando opportunamente sul resistore a decadi  $R_c$ , ci si avvicina alla condizione di equilibrio, indicata dal posizionamento dell'indice mobile dello strumento intorno, o addirittura sullo zero. Tale condizione è solo apparentemente di equilibrio perché l'indicazione di valore nullo per la corrente è solo un effetto delle basse sensibilità impostate al ponte (con un valore di alimentazione piccolo) e al galvanometro (mediante la selezione di una sensibilità strumentale bassa). Tuttavia, anche se non zero, la corrente si può ritenere piccola, per cui a partire da questa condizione è possibile aumentare la sensibilità del ponte aumentando la tensione di alimentazione<sup>1</sup> e la sensibilità propria dello strumento. Mano a mano che aumento i valori di sensibilità, si affina la condizione di equilibrio operando sulle decadi meno significative del resistore campione. In altre parole, se con sensibilità  $S_1$  si è determinata la condizione più vicina a quella di equilibrio operando con, supponiamo, le decadi delle centinaia di Ohm e si è verificato che invece variazioni dell'ordine della decina di Ohm non modificavano la posizione dell'indice del galvanometro, aumentando la sensibilità al valore  $S_2$  si potrà cominciare a operare direttamente sulle decadi delle decine di Ohm. Essendo la risoluzione della resistenza a decadi definita dal valore della decade meno significativa (in genere  $0,1 \Omega/\text{step}$ ), ci si accorge che, con sensibilità del ponte spinta al valore massimo, non si riesce sempre ad azzerare la corrente nella diagonale di rivelazione. Potrebbe, infatti, accadere che impostando un certo valore di  $R_c$ , l'indice di  $G$  si trovi a sinistra dello zero

---

<sup>1</sup>Qual è la tensione massima applicabile al circuito? Per rispondere, bisogna ricordare che al crescere della tensione  $E$  aumenta anche la corrente che circola nelle resistenze del ponte: essa non deve perciò superare il valore di corrente massima  $I_m$  che è quel valore oltre il quale non vengono più garantite dal costruttore delle resistenze le incertezze (o tolleranze) dichiarate. Va indicato chiaramente che la  $I_m$  **non** è la corrente oltre la quale la resistenza si brucia, ma "solo" quella oltre la quale, a causa ad esempio di un aumento di temperatura, la resistenza può variare il suo valore oltre i limiti di incertezza dichiarati. Ciò può avere a volte conseguenze più dannose della rottura della resistenza perché porta a considerare quale incertezza da associare al valore nominale un intervallo che non è detto che resti inalterato a causa dell'aumento di temperatura.

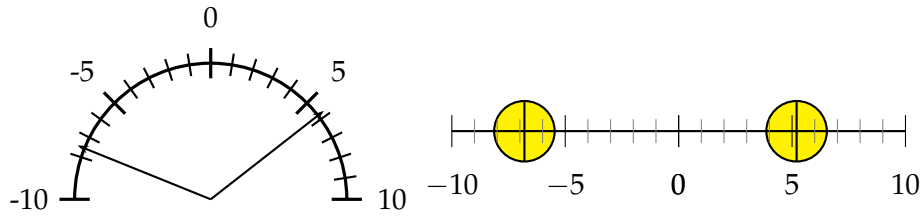


Figura 5.2: Esempio di deviazioni dallo zero.

e che, variando di  $0,1 \Omega$  (o comunque di un valore pari alla risoluzione) la resistenza  $R_c$ , l'indice di  $G$  si sposti a destra dello zero<sup>2</sup>. Non essendo possibile dare alla resistenza campione variazioni inferiori alla sua risoluzione (ipotizzata in questo caso pari a  $0,1 \Omega/\text{step}$ ), non si riesce a raggiungere la condizione di equilibrio. In tal caso, si esegue un'interpolazione numerica per valutare il valore di  $R_c$  che avrebbe teoricamente portato alla condizione di equilibrio. A titolo di esempio, supponiamo che impostando la resistenza  $R_c$  su  $R_s = 715,5 \Omega$ , l'indice del galvanometro devii a sinistra dello zero di  $\lambda_s = -7$  deviazioni e che in corrispondenza del valore di  $R_c$  pari a  $R_d = 715,6 \Omega$ , il galvanometro presenti  $\lambda_d = 5$  deviazioni a destra dello zero (vedi Fig. 5.2). Ipotizzando la linearità di funzionamento del galvanometro nell'intorno dello zero si può ricavare il valore di  $R_c = R_0$  corrispondente alla posizione dell'indice sullo zero. Facendo riferimento alla Fig. 5.3 si può ricavare l'espressione della retta che interpola i punti  $(\lambda_s, R_s)$  e  $(\lambda_d, R_d)$ :

$$R(\lambda) = \frac{R_d - R_s}{\lambda_d - \lambda_s} (\lambda - \lambda_d) + R_d \quad (5.4)$$

Il valore teorico di azzeramento del galvanometro  $R_0$  si ricava invertendo l'espressione

<sup>2</sup>Il motivo per tale situazione è da ricercarsi nel fatto che il valore della resistenza incognita  $R_x$  non è detto che abbia lo stesso numero di cifre decimali della resistenza  $R_c$ : qualora il misurando avesse anche una sola cifra decimale in più, essa basterebbe a creare la condizione descritta.

