CAPITOLO 5

L'unità di misura della resistenza elettrica è l'ohm (simbolo Ω), la cui definizione deriva direttamente dalla legge di Ohm: *l'ohm è la resistenza elettrica di un conduttore metallico ai cui capi insorge la differenza di potenziale di 1 volt per effetto del passaggio di una corrente di intensità di 1 ampere.*

5.1 Campioni di resistenza.

I campioni di resistenza sono *resistori di caratteristiche note, stabili nel tempo e, per quanto possibile, insensibili a fattori di influenza esterni*. Dalla relazione:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} \tag{5.1}$$

Si evince che la *qualità* di un resistore campione dipende essenzialmente (i) dalla stabilità della resistività (ρ) del materiale con cui è realizzato e (ii) dalla precisione con cui sono realizzate le sue caratteristiche geometriche (l, S). Una delle principali cause che influisce sulla variazione di resistenza di un resistore è senz'altro la dipendenza della resistività dalla temperatura. Pertanto, il materiale impiegato per costruire resistori campioni deve essere caratterizzato da un coefficiente di variazione della resistività con la temperatura che sia il più basso possibile. Il coefficiente di variazione della resistività con la temperatura è definito come l'incremento di resistenza corrispondente ad un incremento unitario della temperatura. Spesso i costruttori forniscono gli andamenti della resistività in funzione della temperatura in termini relativi (resistività del materiale alla temperatura di t °C rapportata alla resistività a 20°C). Un materiale comunemente usato per la realizzazione dei campioni di resistenza è la *manganina*, lega a base di rame (86%), manganese (12%) e nichel (2%), che ha una resistività di circa 0,5 μΩm con variazioni comprese in una parte su 10^5 per variazioni di temperatura comprese fra i 20 e i 30 °C.

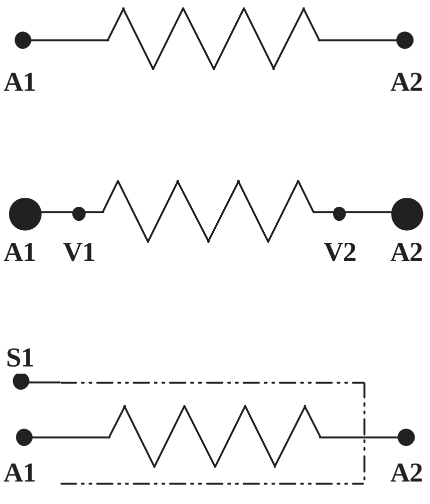


Figura 5.1

In fase di progettazione e di costruzione dei resistori campione, tra le varie problematiche da affrontare e risolvere, rivestono grande importanza i problemi connessi con l'inserzione dei resistori nei circuiti di misura, ossia di quei fenomeni che insorgono nel momento in cui si realizzano le connessioni tra resistore campione e resto del circuito. Tali problematiche sono di varia natura e dipendono fortemente dai valori di corrente e di tensione in gioco nel circuito di misura e, quindi, dai valori ohmici dei resistori campione. Per questo motivo, i resistori campione vengono classificati in tre categorie: *resistori di valore basso* (di valore ohmico inferiore a 1 Ω), *resistori di valore medio* (di valore ohmico compreso tra 1 Ω e 1 MΩ) e *resistori di valore elevato* (di valore ohmico superiore a 1 MΩ).

In base a questa classificazione, i resistori campione che presentano problemi di inserzione di minore peso, sono senz'altro quelli di ordine medio. Nella realizzazione di tali resistori si prevedono, in genere, solo i due morsetti A1 e A2 necessari a collegare il resistore al resto del circuito.

Nei campioni di **resistenza di basso valore ohmico**, l'inserzione del resistore nel circuito di misura presenta, invece, problemi legati alle resistenze addizionali che insorgono nel momento in cui si effettuano i collegamenti tra circuito e resistore. Tali resistenze, denominate resistenze di contatto, assumono valori dell'ordine di $10^{-4} \div 10^{-3}$ Ω e dipendono sia dall'estensione geometrica della superficie usata per realizzare il contatto, sia dalla pressione esercitata nel serrare i morsetti nella realizzazione dei contatti stessi. Per questo motivo, quanto più è piccolo il valore ohmico del resistore campione che si intende realizzare, tanto più è opportuno prevedere morsetti di grosse dimensioni e ben saldamente connessi al circuito di misura. In tal modo, si potrà addurre la corrente nel resistore senza introdurre cadute di tensione significative sulle resistenze di contatto. Però, l'esigenza di avere morsetti di grosse dimensioni contrasta con quella di dover definire con precisione la lunghezza del resistore. Infatti, quanto maggiore sarà la dimensione geometrica dei morsetti tanto più incerta sarà la conoscenza dei punti di inizio e di fine del resistore, e quindi della sua lunghezza. Per contemperare entrambe le succitate esigenze, si introducono altri due morsetti, di dimensioni più ridotte, detti morsetti *voltmetrici* (V1 e V2) che servono per prelevare la differenza di potenziale che si produce ai loro capi quando il resistore è attraversato dalla corrente addotta attraverso i morsetti *amperometrici* A1 e A2 (vedi figura 5.1). Il valore ohmico del resistore a 4 morsetti si riferisce al tratto di conduttore individuato dai morsetti volumetrici (V1 e V2) che riescono a definire con buona precisione la lunghezza del resistore stesso, mentre i morsetti amperometrici (A1 e A2), essendo di grosse dimensioni, sono usati per addurre la corrente nel resistore senza produrre cadute di potenziale significative.

Ben diversi sono i problemi che bisogna affrontare nella realizzazione di **resistori campione di valore ohmico elevato**. Per questi, i problemi che nascono sono connessi con l'insorgenza delle correnti di dispersione che possono assumere valori comparabili con il valore della corrente che fluisce all'interno del resistore stesso. Infatti, al crescere del valore ohmico del resistore, le correnti che lo interessano (a parità di tensione impressa) diventano sempre di minore intensità. Quando i valori di resistenza superano l'ordine dei megaohm, anche usando tensioni di un certo valore, le correnti in gioco nei circuiti di misura diventano estremamente piccole per cui assume sempre maggior peso l'effetto delle correnti di dispersione (correnti che si chiudono attraverso le conduttanze di dispersione). In tal caso, si cerca di intervenire in due modi: innanzitutto si cerca di fissare i valori delle conduttanze di dispersione (attraverso l'impiego di opportune schermature) e, in secondo luogo, non essendo possibile evitare il drenaggio delle correnti di dispersione, bisogna fare in modo che esse non attraversino gli strumenti di misura, evitando così di interferire con la misura stessa. Per quanto riguarda il primo aspetto, è necessario dotare il resistore campione di uno schermo collegato ad un apposito morsetto (S1 di figura 5.1). Inoltre, tale morsetto dovrà essere opportunamente collegato al circuito di misura in modo da evitare di misurare le correnti di dispersione.

I campioni di resistenza sono caratterizzati da una potenza massima dissipabile P_{max}. Qualora la potenza dissipata dovesse superare questa soglia, il corrispondente aumento di temperatura provocherebbe una variazione, non trascurabile, del valore della resistenza stessa. In tale evenienza, le specifiche di precisione indicate dal costruttore non sarebbero più garantite e, al limite, sarebbe anche possibile provocare il danneggiamento del campione. La limitazione sulla massima potenza dissipabile P_{max}, è talvolta indicata sui dati di targa del resistore campione in termini della corrente massima I_{max} in accordo con la relazione:

$$I_{max} = \sqrt{\frac{P_{max}}{R}} \tag{5.2}$$

Le considerazione finora fatte si applicano sia ai resistori campione per corrente continua sia a quelli per corrente alternata. In quest'ultimo caso, però, bisogna porre particolare attenzione anche nel compensare gli effetti indesiderati di natura induttiva e capacitiva. L'effetto induttivo in genere viene compensato ripiegando il conduttore su se stesso in modo da produrre una circolazione di corrente (e quindi il campo magnetico ad essa associato) in metà filo in un verso, e nell'altra metà in verso opposto (Figura 5.2). Con tale accorgimento, si ottiene che i flussi di induzione magnetica si compensano, e il coefficiente di autoinduzione

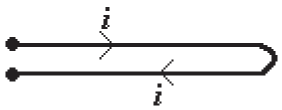


Figura 5.2

risulta praticamente nullo. Gli effetti capacitivi sono minimizzati con l'impiego di opportune geometrie.