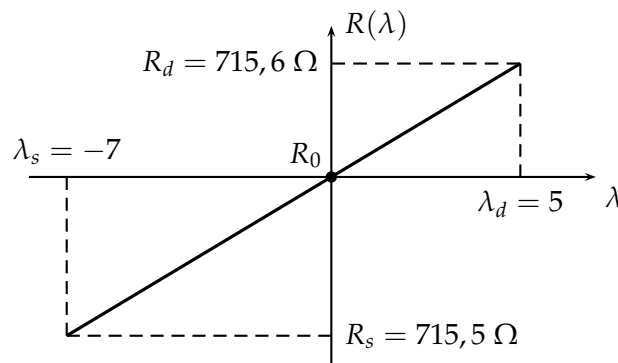


Figura 5.3: Interpolazione per la valutazione del valore  $R_0$

precedente dopo aver imposto  $\lambda = 0$ :

$$\begin{aligned} \lambda = 0 \Rightarrow R_0 &= -\lambda_d \frac{R_d - R_s}{\lambda_d - \lambda_s} + R_d = \frac{\lambda_d R_s - \lambda_s R_d}{\lambda_d - \lambda_s} = \\ &= \frac{5 \cdot 715,5 - (-7) \cdot 715,6}{5 - (-7)} = 715,558\bar{3} \Omega. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Dal penultimo passaggio si può osservare che l'espressione ricavata corrisponde alla media pesata dei due valori di resistenza  $R_d$  e  $R_s$  con pesi pari al numero di deviazioni associate. Si può a questo punto valutare il valore del misurando  $R_x$  tramite il valore  $R_0$ , nel caso in cui i valori  $R_a$  e  $R_b$  siano uguali:

$$\boxed{R_x = \frac{R_a}{R_b} R_0 = R_0 = 715,558\bar{3} \Omega.} \quad (5.6)$$

### 5.1.2 Valutazione dell'incertezza $u_{R_x}$

Poiché la misura di  $R_x$  con il metodo del ponte di Wheatstone è di tipo indiretto, l'incertezza ad essa associata si deve valutare applicando la legge di propagazione delle incertezze nelle misure indirette studiata in precedenza (vedi Sez. 1.11). In particolare, poiché la relazione che lega  $R_x$  alle grandezze note  $R_a$ ,  $R_b$  ed  $R_c$  contiene solo prodotti e rapporti, si può facilmente verificare che l'incertezza relativa elevata al quadrato  $u_{R_x}/R_x$  risulta uguale alla somma delle incertezze relative dei singoli termini anch'esse elevate al quadrato:

$$\left(\frac{u_{R_x}}{R_x}\right)^2 = \left(\frac{u_{R_a}}{R_a}\right)^2 + \left(\frac{u_{R_b}}{R_b}\right)^2 + \left(\frac{u_{R_0}}{R_0}\right)^2 + u_G^2 \quad (5.7)$$

Oltre ai contributi relativi alle resistenze  $R_a$ ,  $R_b$  ed  $R_0$ , compare un termine  $u_G$  noto come *incertezza di sensibilità*, per il quale si rimanda alla successiva Sez. 5.1.3.

A scopo esemplificativo, riportiamo l'esempio di calcolo per l'incertezza  $u_{R_0}$  del valore teorico  $R_0$  di azzeramento del ponte. Dalle specifiche fornite dal costruttore della resistenza, rileviamo che gli errori massimi (tolleranze) percentuali propri di ogni decade sono:  $\epsilon_{0,1\Omega} = 0,5\%$ ,  $\epsilon_{1\Omega} = 0,15\%$ ,  $\epsilon_{10\Omega,100\Omega,1k\Omega} = 0,05\%$ . L'incertezza su  $R_0$

sarà pertanto pari a<sup>3</sup>:

$$u_{R_0} = \frac{700 \cdot \epsilon_{100\Omega} + 10 \cdot \epsilon_{10\Omega} + 5 \cdot \epsilon_{1\Omega} + 0,5 \cdot \epsilon_{0,1\Omega}}{100 \sqrt{3}} = 0,210732 \Omega \quad (5.9)$$

Vale la pena notare che nella determinazione dell'incertezza su  $R_0$  è del tutto indifferente usare il valore  $R_0$ ,  $R_d$  o  $R_s$  in quanto la differenza tra i tre valori è al più sulle unità o addirittura decimi di Ohm. Ciò, per i valori di incertezza dichiarata, non incide significativamente sull'incertezza composta che invece viene determinata in massima parte dal contributo dovuto alle centinaia di Ohm.

### 5.1.3 L'incertezza di sensibilità $u_G$

L'uguaglianza (5.7) mostra che all'incertezza dovuta alle tre resistenze di valore noto va aggiunta un'ulteriore aliquota di incertezza dipendente dal fatto che il ponte di Wheatstone impiega un metodo di zero. Ogni qualvolta si usa un metodo di zero, infatti, bisogna tener conto del fatto che le relazioni di equilibrio sono valide nell'ipotesi in cui sia rigorosamente verificato l'azzeramento di una grandezza (una corrente o una tensione) nel circuito di misura. In particolare, nel caso del ponte di Wheatstone, la relazione che esprime il valore della resistenza incognita in funzione delle altre tre resistenze note è valida in condizione di azzeramento della corrente  $I_G$  nel ramo di rivelazione. Una corretta valutazione della incertezza nel metodo del ponte di Wheatstone (e più in generale di tutti i metodi di zero) deve tener conto del fatto che nella diagonale di rivelazione potrebbe circolare una corrente tanto piccola da non essere apprezzabile sul rivelatore di zero. Nella fattispecie, non appena la corrente  $I_G$  scende al di sotto del valore minimo rilevabile dal galvanometro (detto *soglia di sensibilità*), l'indice darà un'indicazione di zero all'operatore sebbene la corrente circolante nello strumento non lo sia. Nasce quindi l'esigenza di stimare il contributo all'incertezza dovuto al fatto che si usa un'espressione valida all'equilibrio sebbene non si sia certi che l'equilibrio (cioè la condizione di zero) sia realmente raggiunto.

Per affrontare il problema della stima dell'incertezza di sensibilità del ponte di Wheatstone, si può operare con due approcci distinti: un approccio **sperimentale** (*a posteriori*) ed un approccio **teorico** (*a priori*). L'aliquota di incertezza che così determineremo è detta incertezza di sensibilità  $u_G$ , ed è definita in termini relativi come *la*