Cassette di resistori tarati

Nei laboratori è, inoltre, utile disporre di campioni di resistenza di valore variabile; a questo scopo si realizzano apposite *cassette di resistori tarati*. Esse sono classificate:

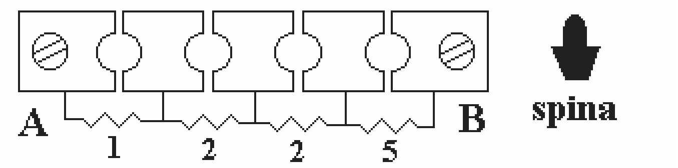


Figura 5.3

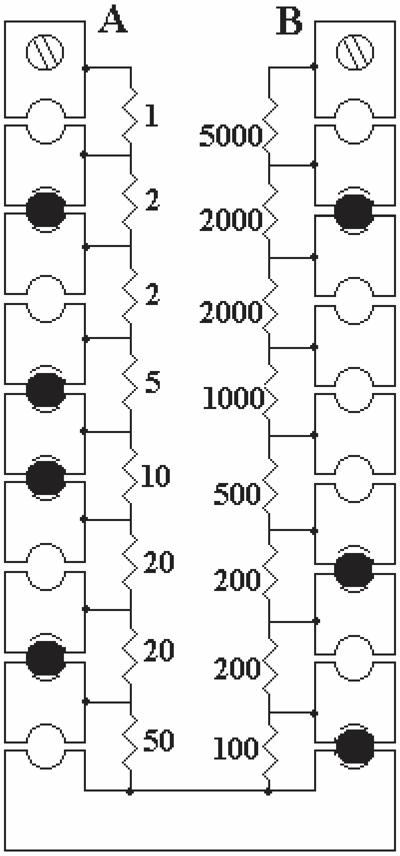


Figura 5.4

a) a seconda della disposizione dei singoli resistori componenti (a decadi oppure non a decadi);
b) a seconda del tipo di dispositivo usato per inserire le singole resistenze nel circuito (a spine, a manopole);
c) a seconda del modo di formare un determinato valore della resistenza (per cortocircuitazione dei resistori superflui, per inclusione in serie).

Tutti i tipi suddetti sono usati nella pratica perché ciascuno ha dei vantaggi che possono riuscire utili in determinati casi. Nelle cassette non a decadi (figura 5.3), i resistori possono essere collegati tutti in serie fra loro e la serie completa collegata ai morsetti terminali A e B; inoltre ogni resistore tarato fa capo, con i suoi terminali, a due blocchetti metallici (di ottone o di rame) che possono essere connessi elettricamente fra loro, cortocircuitando quindi il resistore, mediante una spina conica in modo da realizzare un ottimo contatto. La cassetta ha, quindi, tante spine quanti sono i resistori e, per includere un resistore, occorre disinserire la relativa spina che, come abbiamo detto, lo cortocircuita quando è inserita. Ad esempio, se si hanno 4 resistori rispettivamente di 1-2-2-5 Ω, è possibile, togliendo tutte le spine, realizzare una resistenza totale di 10 Ω; togliendo più spine in tutti i modi possibili, si possono realizzare tutti i valori di resistenza da 1 Ω a 10 Ω (con risoluzione di 1 Ω). Ovviamente, con una cassetta realizzata allo stesso modo di quella presentata in figura 5.3, ma con valori delle resistenze rispettivamente di 10-20-20-50 Ω, si possono realizzare tutti i valori di resistenza da 10 Ω a 100 Ω con risoluzione di 10 Ω. È facile intuiere che, disponendo di una cassetta con 4 serie di resistori, del tipo illustrato in figura 5.4, possiamo ottenere tutti i valori di resistenza da 0 Ω a 10^4 Ω con incrementi di 1 Ω.

Per esempio, con una disposizione delle spine come quella in figura 5.4, *sommando tutti i valori corrispondenti alle spine estratte*, si ottiene, ai terminali A-B, una resistenza di 8773 Ω. I vantaggi di questo tipo di cassette sono:

- la inserzione con spine, che garantisce un buon contatto elettrico sopratutto se queste vengono pulite di tanto in tanto;
- la minimizzazione del numero di resistori.

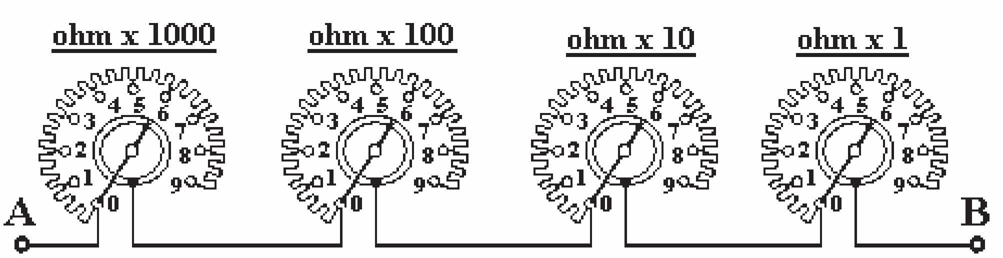


Figura 5.5

L'inconveniente principale è legato al fatto che, quando molti resistori sono in corto circuito, la resistenza di contatto totale può essere significativa. Per esempio, se vogliamo ottenere una resistenza di 1 Ω, con una cassetta come quella di figura 5.4, occorre tenere inserite 15 spine ed occorre estrarre solo quella corrispondente al valore di 1 Ω. Allora, se ogni spina produce una resistenza di contatto di 1mΩ, la resistenza di contatto totale sarà di 15 mΩ, pari all'1.5% del valore scelto.

Nelle cassette a decadi (figura 5.5), i singoli valori di resistenza si ottengono ruotando apposite manopole alle cui estremità sono situate spazzole metalliche che formano dei contatti striscianti. Queste cassette, certamente di più facile utilizzo, per la presenza dei contatti striscianti comportano maggiori problemi di usura.

5.2 Misura di resistenze.

Esistono numerosi metodi per la misura della resistenza elettrica, con i quali è possibile effettuare misure di grandissima precisione che, in laboratori ben attrezzati, può arrivare all'ordine di grandezza di una parte per milione. La scelta del metodo da adottare dipende sia dall'ordine di grandezza della resistenza da misurare sia dall'incertezza desiderata. A tal riguardo, si fa notare che la suddivisione in resistenze di piccolo, medio ed elevato valore è ovviamente grossolana ed ha il solo scopo di evidenziare come certe problematiche abbiano maggiore o minore peso in dipendenza del valore ohmico della resistenza che si desidera misurare.

5.3 Metodo voltamperometrico per la misura di resistenze.

È il metodo più intuitivo per misurare resistenze elettriche in quanto esso si basa direttamente sull'applicazione della legge di Ohm e, pertanto, richiede l'uso di un amperometro e di un voltmetro. Il circuito di misura si dispone come in figura 5.6, cioè si mette in serie al resistore R_x da misurare, un reostato di regolazione (resistore di resistenza variabile) R ed un amperometro di

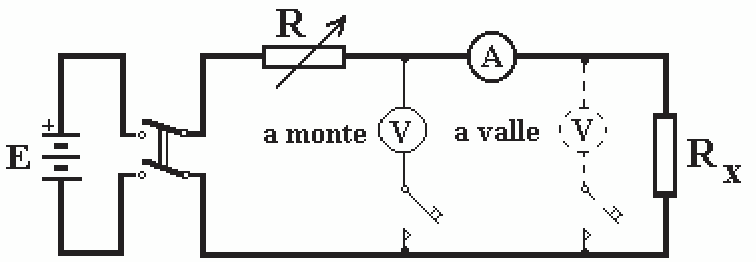


Figura 5.6

portata adeguata alla corrente che si vuole usare nella prova. Tale corrente deve essere scelta come risultato tra due compromessi: essa deve infatti essere di valore sufficientemente elevato in modo da provocare indicazioni significative nell'amperometro e nel voltmetro, ma di valore non tanto elevato da provocare un eccessivo riscaldamento della resistenza R_x per effetto joule. Prima di alimentare il circuito, chiudendo l'interruttore, si regola il reostato R in modo da inserire il massimo valore di resistenza. Chiuso l'interruttore, si agisce sul cursore del reostato in modo da ridurre lentamente il valore della resistenza R fino a leggere sull'amperometro A il valore di corrente prefissato per la prova. A questo punto si legge l'indicazione del voltmetro V. In genere, è buona norma effettuare più prove (almeno 3 misure) variando di poco il valore della corrente di prova leggendo i corrispondenti valori della tensione. Per ciascuna prova, si ottiene una misura della resistenza R_x applicando la legge di Ohm:

$$R_X = \frac{V_M}{I_M} \tag{5.3}$$

in cui V_M e I_M sono la tensione e la corrente misurate rispettivamente dal voltmetro V e dall'amperometro A. Come valore più probabile della misura della resistenza incognita R_X, si sceglierà la *media aritmetica* dei valori determinati nelle prove sperimentali (almeno 3 misure). Inoltre, è opportuno verificare che i valori ottenuti nelle varie prove siano compatibili (differiscano tra loro di quantità contenute all'interno dell'incertezza prevista dal metodo e dalla strumentazione usata). Eventuali risultati non compatibili sono una prova evidente che è stato commesso un errore grossolano, un errore di lettura sugli strumenti, un errore di calcolo. In tal caso, è necessario capire le motivazioni che hanno condotto alla incompatibilità e prendere le necessarie precauzioni per risolvere il problema, eventualmente ripetendo i rilievi sperimentali.

A prova ultimata si disinserisce il voltmetro agendo sull'apposito tasto, si riduce al minimo la corrente agendo sul reostato di regolazione e, infine, si interrompe la corrente aprendo l'interruttore. La manovra di disinserire il voltmetro e ridurre la corrente nel circuito è richiesta soprattutto se non si può essere certi che la R_x sia di tipo anti-induttivo. Infatti, il voltmetro potrebbe rimanere danneggiato per effetto dell'extracorrente prodotta all'apertura del circuito (forzando la corrente a zero con l'apertura dell'interruttore, la presenza di un'eventuale induttanza L provocherebbe una tensione v ai suoi capi di valore dato dalla 5.4).

$$v = L\,\frac{di}{dt} \tag{5.4}$$

Inserzione del voltmetro a monte o a valle dell'amperometro

Come si è già detto, l'inserzione del voltmetro può essere effettuata *a monte* oppure *a valle* dell'amperometro. (in figura 5.6 l'inserzione a valle è indicata con linea tratteggiata). In entrambi i casi si introduce un *effetto sistematico* indesiderato. Infatti, il voltmetro dovrebbe indicare la caduta di potenziale ai capi della resistenza R_x e l'amperometro dovrebbe indicare la corrente che fluisce in R_x. Invece, il voltmetro, inserito a monte dell'amperometro (figura 5.7), fornisce un'indicazione errata per eccesso, in quanto la sua indicazione tiene conto anche della caduta di potenziale che insiste ai capi dell'amperometro (Δa) e quindi esso segna $V = V_x + \Delta a$. Il valore di R_x misurato sarà perciò:

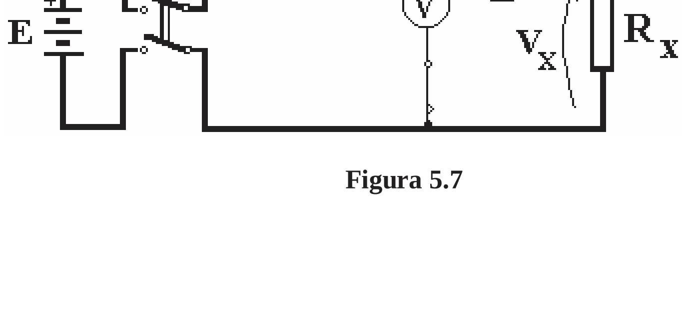


Figura 5.7

$$R_x = \frac{V - \Delta a}{I} = \frac{V - R_a I}{I} = \frac{V}{I} - R_a \tag{5.5}$$

essendo R_a la resistenza interna dell'amperometro, V l'indicazione del voltmetro ed I l'indicazione dell'amperometro.

Nell'ipotesi $R_x >> R_a$ si può ritenere $R_x \cong \frac{V}{I}$.

Viceversa, inserendo il voltmetro *a valle* dell'amperometro (vedi figura 5.8), l'amperometro non segna il valore della corrente che circola in R_x, ma segna *in eccesso* anche il valore della corrente assorbita dal voltmetro i_v.

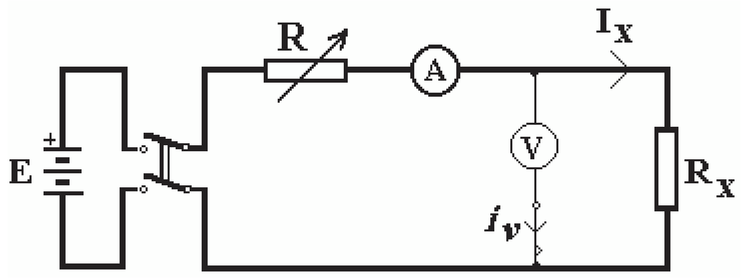


Figura 5.8

Quindi, il valore della R_x risulta:

$$R_x = \frac{V}{I - i_v} = \frac{V}{I - \frac{V}{R_v}} \tag{5.6}$$

essendo R_v la resistenza interna del voltmetro.

Nell'ipotesi $R_x << R_v$, si ha che: $I_x = I - i_v \cong I$ e, quindi: $R_x \cong \frac{V}{I}$.

Misure di resistenze di valore basso

Supponiamo di voler misurare la resistenza R di un resistore di basso valore. Tale resistenza sarà realizzata, presumibilmente, con un resistore a quattro morsetti. I due morsetti A1 ed A2 (detti morsetti amperometrici) sono usati per collegare il resistore al circuito di misura mentre gli altri due V1 e V2 (detti morsetti voltmetrici) sono usati per prelevare la caduta di potenziale mediante il voltmetro V (figura 1).

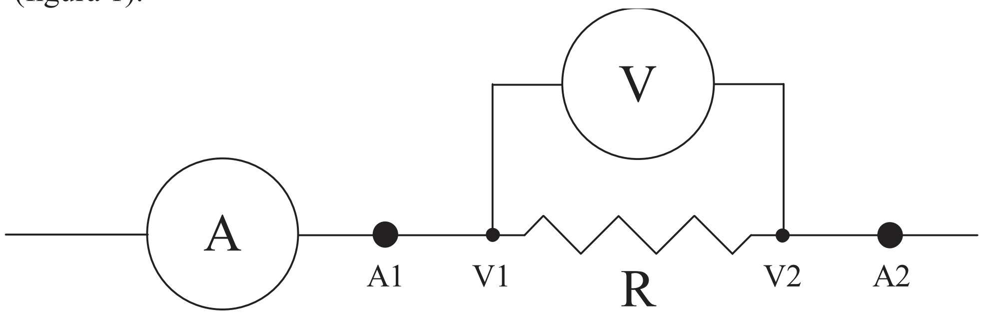


Fig. 1 – Metodo volt-amperometrico

Per eseguire tale misura collochiamo il voltmetro V a valle dell'amperometro A perché la resistenza R è molto minore della resistenza interna del voltmetro. Infatti, nelle ipotesi fatte, la resistenza R di basso valore ohmico sarà dell'ordine di qualche frazione di ohm mentre la resistenza del voltametro sarà almeno di qualche kΩ. Per eseguire la misura potremmo, in linea di principio, usare il metodo volt-amperometrico descritto dal circuito di figura 1. Dalle indicazioni dei due strumenti potremmo infatti misurare sia la corrente *I* che fluisce nel resistore R sia la caduta di potenziale *V* prodotta ai capi della resistenza per effetto del passaggio della corrente di misura. Il valore di resistenza risulterebbe dalla legge di Ohm:

$$R = \frac{V}{I}$$

L'incertezza globale della misura dovrebbe ricavarsi propagando le incertezze di tensione e corrente secondo il legame funzionale imposto dalla succitata legge di Ohm. Ad esempio, adottando l'approccio probabilistico e indicando rispettivamente con σ_V e σ_I le incertezze tipo di tensione e corrente, si otterrebbe:

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial V}\right)^2 \sigma_V^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\right)^2 \sigma_I^2}$$

in cui σ_R rappresenta l'incertezza tipo con cui è stata misurata la resistenza R.

Tale approccio, anche se non è sbagliato da un punto di vista concettuale, in genere non viene adottato in quanto è possibile ottenere un'incertezza di misura inferiore usando un metodo di misura differente.

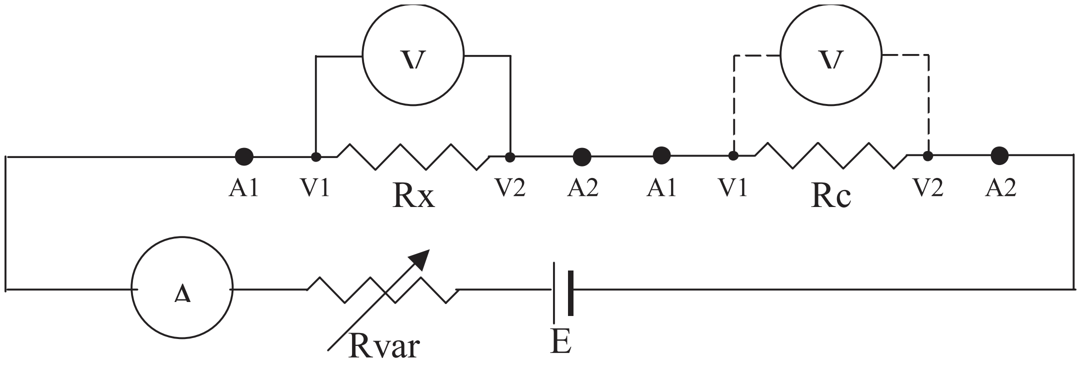


Fig. 2 – Metodo della caduta di potenziale

Se, infatti, si adotta il metodo di misura (noto come metodo della caduta di potenziale) descritto in figura 2, è possibile ottenere risultati di misura di migliore "qualità".

Con tale metodo, la corrente che fluisce nella resistenza incognita R_X si misura attraverso la caduta di potenziale prodotta dalla stessa corrente su una resistenza campione Rc (di cui siano quindi noti: valore ohmico nominale, incertezza e corrente massima). La regolazione della corrente a cui eseguire la prova viene eseguita variando opportunamente il valore ohmico della resistenza variabile Rvar. In questa fase, l'amperometro A si usa per leggere l'ordine di grandezza della corrente di prova imposta al circuito di misura. Tale ordine di grandezza deve essere definito preliminarmente, nella fase di progettazione della misura, in base alle considerazioni riportate di seguito.