<sup>3</sup>L'approccio usato si riferisce ad una valutazione dell'incertezza che, a partire dagli errori massimi dichiarati per ogni decade, determina prima l'errore massimo sul valore di resistenza complessiva come somma degli errori relativi alle singole decadi, e successivamente l'incertezza come errore massimo diviso  $\sqrt{3}$ . In pratica, si applica prima la legge di propagazione degli errori, e dopo aver determinato l'errore massimo si passa alla varianza. L'approccio di tipo probabilistico prevede invece la valutazione dell'incertezza composta come somma quadratica delle incertezze sulle singole decadi, applicando quindi la legge di propagazione dell'incertezza, ovvero:

$$u_{R_0} = \frac{\sqrt{(700 \cdot \epsilon_{100\Omega})^2 + (10 \cdot \epsilon_{10\Omega})^2 + (5 \cdot \epsilon_{1\Omega})^2 + (0,5 \cdot \epsilon_{0,1\Omega})^2}}{100 \sqrt{3}} = 0,202144 \Omega \quad (5.8)$$

variazione virtuale infinitesima  $dR_x$  da dare alla resistenza incognita  $R_x$ , che induce la minima variazione apprezzabile sul rivelatore di zero  $G$ , diviso  $\sqrt{3}$ :

$$u_G = \frac{dR_x}{R_x} \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (5.10)$$

L'espressione precedente ci fa intuire che il termine  $dR_x/R_x$  debba essere interpretato come errore. Tale intuizione è confermata dalla considerazione che se il galvanometro  $G$  indica uno zero per qualunque valore di  $R_x$  (supponendo che essa possa essere variata) che non si discosti dal valore "vero" più della quantità  $dR_x$ , allora  $dR_x$  è l'errore massimo che si può commettere nella misura di  $R_x$  perché tutti i valori di  $R_x$  che si discostano dal valore atteso meno della quantità  $dR_x$  daranno la stessa indicazione di zero. Da ciò discende la validità dell'interpretazione della (5.10) in termini di incertezza relativa.

### 5.1.3.1 Approccio sperimentale

In un approccio sperimentale alla valutazione dell'incertezza  $u_G$  bisogna innanzitutto trovare un'espressione alternativa alla (5.10), in quanto, proprio perché sperimentale, essa richiede di operare su grandezze reali e non sulle variazioni virtuali che rientrano nella definizione. Ricordando allora che all'equilibrio vale la (5.3), possiamo scrivere il differenziale

$$dR_x = \frac{R_a}{R_b} dR_c, \quad (5.11)$$

da cui discende che

$$\frac{dR_x}{R_x} = \frac{R_a}{R_b} \frac{dR_c}{R_x} = \frac{dR_c}{R_c}. \quad (5.12)$$

Quindi, una variazione relativa *virtuale* di  $R_x$  equivale numericamente ad una variazione *reale* di  $R_c$ . Sempre dalla definizione di  $u_G$ , ricordiamo che essa è la variazione relativa a cui corrisponde la minima variazione di corrente  $\delta\lambda$  apprezzabile sul galvanometro. Può succedere però che la minima variazione applicabile a  $R_c$ , pari alla risoluzione della resistenza campione a decadi che di solito si ferma al decimo di Ohm, la corrente si sposti di una quantità  $\Delta\lambda$  maggiore di  $\delta\lambda$ . Possiamo però fare affidamento alle caratteristiche di linearità del ponte nell'intorno dell'equilibrio: se infatti ad una variazione  $\Delta R_c$  (che può anche essere maggiore della risoluzione di  $R_c$ ) corrisponde una deviazione pari a  $\Delta\lambda$ , è possibile supporre che la proporzionalità fra le due grandezze sia la stessa che esiste fra le corrispondenti variazioni infinitesimali, e scrivere:

$$\frac{dR_c}{\delta\lambda} = \frac{\Delta R_c}{\Delta\lambda}, \quad (5.13)$$

da cui deriva:

$$\frac{dR_c}{R_c} = \frac{\Delta R_c}{R_c} \frac{\delta\lambda}{\Delta\lambda}. \quad (5.14)$$

A meno di non voler procedere ad una loro nuova determinazione, i valori di  $\Delta R_c$  e  $\Delta\lambda$  possono essere ottenuti come la differenza in valore assoluto fra i valori  $R_s$  e  $R_d$ , e  $\lambda_s$  e  $\lambda_d$  ricavati durante la fase di determinazione numerica di  $R_0$  (vedi pag. 128).

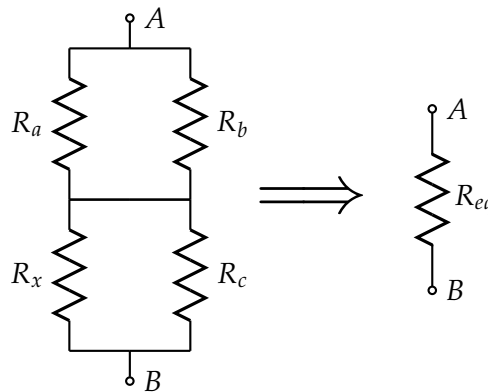


Figura 5.4: Resistenza equivalente vista ai morsetti A e B

### 5.1.3.2 Approccio teorico

Per determinare  $u_G$  mediante un approccio teorico, procediamo innanzitutto alla determinazione del circuito equivalente del ponte visto ai morsetti  $AB$  di collegamento del galvanometro  $G$  secondo Thevenin. La resistenza vista dal galvanometro si valuta sostituendo all'alimentazione  $E$  un corto circuito, ottenendo così la serie dei paralleli fra  $R_a$  e  $R_b$ , e fra  $R_x$  e  $R_c$  (vedi Fig. 5.4):

$$R_{eq} = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b} + \frac{R_x R_c}{R_x + R_c} \quad (5.15)$$

La tensione equivalente  $E_0$  è invece uguale alla tensione a vuoto ai capi dei morsetti A e B, e si ottiene come differenza di potenziale  $V_a - V_x = V_{AC} - V_{BC}$  (vedi Fig. 5.5):

$$E_0 = V_{AC} - V_{BC} = E \left( \frac{R_a}{R_a + R_b} - \frac{R_x}{R_x + R_c} \right) \quad (5.16)$$

A questo punto, una volta determinate le grandezze equivalenti ai capi del galvanometro  $G$ , possiamo fare riferimento al circuito mostrato in Fig. 5.6 per ricavare l'espressione della corrente  $I_G$  che circola nel ramo di rivelazione:

$$I_G = \frac{E_0}{R_{eq} + R_G} \quad (5.17)$$

dove  $R_G$  indica la resistenza interna del galvanometro. Da questa espressione è possibile ricavare l'entità della variazione  $dI_G$  conseguente ad una variazione virtuale  $dR_x$  intorno all'equilibrio:

$$\begin{aligned} dI_G &= \left. \frac{\partial I_G}{\partial R_x} \right|_{I_G=0} dR_x = \left. \frac{\partial}{\partial R_x} \left( \frac{E_0}{R_{eq} + R_G} \right) \right|_{I_G=0} dR_x = \\ &= \left[ \frac{1}{R_{eq} + R_G} \frac{\partial E_0}{\partial R_x} + E_0 \frac{\partial}{\partial R_x} \left( \frac{1}{R_{eq} + R_G} \right) \right]_{I_G=0} dR_x. \quad (5.18) \end{aligned}$$