In fase di progettazione, bisogna considerare che in presenza di valori ohmici particolarmente bassi, onde evitare la misura di cadute di tensione troppo piccole, che produrrebbero bassi valori di rapporto segnale rumore, è opportuno lavorare con valori di intensità di corrente abbastanza elevati. Per chiarire questo concetto progettuale facciamo qualche esempio numerico. Supponiamo di voler misurare una resistenza R_X di 0.01 Ω, se progettassimo una corrente di prova I=1A, dovremmo misurare una caduta di potenziale V=10mV. Tale scelta progettuale non è consigliabile perché il rapporto tra il segnale e il rumore inevitabilmente catturato dal circuito di misura sarebbe troppo basso. Se, invece, supponessimo di usare una corrente di prova I=10A, allora la caduta di potenziale sulla resistenza diventerebbe V=0.1V con un incremento del segnale rispetto al rumore catturato dal circuito di misura e quindi con un incremento del rapporto segnale rumore. Se invece di usare una corrente di prova di 10 A, ne usassimo una di valore ancora più elevato le cose sembrerebbero andare ancora meglio, perché all'aumentare della corrente aumenterebbe proporzionalmente la caduta di tensione riscontrata sulla resistenza! Quale è allora il limite superiore della corrente di prova al di sopra del quale non è consigliabile andare? Per rispondere a tale domanda bisogna innanzitutto ricordare che le resistenze campione sono caratterizzate da un valore di potenza massima dissipabile (o in alternativa da un valore di corrente massima). Tali valori (di massima potenza o di massima corrente) rappresentano i valori limite, superati i quali il costruttore del resistore non risponde più dei limiti di incertezza (o di tolleranza) dichiarati. Pertanto, un primo limite alla corrente di prova è imposto dalla massima corrente indicato sui dati di targa del resistore campione. Un altro limite sul valore massimo della corrente di prova è imposto dalla resistenza incognita Rx la cui resistività è funzione della temperatura. Infatti, a differenza del materiale con cui è realizzato il resistore campione (in genere una lega opportuna il cui coefficiente di temperatura è estremamente basso), la resistività della resistenza incognita può variare anche in modo significativo al variare della temperatura. È quindi necessario evitare valori di corrente troppo elevati che produrrebbero un eccessivo riscaldamento di Rx con conseguente variazione di resistenza.

La scelta della corrente di prova in fase progettuale deriva proprio dall'analisi del compromesso tra queste esigenze contrastanti (corrente non troppo bassa da produrre valori troppo piccoli di caduta di potenziale né troppo elevati da superare i limiti di corrente massima per la resistenza campione o da produrre un eccessivo surriscaldamento della resistenza incognita). In conclusione, variando Rvar otteniamo la corrente di prova di cui leggiamo il valore sull'amperometro.

Le resistenze Rx e Rc sono poste in serie nel circuito e perciò la corrente che vi circola è la stessa. Quindi, misurando le cadute di tensione prodotte su queste due resistenze e facendone il rapporto membro a membro, si ottiene il valore di Rx.

$$Vx=Rx*I$$
$$Vc=Rc*I$$
$$\frac{Vx}{Vc}=\frac{Rx}{Rc}\Rightarrow Rx=Rc\frac{Vx}{Vc}$$

Cerchiamo ora di spiegare il motivo per cui questo metodo consente di ottenere risultati di misura migliori rispetto a quelli conseguibili con il metodo volt-amperometrico di figura 1. Innanzitutto, ricordiamo che le misure di Vx e Vc vanno eseguite con lo stesso voltmetro (prima usato per misurare Vx poi per misurare Vc) e, per semplicità di ragionamento, cominciamo a supporre Rc=Rx. Se tale ipotesi fosse rigorosamente verificata risulterebbe Vx=Vc e, quindi, Rx=Rc con il vantaggio di misurare Rx con la stessa precisione con cui conosciamo Rc (saremmo cioè in grado di trasferire la precisione del campione sul misurando indipendentemente dall'incertezza di misura delle tensioni). Lo stesso voltmetro portato a misurare due volte la stessa tensione (Vx=Vc) produce la stessa indicazione (anche se errata) quindi il rapporto Vx/Vc non è affetto da incertezza alcuna! Concettualmente è come se dicessi che non sono interessato a conoscere il valore delle due tensioni Vx e Vc, infatti mi basta solo sapere che le due misure sono uguali (in quanto Rx è funzione del rapporto Vx/Vc)..

Se, viceversa, come in genere accade nella pratica, non fosse possibile realizzare rigorosamente la condizione Rx=Rc, potremmo sempre scegliere una Rc di valore molto prossimo alla Rc in modo che le tensioni indicate dal voltmetro nelle due misure Vx ed Vc siano molto prossime tra loro. In tal caso, potremo asserire che le indicazioni saranno affette da incertezze tanto più prossime tra loro per quanto più prossime sono le indicazioni del voltmetro nelle due misure. Condizione questa che ci garantisce di diminuire le incertezze nell'espressione del rapporto delle tensioni rispetto al caso di due misure di tensione completamente diverse.

In tutto quanto sinora detto, abbiamo ipotizzato che la corrente che fluisce in Rx sia uguale a quella che fluisce in Rc. Tale ipotesi risulta vera in quanto Rx ed Rc sono poste in serie (ovviamente trascurando l'autoconsumo del voltmetro). Pertanto in ogni istante la corrente che fluisce in Rx è la stessa che fluisce in Rc. Ma le misure di tensione su Rx e su Rc non sono eseguite nello stesso istante in quanto abbiamo scelto di usare lo stesso voltmetro nelle due misure (per diminuire l'incertezza dovuta alla eventuale non-linearità della scala nella misura del rapporto delle tensioni). Tale scelta non garantisce che la corrente che attraversa le resistenze sia la stessa nei due istanti in cui facciamo le misure. Per esser certi di ciò dobbiamo garantire la stazionarietà del sistema di misura. Usiamo, perciò, un alimentatore stabilizzato in tensione le cui variazioni sono contenute in limiti tali che l'incertezza globale rientri nell'incertezza desiderata, ma il fatto che la forza elettromotrice rimanga costante non vuol dire che lo sia anche la corrente. La stabilità della corrente dipende non solo dalla tensione applicata ma anche dalla resistenza totale presente nel circuito, che in questo caso è data dalla serie di Rx, Rc e Rvar. Come abbiamo detto in precedenza, la resistenza usata per definire il valore della corrente di prova è Rvar (ha valore ohmico molto maggiore di Rx ed Rc). Può quindi accadere che, al variare del tempo tra le misure, per effetto della corrente che sta circolando, la resistenza variabile si riscalda, varia la resistività e di conseguenza la resistenza che determina il valore della corrente di prova. L'amperometro ha una accuratezza tale da fornire solo l'ordine di grandezza della corrente di prova, quindi non è in grado di segnalare, con sufficiente precisione, se questa sta variando o meno durante la prova. Per verificare la stabilità della corrente, invece di fare solo le due misure su Rx ed Rc, ne facciamo anche una terza che serve solo a verificare se durante la prova vi è stata una variazione di corrente. Pertanto, dal punto di vista operativo si procede secondo i seguenti passi: si misura la Vx, poi la Vc e poi nuovamente la Vx. Se il circuito è a regime, la terza misura risulterà uguale alla prima.

Quanto detto finora non contempla gli eventuali effetti termoelettrici sulla misura derivanti dall'insorgere di forze elettromotrici di contatto. Per capire più a fondo le problematiche coinvolte con tali effetti facciamo un breve cenno alle forze elettromotrici di contatto ed alla loro dipendenza dalla temperatura. L'effetto Volta stabilisce che, dal contatto di due metalli differenti (ad esempio rame (Cu) e zinco (Zn)), nasce una forza elettromotrice, detta appunto di contatto, che dipende dalla natura dei metalli. Se chiudiamo una maglia composta da un certo numero di metalli, la risultante delle forze elettromotrici di contatto è nulla e, quindi, nella maglia non si riscontra alcuna circolazione di corrente (osservazione che è certamente coerente con il principio di conservazione dell'energia: nulla si crea, nulla si distrugge ma tutto si trasforma.

Accanto all'effetto Volta esiste l'effetto Seebeck, che lo particolarizza affermando che l'effetto Volta è vero solo se tutte le giunzioni tra i metalli sono poste alla stessa temperatura (Fig. 3), perché la forza elettromotrice di contatto oltre a dipendere dalla natura dei metalli posti a contatto, dipende anche dalla temperatura a cui sono realizzate le giunzioni.

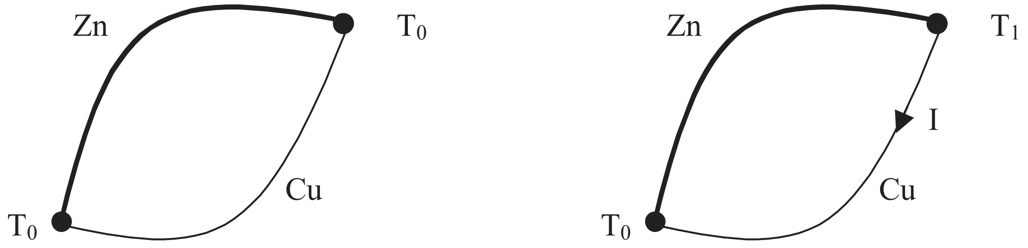


Fig. 3 – Forze elettromotrici di contatto

Pertanto, se nel chiudere una maglia di conduttori metallici di natura diversa, porto i punti delle varie giunzioni a temperature differenti, ho la possibilità di creare una circolazione di corrente (ciò è ancora coerente con il principio di conservazione dell'energia in quanto in tal caso, riscaldando le varie giunzioni, fornisco al sistema energia termica che per effetto Seebeck si trasforma in energia elettrica producendo una circolazione di corrente). Ad esempio se consideriamo ancora la coppia di metalli rame e zinco, con cui realizzo una maglia chiusa, ho che, se porto le giunzioni alla stessa temperatura non riscontro alcun passaggio di corrente, ma se porto le due giunzioni a temperature diverse (una è a temperature T_0 e l'altra a temperatura T_1) allora potrò osservare passaggio di corrente I.

Da quanto detto, quando effettuo una misura di tensione collegando i puntali di un voltametro ai morsetti del circuito tra cui voglio misurare la caduta di potenziale, la tensione che misuro sarà influenzata anche dalle forze elettromotrici di contatto che si vengono a generare. In particolare, quando collego il voltmetro al circuito di misura realizzo una maglia chiusa. Quindi, se tutte le giunzioni che ho realizzato (quelle dove metto i puntali, quelle che sono collegate al voltmetro, e quelle interne al voltmetro) fossero alla stessa temperatura potrei dire che la lettura del voltmetro non è influenzata dalle forze elettromotrici di contatto perché la somma componente è nulla per effetto Volta, ma se non riesco a garantire questa condizione il voltmetro produrrà una indicazione influenzata dalla presenza delle forze elettromotrici di contatto.

Nel metodo della caduta di potenziale, questo problema diventa non trascurabile in quanto le correnti di lavoro sono abbastanza elevate (per poter garantire cadute di potenziale apprezzabili). Tale corrente produce un riscaldamento dei conduttori per effetto Joule e quindi una certa distribuzione di temperatura lungo il circuito di misura che non consente di garantire che, a regime, tutte le giunzioni si portano alla stessa temperatura. Ne consegue che possono nascere forze elettromotrici di contatto di natura termoelettrica con risultante diversa da zero. Non essendo possibile eliminare tali forze elettromotrici, si cerca di evitare che esse influenzino il risultato di misura.

A tal fine, portiamo a cinque le misure di tensione operando come segue (Fig. 4):

- Misuriamo prima Vx poi Vc.
- Invertiamo il verso di circolazione della corrente usando il circuito invertitore
- misuriamo prima Vc poi Vx
- Invertiamo ancora il verso della corrente e misuriamo di nuovo la Vx.

La quinta misura ha solo una funzione di controllo e se troviamo che è uguale alla prima vuol dire che la corrente si è mantenuta costante.

Operando in questo modo, sia su Rx che su Rc abbiamo sia una misura a corrente diretta che una a corrente inversa, cambiando il segno della corrente cambia il segno delle cadute di tensione, ma le forze elettromotrici di contatto influenzano la misura sempre con lo stesso segno.

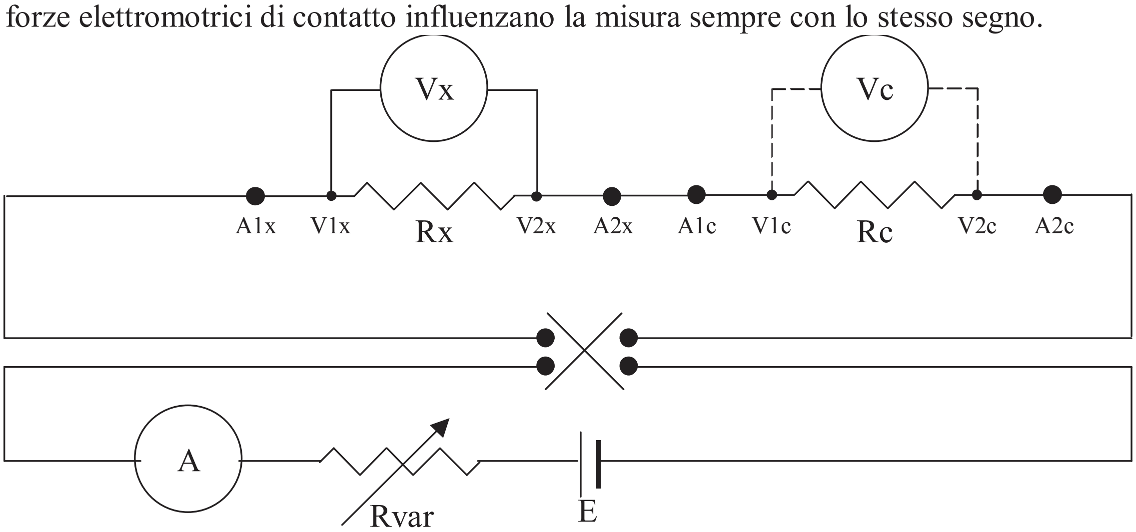


Fig. 4 – Metodo della caduta di potenziale

Risulta che:

$$Vxd=Rx*I+e \qquad\qquad Vxi=-Rx*I+e$$

Dove $e=\Sigma$ forze elettromotrici di contatto. Sottraendo membro a membro le due misure :

$$Vxd+Vxi=Rx*I+Rx*I=2Rx*I \Rightarrow Rx*I=(Vxd-Vxi)/2=Vxmedio$$

Facendo lo stesso per Rc troviamo che:

$$Vcmedio=(Vcd-Vci)/2=Rc*I$$

Dopo aver verificato che la quinta misura è rimasta uguale alla prima (corrente nel circuito è rimasta la stessa), La Rx si individua eseguendo il rapporto tra le due quantità trovate:

$$Rx=Rc*Vxmedio/Vcmedio.$$

Così facendo ci si è resi indipendenti da eventuali forze elettromotrici di contatto, prescindendo dal fatto che le giunzioni siano o meno alla stessa temperatura

Misura di resistenze di valore elevato

Se vogliamo eseguire una misura di resistenze di alto valore non sono le resistenze di contatto a crearci problemi ma le correnti di dispersione che possono diventare una parte significativa rispetto alle correnti che sono presenti nei circuiti che andiamo a considerare.

Per resistenze di alto valore si intendono resistenze di valore ohmico superiore ad 1MΩ. Ad esempio, i problemi di misura di resistenze di alto valore si pongono in modo particolarmente rilevante nel caso in cui si voglia misurare la resistenza di isolamento di un materiale isolante. In tal caso, è evidente che per iniettare nell'isolante la corrente necessaria per misurarne la resistenza dobbiamo innanzitutto alimentare il provino di materiale con una tensione sufficientemente elevata e poi dobbiamo essere sicuri di misurare la corrente che effettivamente circola nell'isolante e non quella che circola nelle conduttanze di dispersione (corrente dispersa).

Nell'eseguire questa misura, si usano tensioni comprese tra i 500V e 1000V, ma, ciononostante, le correnti risultanti in genere sono dell'ordine delle centinaia di nanoampere o, al più, di qualche microampere.

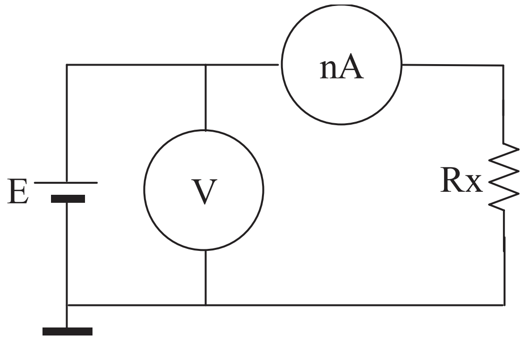


Fig. 5 – Metodo voltamperometrico

Anche per eseguire questa misura, si usa un metodo voltamperometrico (Fig. 5). Poiché le tensioni in gioco sono dell'ordine dei 500V ÷ 1000V, occorre usare un voltmetro (V) di portata opportuna collocato a monte dell'amperometro per minimizzarne gli effetti di autoconsumo. Inoltre, la misura di corrente sarà eseguita usando un nanoamperometro (nA) per avere la necessaria sensibilità di misura.