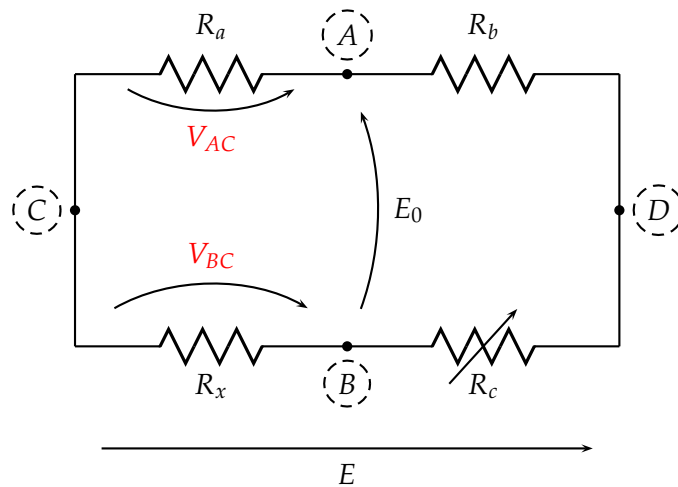


Figura 5.5: Tensione equivalente ai capi del galvanometro  $G$

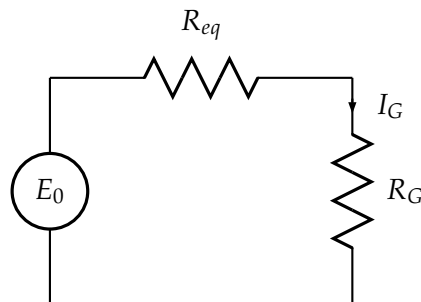


Figura 5.6: Circuito equivalente del ponte di Wheatstone visto dal galvanometro  $G$

Poiché i termini in parentesi quadra devono essere valutati nel punto di equilibrio ( $I_G = 0$ ), nel quale anche la tensione  $E_0$  è  $E_0 = 0$ , il secondo addendo in parentesi quadra è nullo. Per quanto riguarda invece il primo addendo, ricordando la (5.16), si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_0}{\partial R_x} &= E \frac{\partial}{\partial R_x} \left( \frac{R_a}{R_a + R_b} - \frac{R_x}{R_x + R_c} \right) = \\ &= -E \frac{R_c}{(R_x + R_c)^2} = -E \frac{R_b/R_a}{R_x (1 + R_b/R_a)^2}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

dove l'ultimo passaggio è stato ottenuto ricordando che all'equilibrio vale la (5.3). A questo punto, possiamo sostituire quest'ultima espressione nella (5.18), risistemare, e ottenere:

$$dI_G = -\frac{E}{R_{eq} + R_G} \frac{R_b/R_a}{(1 + R_b/R_a)^2} \frac{dR_x}{R_x}, \quad (5.20)$$

e quindi invertire per ricavare la  $dR_x/R_x$  in funzione delle altre grandezze:

$$\frac{dR_x}{R_x} = -dI_G \frac{R_{eq} + R_G}{E} \frac{(1 + R_b/R_a)^2}{R_b/R_a}. \quad (5.21)$$

L'espressione finale di  $u_G$ , ottenuta dividendo l'espressione precedente per  $\sqrt{3}$  è pertanto:

$$u_G = \frac{1}{\sqrt{3}} dI_G \frac{R_{eq} + R_G}{E} \frac{(1 + R_b/R_a)^2}{R_b/R_a}, \quad (5.22)$$

dove  $dI_G$  è la corrente minima rilevabile dal galvanometro, ovvero la *sensibilità* dello strumento, il cui valore è riportato nei dati di targa insieme alla resistenza interna  $R_G$ . Dalla (5.22) è immediato verificare che il contributo  $u_G$  si riduce:

- all'aumentare della tensione di alimentazione  $E$ ;
- al diminuire della serie fra la resistenza equivalente  $R_{eq}$  e la resistenza interna del galvanometro  $R_G$ ;
- al diminuire del valore assoluto della minima corrente  $dI_G$  rilevabile dal galvanometro, ovvero all'aumentare della sensibilità.

È opportuno inoltre far notare che l'incertezza  $u_G$  è anche una funzione di  $R_a$  e  $R_b$  e che per ridurne il valore assoluto è opportuno utilizzare resistenze il cui valore nominale è  $R_a = R_b$ , ottenuto facilmente minimizzando l'espressione  $(1 + x)^2/x$ , con  $x = R_b/R_a$ .

#### 5.1.4 Esempio di valutazione numerica dell'incertezza $u_G$

Supponiamo che dai dati di targa del rivelatore di zero si ottengano le indicazioni

- $R_G = 110 \Omega$ ;
- $dI_G = 9 \cdot 10^{-9} \text{ A}$ ,

che la tensione di alimentazione sia  $E = 3 \text{ V}$  e che i resistori  $R_a$  e  $R_b$  abbiano entrambi un valore di resistenza pari a  $1000 \Omega$ . Mediante l'approccio teorico otteniamo il valore  $u_G = 67050\text{e}-6$ , mentre l'approccio sperimentale porterà ad attribuire a  $u_G$  il valore  $u_G = 67234\text{e}-6$ : essi risultano uguali, almeno fino alla seconda cifra significativa, come previsto dal fatto che, sebbene mediante metodi diversi, in entrambi i casi l'oggetto della valutazione è la medesima grandezza.