La resistenza Rx è di valore elevato e quindi è realizzata a tre morsetti (Fig. 6) due dei quali hanno funzione sia di morsetti amperometrici che voltmetrici (le resistenze di contatto sono trascurabili perché sono di molti ordini inferiori rispetto al valore di Rx), il terzo morsetto serve per risolvere i problemi connessi con le correnti di dispersione (non riuscendo ad eliminare queste correnti l'unico accorgimento che possiamo adottare è evitare che questo elemento di disturbo influisca sulla misura, dobbiamo quindi fare in modo che le correnti di dispersione non attraversino l'amperometro). Le correnti di dispersione, sono quelle correnti che si chiudono attraverso le conduttanze di dispersione per effetto delle differenze di potenziale esistenti tra i vari nodi del circuito di misura e le masse conduttrici circostanti. Con la schermatura della resistenza, fissando lo schermo ad un potenziale opportuno, conseguiamo il primo vantaggio di definire le conduttanze di dispersione (in quanto definiamo la geometria del sistema da cui le conduttanze di dispersione dipendono). Una volta definite le conduttanze di dispersione, potremmo avere delle correnti di dispersione tra circuito e schermo delle differenze di potenziale applicate alle

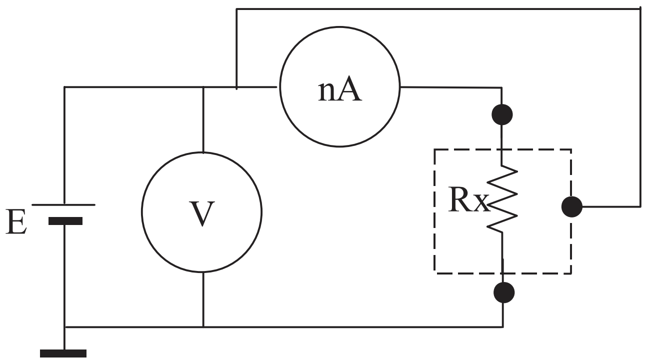


Fig. 6– Metodo voltamperometrico

conduttanze di dispersione (ora fissate dalla geometria del sistema). Per risolvere il problema di misura (evitando di misurare le correnti disperse) dobbiamo fare in modo che tali correnti non attraversino il nanoamperometro (accorgimento adottato in Fig. 6).

Per misurare le correnti che circolano nel circuito, essendo queste dell'ordine delle frazioni di microampere, siamo costretti a scegliere uno strumento particolarmente sensibile (un nanoamperometro o, al più, un microamperometro). Per evitare di danneggiare irrimediabilmente tali strumenti così sensibili, bisogna porre particolare attenzione alle correnti che circolano durante il transitorio iniziale quando si alimenta o si disalimenta il circuito di misura. Per evidenziare i problemi connessi con tali transitori, introduciamo degli interruttori nel circuito di misura per schematizzare l'istante in cui cominciamo la stessa.

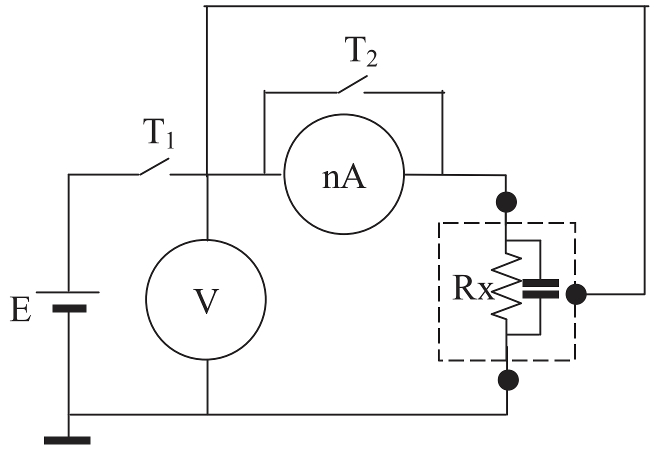


Fig. 7– Transitorio iniziale

Per capire cosa succede quando chiudiamo l'interruttore T_1, dobbiamo considerare un modello di Rx che evidenzi gli effetti capacitivi che caratterizzano il comportamento del resistore durante il transitorio di inserzione (Fig.7). Alla chiusura di T_1, supponendo inizialmente scarica la capacità parassita in parallelo ad Rx, accade che la resistenza Rx è cortocircuitata e nel circuito circola un picco di corrente uguale al rapporto tra forza elettromotrice E e resistenza equivalente secondo Thevemin vista dai suoi morsetti (serie della resistenza interna del generatore E, resistenza interna del nanoamperometro e resistenza dei collegamenti). Tale picco di corrente è quindi elevatissimo. Si tenga conto che la E=500V÷1000V mentre la resistenza equivalente secondo Thevenin è dell'ordine di grandezza di qualche ohm!

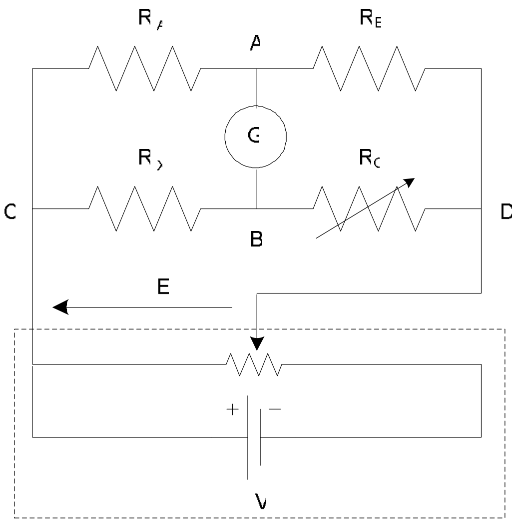
È quindi necessario proteggere il nanoamperometro con un tasto di cortocircuito T_2 per tutto il tempo richiesto per l'estinzione del transitorio.

5.3 Metodo del Ponte di Wheatstone per la misura di resistenze.

Generalità

Un metodo classico per la misura di resistenze di ordine medio è il ponte di Wheatstone. Una schematizzazione di tale ponte è riportata in figura 1. Come si può vedere dallo schema elettrico, il ponte di Wheatstone presenta 4 resistenze connesse in modo da realizzare una maglia di forma quadrangolare. Su una delle diagonali (detta diagonale di rivelazione) è inserito un galvanometro mentre sull'altra (diagonale di alimentazione) è inserito il circuito di alimentazione potenziometrica. Dei resistori inseriti nei lati del quadrilatero:

- R_X costituisce il misurando;
- R_A ed R_B sono resistori campione (di valore fisso o variabile a spine);
- R_C è un resistore campione a decadi;



Il rivelatore di zero (G), posto tra i nodi A e B, è sensibile al passaggio di corrente nel ramo stesso o alla differenza di potenziale tra A e B. Si dice che il ponte è in condizioni di equilibrio, quando è nulla la corrente che attraversa la diagonale di rivelazione. Tale condizione può essere individuata osservando la posizione dell'indice del galvanometro che si deve portare sullo zero (centro della scala galvanometrica). Durante l'esecuzione della misura, il generatore di tensione E sostiene una corrente I che si ripartisce tra i due rami comprendenti, rispettivamente, il nodo A e il nodo B. In condizioni di equilibrio, essendo nulla la corrente che fluisce nella diagonale di rivelazione, risulta:

$$I_{RA} = I_{RB} \qquad e \qquad I_{RX} = I_{RC}$$

ed ancora:

$$R_X \cdot I_{RX} = R_A \cdot I_{RA} \qquad e \qquad R_C \cdot I_{RC} = R_B \cdot I_{RB}$$

Dividendo membro a membro (e tenendo conto delle relazioni esistenti tra le varie correnti), si ricava la "*condizione di equilibrio*":

$$\frac{R_X}{R_C} = \frac{R_A}{R_B} \Rightarrow R_X = R_C \cdot \frac{R_A}{R_B}$$

Pertanto, agendo sulla resistenza a decadi R_C, si realizza la condizione di equilibrio e poi, applicando la relazione precedente (essendo noti R_A, R_B ed R_C) si ricava il valore del misurando R_X.

Procedura di misura

Poiché nella fase iniziale della misura, il valore della resistenza incognita R_X potrebbe essere anche molto diverso da quello che soddisfa la condizione di equilibrio, la corrente nella diagonale di rivelazione AB potrebbe essere molto maggiore di quella sostenibile dal galvanometro G. Per scongiurare il pericolo di danneggiare il galvanometro, si alimenta il ponte con tensioni inizialmente sufficientemente piccole (tali cioè da produrre correnti di squilibrio inferiori alla portata del galvanometro anche in condizioni di forte squilibrio iniziale). Infatti, bassi valori della tensione di alimentazione riducono la sensibilità del ponte che produce bassi valori di corrente di squilibrio anche in condizione di forte squilibrio. Per lo stesso motivo si imposta il galvanometro con sensibilità bassa (esiste solitamente un apposito selettore che, mediante l'inserzione di resistenze di ordine diverso riduce la corrente che circola nel ramo di rivelazione), così da fornire un ulteriore livello di protezione. Operando opportunamente sul resistore a decadi R_C, ci si avvicina alla condizione di equilibrio ed è quindi possibile aumentare la sensibilità del ponte aumentando la tensione di alimentazione e la sensibilità propria dello strumento. All'aumentare della sensibilità, si affina la condizione di equilibrio operando sulle decadi meno significative del resistore campione. Essendo la risoluzione della resistenza a decadi definita dal valore della decade meno significativa (in genere 0.1 Ω/step), ci si accorge che, con sensibilità del ponte molto spinta, non si riesce sempre ad azzerare la corrente nella diagonale di rivelazione. Potrebbe, infatti, accadere che impostando un certo valore di R_C, l'indice del galvanometro si trova a sinistra dello zero e che, variando di 0.1 Ω la resistenza R_C, l'indice del galvanometro si sposta a destra dello zero. Non essendo possibile dare alla resistenza campione variazioni inferiori alla sua risoluzione (ipotizzata di 0.1 Ω/step) non si riesce a raggiungere la condizione di equilibrio. In tal caso, si esegue una interpolazione numerica per valutare il valore di R_C che avrebbe teoricamente portato alla condizione di equilibrio. A titolo di esempio, supponiamo che impostando su R_C il valore di 8715,5 Ω, l'indice del galvanometro devi a sinistra dello zero di δ_1 deviazioni e che in corrispondenza di R_C uguale a 8715,6 Ω, il galvanometro presenti δ_2 deviazioni a destra dello zero. Ipotizzando la linearità di funzionamento del galvanometro nell'intorno dello zero si può ricavare il valore di R_C corrispondente alla posizione dell'indice sullo zero.

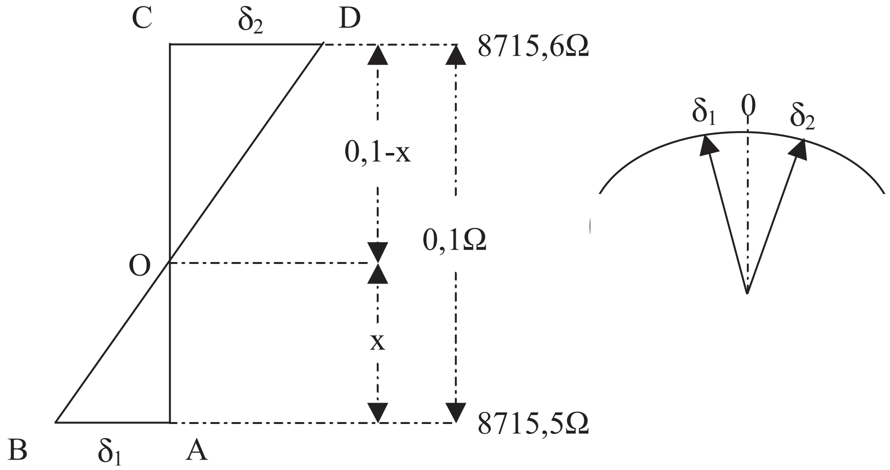


Figura 2 – Rappresentazione grafica dell'interpolazione

Osservando la figura 2, si evince che i triangoli OBA e ODC sono simili, quindi risulta:

$$x:(0{,}1-x)=\delta_1:\delta_2 \Rightarrow x=0{,}1\cdot\frac{\delta_1}{\delta_1+\delta_2}$$

In cui, ovviamente, x rappresenta la correzione aggiuntiva da apportare alla R_C per ottenere il valore della resistenza campione (R_{C0}) che teoricamente avrebbe condotto alla condizione di equilibrio. Nell'esempio precedente, supponendo δ_1 = 15 deviazioni a sinistra e δ_2 = 20 deviazioni a destra dello zero, risulterebbe:

$$x=0{,}1\cdot\frac{15}{15+20}=0{,}1\cdot\frac{15}{35}=0{,}042 \Rightarrow R_{C0}=8715{,}5+0{,}042=8715{,}542$$

In conclusione, la misura di R_X si ottiene dalla relazione:

$$R_X=R_{C0}\cdot\frac{R_A}{R_B}$$

Valutazione dell'incertezza

Poiché la misura di R_X con il metodo del ponte di Wheatstone è di tipo indiretto, l'incertezza ad esso associata si deve valutare applicando la legge di propagazione delle incertezze nelle misure indirette già studiata in precedenza.

Essendo l'espressione funzionale di R_X una relazione contenente solo prodotti e rapporti, si può facilmente verificare che l'incertezza relativa elevata al quadrato risulta uguale alla somma delle incertezze relative dei singoli termini anch'esse elevate al quadrato:

$$\left(\frac{u_{R_x}}{R_x}\right)^2 = \left(\frac{u_{R_{C0}}}{R_{C0}}\right)^2 + \left(\frac{u_{R_a}}{R_a}\right)^2 + \left(\frac{u_{R_b}}{R_b}\right)^2$$

A scopo esemplificativo, riportiamo l'esempio di calcolo per l'incertezza $u_{R_{C0}}$ relativa al valore teorico di R_{C0} che azzera il ponte. Dalle specifiche fornire dal costruttore della resistenza, rileviamo che gli errori massimi percentuali propri di ogni decade sono: $\varepsilon_{0,1\Omega} = 0,5\%$, $\varepsilon_{1\Omega} = 0,15\%$, $\varepsilon_{10,100,1000\Omega} = 0,05\%$. L'incertezza sulla R_{c0} sarà pertanto pari a[1]:

$$u_{R_{C0}} = \frac{8000 \cdot \varepsilon_{1000\Omega} + 700 \cdot \varepsilon_{100\Omega} + 10 \cdot \varepsilon_{10\Omega} + 5 \cdot \varepsilon_{1\Omega} + 0,5 \cdot \varepsilon_{0,1\Omega}}{100\sqrt{3}} = 2,52\ \Omega$$

Vale la pena notare che nella determinazione dell'incertezza sulla R_C è del tutto indifferente usare il valore R_{C0}, R_{Cd} o R_{Cs} in quanto la differenza tra i tre valori è al più sulle unità di Ohm che, per i valori di incertezza dichiarata, non incide significativamente sull'incertezza composta che invece viene determinata in massima parte dall'incertezza sulla decade delle centinaia di Ohm.

Bisogna, però, tenere conto che a tale valore di incertezza va aggiunta un'ulteriore aliquota di incertezza dipendente dal fatto che il ponte di Wheatstone impiega un metodo di zero. Ogni qual volta si usa un metodo di zero, infatti, bisogna tener conto del fatto che le relazioni di equilibrio sono valide nell'ipotesi in cui sia rigorosamente verificato l'azzeramento di una grandezza (una corrente o una tensione) nel circuito di misura. In particolare, nel caso del ponte di Wheatstone, la relazione che esprime il valore della resistenza incognita in funzione delle altre tre resistenze note è valida in condizione di azzeramento della corrente nel ramo di rivelazione. Una corretta valutazione della incertezza nel metodo del ponte di Wheatstone (e più in generale di tutti i metodi di zero) deve tener conto del fatto che nella diagonale di rivelazione potrebbe circolare una corrente tanto piccola da non essere apprezzabile sul rivelatore di zero (a causa di una insufficiente sensibilità). Nasce quindi l'esigenza di stimare l'incertezza determinata dal fatto che si usa un'espressione valida all'equilibrio quando non è possibile essere certi che l'equilibrio (cioè la condizione di zero) sia realmente verificato. Per affrontare il problema della stima dell'incertezza di sensibilità del ponte di Wheatstone, si può operare con due approcci distinti: un approccio sperimentale (*a posteriori*) ed un approccio teorico (*a priori*). L'aliquota di incertezza che così determineremo è detta incertezza di sensibilità, ed è definita in termini relativi come la variazione virtuale dR_X da dare alla resistenza incognita R_X per osservare la minima variazione apprezzabile sul rivelatore di zero:

$$u_G = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dR_X}{R_X}.$$

La variazione dR_X è ovviamente virtuale perché la resistenza R_X ha valore fissato, ancorché ignoto. E' facile verificare che tale variazione è pari all'errore massimo che si può commettere sulla misura della resistenza incognita. Infatti, se R_X è il valore "vero," ottenuto leggendo il corrispondente valore R_{C0} che idealmente annulla la corrente nel galvanometro, a causa della sensibilità finita del

[1] L'approccio usato si riferisce ad una valutazione deterministica dell'incertezza che, a partire dagli errori massimi dichiarati per ogni decade, determina l'errore sul valore di resistenza complessiva come somma degli errori relativi delle singole decadi. L'approccio di tipo probabilistico prevede invece la valutazione dell'incertezza composta come somma quadratica delle incertezze sulle singole decadi, ovvero:

$$u_{R_{C0}} = \sqrt{\left(8000 \cdot \varepsilon_{1000\Omega}\right)^2 + \left(700 \cdot \varepsilon_{100\Omega}\right)^2 + \left(10 \cdot \varepsilon_{10\Omega}\right)^2 + \left(5 \cdot \varepsilon_{1\Omega}\right)^2 + \left(0,5 \cdot \varepsilon_{0,1\Omega}\right)^2} / 100\sqrt{3}.$$

rivelatore di zero tutto l'intervallo centrato su R_X e di semiampiezza dR_X darà un'apparente condizione di zero.

Il fattore moltiplicativo √3 è determinato dal passaggio da un'indicazione di tolleranza ad una di incertezza attraverso l'attribuzione di una distribuzione uniforme all'errore.

Approccio a priori per la valutazione dell'incertezza di sensibilità (metodo teorico)

Per valutare la sensibilità per via teorica è necessario innanzitutto verificare come varia la corrente nel galvanometro al variare della resistenza R_X a parità degli altri parametri. Per semplificare la trattazione conviene riferirsi al circuito equivalente secondo Thevenin visto ai capi del galvanometro (morsetti A e B), la cui resistenza e generatore equivalente sono rispettivamente pari alla resistenza vista ai morsetti A e B quando la tensione di alimentazione è nulla (Fig. XX.a), e alla tensione a vuoto agli stessi morsetti (Fig. XX.b).