**Parte IV**  
**Appendici**



# Appendice A

## Richiami di statistica

Per comprendere appieno il significato di termini come *incertezza* e *valore più significativo del misurando* è necessario dotarsi di strumenti propri della teoria della probabilità. Essa, ai nostri fini, costituisce lo strumento per ottenere da un certo insieme di dati informazioni (sia in forma numerica che grafica) che ne descrivano il comportamento in modo aggregato. Nel seguito procederemo partendo dal caso di insiemi a numerosità finita di dati che assumono valori discreti, per giungere al caso di un insieme di dati a numerosità infinita e con valori continui. Da ciò ricaveremo il concetto di *funzione di distribuzione di probabilità (pdf)*  $f(x)$  di una *variabile aleatoria*  $x$  e daremo le definizioni di *media*  $\mu$  e *varianza*  $\sigma^2$ .

### A.1 Grafico a barre

Supponiamo di avere un insieme in cui siano raccolti i voti riportati negli esami sostenuti da uno studente nella sua carriera universitaria fino ad oggi. Esso è ovviamente rappresentabile mediante la notazione insiemistica, in cui possiamo ordinare gli elementi in senso crescente:

$$X = \{24, 24, 25, 25, 25, 27, 27, 28, 28, 29, 30, 30, 30, 30, 30\}. \quad (\text{A.1})$$

Certamente la rappresentazione (A.1) è completa, nel senso che essa contiene tutte le informazioni di cui c'è bisogno per conoscere la carriera universitaria dello studente. Tuttavia, è altrettanto palese che una notazione di questo tipo non ci consente di valutare rapidamente se lo studente ha riportato un maggior numero di voti nella fascia alta o in quella bassa della scala dei voti possibili. Una rappresentazione grafica potrebbe venire in aiuto. Un primo strumento utile a tal fine è il **grafico a barre**, come quello riportato in Fig. A.1. Esso riporta in ascissa l'insieme dei voti, e in corrispondenza di ognuno di essi viene tracciata una barra di altezza pari al numero di volte (dette anche *occorrenze*) in cui ogni voto compare sul libretto, ovvero la sua frequenza assoluta. Ciò aiuta a cogliere con maggiore immediatezza l'informazione d'interesse, ad esempio dove è collocato il voto che ricorre con maggiore frequenza, così da decidere nel caso in

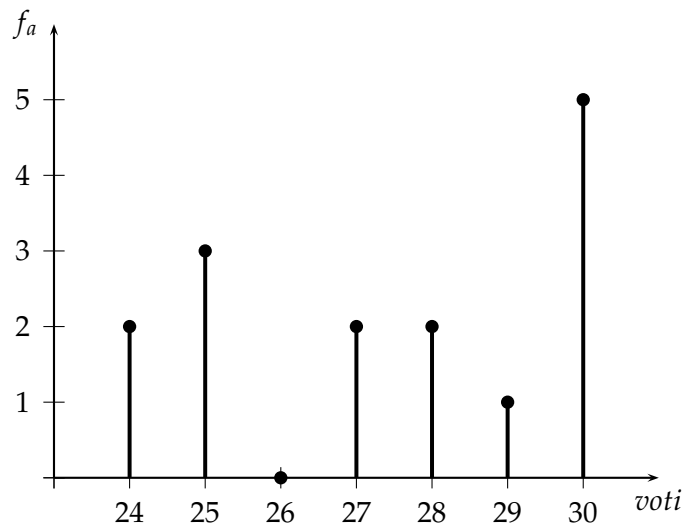


Figura A.1: Grafico a barre

questione che lo studente ha fin ad ora una carriera universitaria soddisfacente, avendo riportato come votazione minima il 24 e presentando frequenza assoluta maggiore in corrispondenza del 30.

## A.2 Istogramma

Complichiamo leggermente le cose. Se la numerosità dell'insieme dei dati e il numero di possibili valori assunto dalla grandezza d'interesse aumentano, diventa laborioso, e spesso anche inutile, riportare le frequenze rilevate per ogni possibile risultato. Ad esempio, un'azienda che debba confezionare uniformi per i dipendenti di una compagnia, anziché registrare le singole altezze dei clienti con risoluzione di 1 cm, potrebbe decidere di raggrupparle in *classi*, sulla base della considerazione che la stessa taglia vestirà altrettanto bene persone di altezza leggermente diversa. Supponendo pertanto che le altezze espresse in metri siano:

$$X = \{1.69, 1.69, 1.70, 1.70, 1.70, 1.71, 1.71, 1.71, 1.72, 1.72, 1.73, 1.73, 1.75, 1.76, 1.77, 1.80\}, \quad (\text{A.2})$$

è possibile usare un **istogramma** come quello riportato in Fig. A.2, nel quale l'altezza di ogni rettangolo corrisponde al numero totale di persone la cui altezza rientra nell'intervallo indicato dalla base del rettangolo stesso, ovvero alle *frequenze assolute*  $f_a$  di ogni classe.

Dall'ispezione dell'istogramma in Fig. A.2, per esempio, otteniamo immediatamente che 10 impiegati hanno altezza compresa nell'intervallo  $[1.70; 1.75[$  cm, mentre 3 ricadono nell'intervallo  $[1.75; 1.80[$  cm. È semplice, dall'istogramma che riporta le fre-

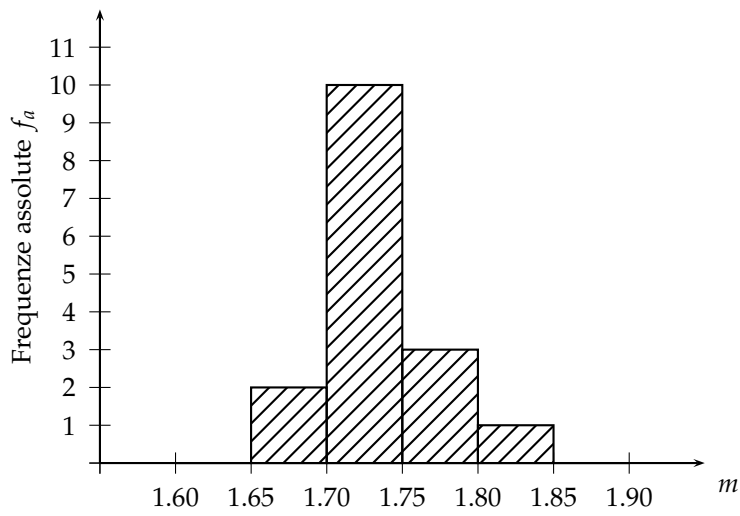


Figura A.2: Istogramma delle frequenze assolute

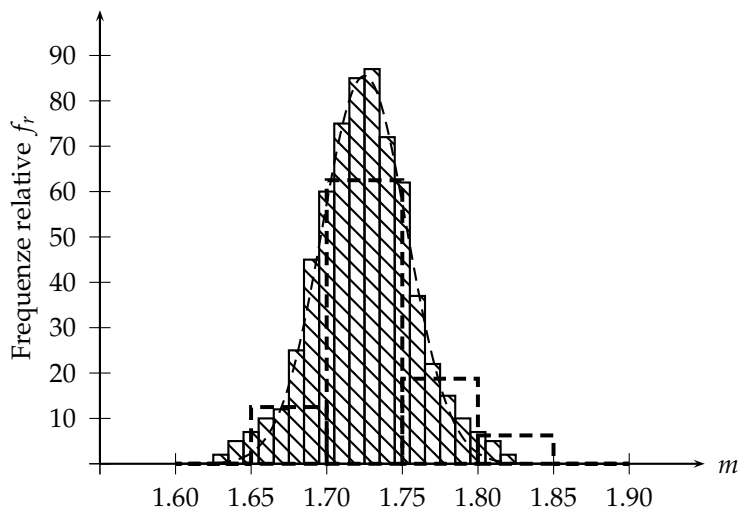


Figura A.3: Istogramma dei valori relativi di frequenza

quenze assolute  $f_a$ , passare a quello delle *frequenze relative*  $f_r$  mediante la formula

$$f_r = f_a/N, \quad (\text{A.3})$$

dove  $N$  è il numero totale di individui di cui è stata misurata l'altezza. I 10 valori misurati in precedenza corrispondono al 62.5 % del totale (come illustrato dalla curva a tratto continuo in Fig. A.3). A questo punto, il passaggio al concetto di probabilità è abbastanza immediato. Infatti, facendo riferimento all'approccio *frequentistico* alla definizione di probabilità, si può ritenere che la frequenza relativa di un evento corrisponda alla probabilità che quell'evento si verifichi fra tutti quelli possibili. È esperienza comune, infatti, che quando diciamo che la probabilità che esca testa nel lancio di una moneta è pari a  $p = 0.5$ , ovvero al 50%, ciò succede perché ci aspettiamo che in un gran numero di lanci (al limite, un numero infinito) per il 50% delle volte otterrò testa e per il restante 50% croce. Tornando al nostro esempio, e rimandando alla sezione successiva per un approfondimento, dire che la classe  $[1.70; 1.75]$ cm ha una probabilità del 62.5% significa dire che con una probabilità del 62.5% l'altezza di uno dei dipendenti dell'azienda rientrerà in quell'intervallo, ricordando però che il concetto di probabilità si riferisce a rigore solo ad un numero elevato, idealmente infinito, di misurazioni.

### A.3 Densità di probabilità

Per introdurre il concetto di *densità* di probabilità è necessario effettuare un ulteriore passo in avanti. Innanzitutto, ipotizziamo che l'insieme dei possibili risultati della misurazione sia l'intero asse reale. Poi, partendo dall'istogramma delle frequenze relative, dividiamo i valori delle ordinate per l'ampiezza  $\Delta x$  del corrispondente intervallo sull'asse delle ascisse — nel nostro caso pari a  $\Delta x = 0,05$  m, — operando cioè una *normalizzazione*. Otteniamo così un istogramma che riporta il numero relativo di eventi per unità di altezza  $I_n = f_r/\Delta x$  (riferendoci nuovamente al caso di misure di altezza), ovvero — per quanto detto in conclusione della sezione precedente — la probabilità per unità di lunghezza. Operiamo adesso mediante un processo al limite: scegliamo una qualsiasi delle classi dell'istogramma normalizzato, fissiamo per comodità l'attenzione sul punto centrale  $x$  della classe e facciamo tendere l'ampiezza  $\Delta x$  dell'intervallo a 0. È evidente che se tale operazione fosse compiuta sull'istogramma delle frequenze relative in Fig. A.2, l'altezza potrebbe andare progressivamente a zero perché la probabilità di misurare fra tutti i dipendenti di una compagnia esattamente un'altezza fra tutte quelle contenute sull'asse reale sarebbe praticamente nulla. Tuttavia, se l'altezza viene ulteriormente normalizzata per l'ampiezza dell'intervallo, mandando quest'ultimo a zero, è possibile che il rapporto si mantenga finito. Al valore limite diamo il nome di *densità di probabilità* nel punto  $x$ , o anche *pdf*( $x$ ) o  $f_x(x)$ :

$$f_x(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_r}{\Delta x}, \quad (\text{A.4})$$

Essendo una *densità* di probabilità, essa **non** rappresenta la probabilità che si verifichi l'evento  $x$  (che, secondo quanto detto in precedenza, tenderebbe a zero), ma piuttosto la probabilità che si verifichi un evento in un intervallo di ampiezza  $\delta x$  centrato

su  $x$  divisa per l'ampiezza  $\delta x$  dell'intervallo stesso, ovvero la probabilità per unità di grandezza  $x$ .

Pertanto, l'unica indicazione di probabilità che si può ottenere direttamente dalla  $f_x(x)$  è quella relativa ad un intervallo di ampiezza infinitesima  $\delta x$  centrata su  $x$ , ottenuta tramite la formula:

$$P(x \in \delta x) = f(x) \delta x. \quad (\text{A.5})$$

Comunque, l'estensione ad un intervallo di ampiezza più estesa è immediata, ricordando che essa corrisponde alla somma delle probabilità che un evento capiti in uno degli intervalli elementari dell'intervallo più grande. Come nel caso dell'istogramma delle frequenze relative, dove la frequenza relativa dell'unione di due classi disgiunte è pari alla somma delle frequenze relative di ogni classe:

$$P(x \in \delta x_1 \cup \delta x_2) = f_{r,1} + f_{r,2}, \quad (\text{A.6})$$

ricordando che la somma su intervalli infinitesimi si trasforma in un integrale esteso a tutto l'intervallo d'interesse, risulta facilmente

$$P(x_1 \leq \mathbf{x} \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_x(x) dx. \quad (\text{A.7})$$

Una proprietà fondamentale della distribuzione  $f(x)$  è che essa verifica la seguente condizione:

$$P(-\infty < \mathbf{x} < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx = 1, \quad (\text{A.8})$$

in quanto, poiché ogni grandezza fisica deve necessariamente appartenere all'intervallo  $] -\infty, \infty[$ , la probabilità che una generica grandezza si trovi in quell'intervallo deve essere pari a 1.

A partire dalla funzione di distribuzione di probabilità  $f_x(x)$  è possibile introdurre la *funzione di distribuzione cumulativa*  $F_x(x)$ , o anche  $CDF_x(x)$ , definita come

$$F_x(x) = P(-\infty < \mathbf{x} \leq x) = \int_{-\infty}^x f_x(y) dy. \quad (\text{A.9})$$

È evidente che:

$$F_x(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) dx = 1 \quad (\text{A.10})$$

e che, per  $x_1 \leq x_2$ :

$$F_x(x_1) \leq F_x(x_2), \quad (\text{A.11})$$

poiché, essendo  $f_x(x)$  crescente, il suo integrale  $F_x(x)$  è esso stesso crescente.

### A.3.1 Media e varianza

Molto spesso, piuttosto che tramite una distribuzione, è sufficiente una descrizione più compatta del comportamento dei dati di misura affidandosi alla conoscenza di due parametri, detti **media**  $\mu$  e **varianza**  $\sigma^2$ , definiti mediante le seguenti formule:

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) dx \quad (\text{A.12})$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f_x(x) dx \quad (\text{A.13})$$

Come si vede, anche la varianza è una media: la media dell'errore quadratico fra la variabile  $x$  e la sua media  $\mu$ , e infatti viene spesso indicata con il termine di *errore quadratico medio*.

Per comodità è utile introdurre un operatore di media  $E[\cdot]$  definito come

$$E[\cdot] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cdot) f_x(x) dx, \quad (\text{A.14})$$

grazie al quale possiamo riscrivere  $\mu$  e  $\sigma^2$  come

$$\mu_x = E[x] \quad (\text{A.15})$$

$$\sigma_x^2 = E[(x - \mu_x)^2] \quad (\text{A.16})$$

Spesso, anziché utilizzare  $\sigma^2$  si preferisce introdurre la *deviazione standard*  $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ , radice quadrata positiva della varianza. In tale modo, si ottiene una grandezza che è dimensionalmente omogenea alla grandezza di interesse: se  $x$  è espressa in metri, anche  $\sigma$  avrà unità di misura pari al metro. A questo punto, in considerazione del significato matematico della varianza e della sua radice quadrata, è alquanto immediato attribuire a  $\sigma$  il significato di **incertezza**, in quanto essa indica quanto le misure mediamente distano dal loro valore centrale, assunto come valore di riferimento.

### A.3.2 Alcune distribuzioni notevoli

#### A.3.2.1 Distribuzione Gaussiana

Una ben nota distribuzione è quella Gaussiana o Normale:

$$N(\mu; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma_x^2}} \quad (\text{A.17})$$

di media  $\mu_x$  e varianza  $\sigma_x^2$ . L'andamento è riportato in Fig. A.4. La curva gaussiana, come vedremo a breve, è quella che viene utilizzata più spesso quando si deve rappresentare la distribuzione di dati di misura su cui agiscono diverse cause di errore

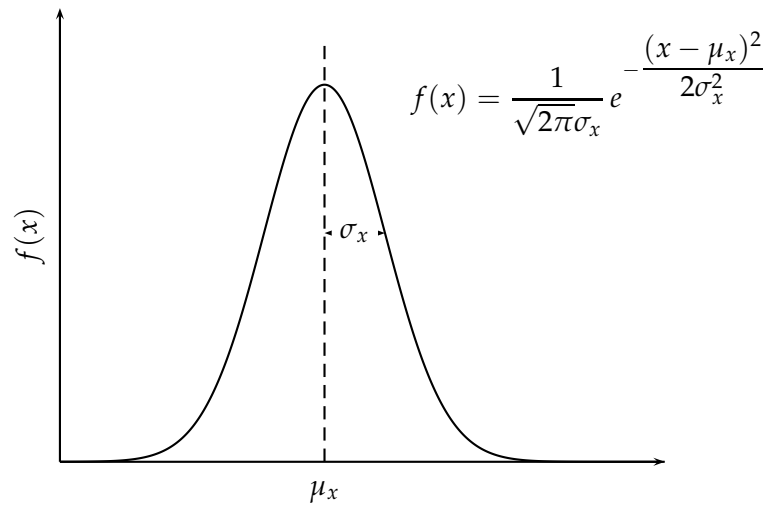


Figura A.4: Distribuzione Gaussiana

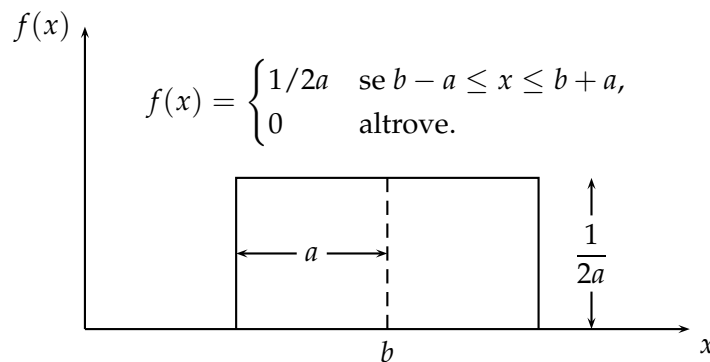


Figura A.5: Andamento della curva di distribuzione uniforme

indipendenti l'una dall'altra in modo additivo. La media della distribuzione gaussiana è pari al parametro  $\mu$ , mentre la sua varianza è pari al parametro  $\sigma^2$ .

### A.3.2.2 Distribuzione uniforme

Molto spesso, le uniche informazioni che si hanno a disposizione sulla distribuzione delle misure è che esse sono affette da un errore massimo pari a  $\epsilon_{max}$ . In tale caso, è utile la distribuzione rettangolare o uniforme:

$$U(b; a) = \begin{cases} 1/2a & \text{se } b - a \leq x \leq b + a, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

per la quale la media  $\mu$  è pari a:

$$\mu = \int_{b-a}^{b+a} \frac{x}{2a} dx = b, \quad (\text{A.19})$$

mentre la varianza  $\sigma^2$  è pari a:

$$\sigma^2 = \int_{b-a}^{b+a} \frac{(x-b)^2}{2a} dx = \frac{1}{2a} \frac{(x-b)^3}{3} = \frac{a^2}{3}. \quad (\text{A.20})$$

L'andamento della distribuzione è mostrato in Fig. A.5.

### A.3.3 Stime di media e varianza

La media può essere considerato il valore in qualche modo più rappresentativo della distribuzione. Infatti, essa è il parametro che minimizza l'errore quadratico medio fra la variabile aleatoria  $x$  e una qualsiasi altra stima della variabile  $\hat{x}$ . Infatti, è

$$E[(x - \hat{x})^2] = E[x^2 + \hat{x}^2 - 2x\hat{x}] = E[x^2] + \hat{x}^2 - 2E[x]\hat{x}, \quad (\text{A.21})$$

e il valore di  $\hat{x}$  che minimizza tale quantità è quello che azzerava la derivata prima:

$$\frac{dE[(x - \hat{x})^2]}{d\hat{x}} = 2\hat{x} - 2E[x] = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{x} = E[x]}. \quad (\text{A.22})$$

A questo punto, può prendere corpo l'idea di un valore "vero" del misurando, o comunque di una buona alternativa ad esso.

Abbiamo detto che anche qualora esistesse tale valore vero, il fatto di osservarlo attraverso la lente della procedura di misurazione ne renderebbe impossibile la determinazione esatta, a causa della presenza dell'inevitabile errore di misura. Tuttavia, l'aver determinato che la media  $\mu$  è il miglior rappresentante della distribuzione dei valori di misura, lo rende un ottimo candidato ad assumere il ruolo di valore "vero". A questo punto, la nostra misurazione punterà a determinare quale risultato della misura il valore medio della distribuzione.

Sorge però un problema: per determinare la media  $\mu$  è necessario conoscere con esattezza la distribuzione dei risultati delle misurazioni. Tale impresa è, nel caso migliore, molto difficile; il più delle volte impossibile per questioni di praticità, di tempo e quindi economiche. È necessario pertanto percorrere altre strade. Una possibile alternativa è di concentrare l'attenzione non già sugli infiniti possibili risultati di una misurazione il cui comportamento globale viene descritto dalla distribuzione, ma su un insieme limitato (un *campione*) di misurazioni  $x_1, \dots, x_N$  e tentare da esso di ottenere le informazioni su  $\mu$ . È del tutto evidente, e sarà chiaro dai contenuti della discussione successiva, che l'aver limitato l'indagine a un numero finito di elementi comporterà un'incertezza sulla conoscenza del valore  $\mu$  a cui siamo interessati.

Con gli  $N$  risultati della misurazione, è possibile determinare il valore di due nuove variabili aleatorie: la *media campionaria*:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (\text{A.23})$$

e la *varianza campionaria*:

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2. \quad (\text{A.24})$$

La media campionaria, che non è altro dal punto di vista matematico dell'operazione che tutti gli studenti fanno per conoscere il voto medio della propria carriera universitaria, può essere usata quale stimatore della media  $\mu$ , in quanto vale:

$$E[\bar{x}] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[x_i] = \mu, \quad (\text{A.25})$$

nell'ipotesi che tutte le variabili aleatorie  $x_i$  abbiano la stessa distribuzione. Tale ipotesi è plausibile se supponiamo che tutte le misurazioni, ciascuna corrispondente a una distinta variabile aleatoria  $x_i$ , siano condotte nelle medesime condizioni.

Una particolarità della media campionaria è che per essa si può applicare il *Teorema del Limite Centrale*, che dice che la media campionaria  $\bar{x}$ , al tendere di  $N$  all'infinito si distribuisce secondo una Gaussiana, di media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2/N$ :

$$\bar{x} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{N}\right). \quad (\text{A.26})$$

Le implicazioni di questo teorema sono di grande interesse per il misurista perché comportano che l'errore che commetto nell'approssimare  $\mu$  con  $\bar{x}$  diminuisce al crescere della numerosità del campione. In altre parole, l'incertezza con cui  $\bar{x}$  stima  $\mu$  si riduce al crescere della numerosità del campione, consentendoci anche di fissare in modo approssimato il numero di campioni necessari a raggiungere il prefissato livello di incertezza.

Un'ultima osservazione riguarda la  $\sigma$  che compare all'interno della (A.26): essa è la deviazione standard della distribuzione dei dati di misura  $x_1, \dots, x_N$ , che possiamo stimare mediante la (A.24), ritenendo in un'approssimazione del primo ordine che l'errore che commetto in questa stima sia trascurabile.

# Indice analitico

- Contatore, [113](#)
- Convertitore
  - A/D
    - Flash, [73](#)
    - Multiplexati, [76](#)
    - Pipeline, [75](#)
    - SAR, [77](#)
  - AC/DC, [101](#)
    - Valore di picco, [101](#)
    - Valore di picco-picco, [103](#)
    - Valore Medio, [104](#)
    - Vero valore efficace, [106](#)
  - D/A, [80](#)
    - a R pesate, [80](#)
    - R/2R, [81](#)
- NMRR, [99](#)
- Oscilloscopio
  - Analogico, [53](#)
    - Base dei tempi, [58](#)
    - Canale verticale, [56](#)
    - CRT, [54](#)
  - Numerico, [107](#)
  - Sistemi multi-traccia, [66](#)
  - Sonde attenuatrici compensate, [63](#)
- Voltmetro
  - Numerico, [82](#)
    - Conversione tensione/frequenza, [87](#)
    - Doppia Rampa, [90](#)
    - Errore di conteggio, [84](#)
    - Multirampa Rundown, [95](#)
    - Singola Rampa, [82](#)
- Wheatstone
  - incertezza di sensibilità, [130](#)
- Ponte di, [125](#)