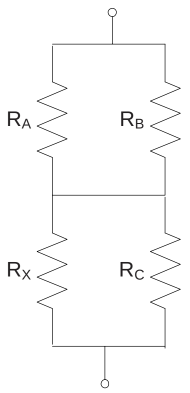


Fig. XX.a – Resistenza equivalente

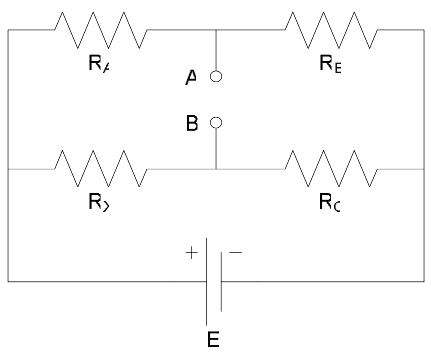


Fig. XX.b – Generatore equivalente

Sostituendo il generatore di tensione E con un cortocircuito (supponendo che l'alimentazione abbia nel complesso una resistenza interna molto piccola, al limite nulla), è possibile calcolare la resistenza equivalente del circuito:

$$R_{eq} = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b} + \frac{R_x R_c}{R_x + R_c}$$

Il generatore equivalente di Thevenin presenterà invece una tensione E_0 pari alla differenza di potenziale a vuoto V_{AB}, di ampiezza pari a:

$$E_0 = V_{AB} = V_A - V_B = E\left[\frac{R_a}{R_a + R_b} - \frac{R_x}{R_x + R_c}\right]$$

Per inciso, facciamo notare che qualora stessimo utilizzando un rivelatore di zero di tensione anziché di corrente, la condizione di equilibrio si verificherebbe per $V_{AB} = 0$, ovvero quando il termine in parentesi quadra si annulla. E' facile verificare che affinché ciò si realizzi si deve verificare la stessa condizione sulle resistenze trovata nel caso di rivelatore di corrente.

Rappresentando il galvanometro G mediante la sua resistenza interna R_g, la corrente I_g che fluisce attraverso di esso è pari a:

$$I_g = \frac{E_0}{R_{eq} + R_g},$$

e pertanto la sua variazione rispetto alla resistenza R_X intorno all'equilibrio è pari a:

$$dI_g = \left.\frac{dI_g}{dR_X}\right|_{I_g=0} dR_X = \frac{d}{dR_X}\left.\left[\frac{E_0}{R_{eq}+R_g}\right]\right|_{I_g=0} dR_X =$$

$$= dR_X \left.\left[\frac{1}{R_{eq}+R_g}\frac{dE_0}{dR_X} + \cancel{E_0}\frac{d}{dR_X}\left(\frac{1}{R_{eq}+R_g}\right)\right]\right|_{I_g=0} =$$

$$= \frac{E}{R_{eq}+R_g}\frac{R_C}{\left(R_X+R_C\right)^2} dR_X$$

Nella seconda uguaglianza, nel secondo addendo in parentesi quadra il contributo dovuto alla tensione di alimentazione E_0 si annulla perché intorno all'equilibrio la tensione ai capi dei nodi A e B è nulla. La terza uguaglianza è stata ottenuta ricordando l'espressione di E_0 ottenuta nella pagina precedente.

Invertendo la relazione precedente possiamo scrivere:

$$\frac{dR_X}{R_X} = dI_g \frac{R_{eq}+R_g}{E}\frac{\left(1+R_X/R_C\right)^2}{R_X/R_C} = dI_g \frac{R_{eq}+R_g}{E}\frac{\left(1+R_A/R_B\right)^2}{R_A/R_B},$$

dalla quale si evince che per rendere minimo l'errore di sensibilità è necessario:

1) Aumentare la sensibilità del galvanometro riducendo il valore dI_g della minima corrente rilevabile;
2) Ridurre la resistenza totale del circuito $R_{eq} + R_g$;
3) Aumentare la tensione di alimentazione del circuito E;
4) Impiegare due resistori campione di valore $R_A = R_B$.

La tensione E non può essere aumentata indefinitamente perché altrimenti la corrente che circola nel circuito potrebbe essere maggiore della massima corrente tollerabile dei resistori campione, ed in particolare dalla resistenza a decadi R_C, della quale pertanto non sarebbe più garantita l'incertezza sul valore nominale.

Approccio a posteriori per la valutazione dell'incertezza di sensibilità (metodo sperimentale)

Immaginando di poter far variare la resistenza incognita R_X di un valore ΔR_X, noteremmo che il rivelatore di zero defletterebbe di un numero di deviazioni che indichiamo con $\Delta\lambda$. Dai di ΔR_X e $\Delta\lambda$, supponendo lineare il comportamento del galvanometro nell'intorno dello zero (ipotesi certamente accettabile per piccoli valori di deflessione del suo indice), è possibile ricavare, mediante una semplice proporzione, quale sarebbe la variazione (dR_X) che dovremmo imporre ad R_X per osservare sul galvanometro la minima deflessione apprezzabile ($d\lambda$):

$$\Delta R_X : \Delta\lambda = dR_X : d\lambda \Rightarrow dR_X = \frac{\Delta R_X}{\Delta\lambda}\cdot d\lambda$$

Vere le ipotesi fatte, sarebbe possibile stimare la variazione dR_X di R_X che farebbe deflettere l'indice del galvanometro della minima quantità apprezzabile. Tale valore sarebbe allora proprio l'incertezza di sensibilità ricercata in quanto variazioni di R_X inferiori a dR_X comporterebbero, per ipotesi, deflessioni dell'indice del galvanometro non percepibili.

Il problema che si pone nell'applicare la tecnica su esposta deriva dal fatto che essendo R_X una resistenza di valore ohmico fisso, non è possibile imporre sperimentalmente la variazione ΔR_X.

Però, dalla relazione di equilibrio del ponte, si può osservare che dando una opportuna variazione ΔR_C alla resistenza campione R_C si può ottenere lo stesso effetto che si otterrebbe variando di ΔR_X la resistenza R_X. Infatti, essendo:

$$R_X = R_{C0} \cdot \frac{R_A}{R_B} \Rightarrow \Delta R_X = \Delta R_C \cdot \frac{R_A}{R_B} \Rightarrow \frac{\Delta R_X}{R_X} = \frac{\Delta R_C \cdot \frac{R_A}{R_B}}{R_X} = \frac{\Delta R_C \cdot \frac{R_A}{R_B}}{R_{C0} \cdot \frac{R_A}{R_B}} = \frac{\Delta R_C}{R_{C0}}$$

Pertanto dare ad R_X una variazione relativa $\Delta R_X/R_X$ equivale a dare la stessa variazione relativa $\Delta R_C/R_{C0}$ ad R_{C0}. Tale considerazione risolve il problema, essendo R_{C0} realizzata con un resistore variabile a decadi. Possiamo allora riscrivere l'espressione dell'incertezza di sensibilità come segue:

$$dR_X = \frac{\Delta R_X}{\Delta\lambda} \cdot d\lambda = \Delta R_C \cdot \frac{d\lambda}{\Delta\lambda} \cdot \frac{R_X}{R_{C0}}$$

Dal punto di vista operativo, quanto sopra detto si traduce eseguendo la seguente procedura: a partire dalla condizione di equilibrio (o di equilibrio apparente) R_{C0} si impone una variazione (ΔR_C) alla resistenza campione tale da produrre all'indice del galvanometro un numero significativo di deviazioni ($\Delta\lambda$). Si sceglie il valore da attribuire a $d\lambda$ come minima deflessione che si è in grado di apprezzare sul galvanometro (in genere si sceglie mezza divisione). Si attribuisce ad R_X il valore stimato applicando la relazione di equilibrio (anche se apparente). Si determina l'incertezza di sensibilità dR_X applicando l'espressione trovata.

A titolo di esempio, supponiamo di aver raggiunto una condizione di equilibrio (o di equilibrio apparente) in corrispondenza di un valore R_{C0} = 8715,4Ω. Portando R_C=8716,4 Ω abbiamo imposto una variazione ΔR_C = 1,0Ω. Misuriamo il numero di deviazioni di cui deflette l'indice del galvanometro (supponiamo ad esempio che esso defletta di $\Delta\lambda$=4 deviazioni). Supponiamo (ancora a titolo di esempio) che il ponte sia stato realizzato usando due resistori fissi R_A=R_B=1000Ω. Dalla condizione di equilibrio risulterà:

$$R_X = R_{C0} \cdot \frac{R_A}{R_B} = 8715{,}4 \cdot \frac{1000}{1000} = 8715{,}4\Omega$$

Sostituendo i valori trovati nella formula dell'incertezza di sensibilità si ottiene:

$$dR_X = \Delta R_C \cdot \frac{d\lambda}{\Delta\lambda} \cdot \frac{R_X}{R_{C0}} = 1{,}0 \cdot \frac{0{,}5}{4} \cdot \frac{8715{,}4}{8715{,}4} = 0{,}125\Omega$$

L'incertezza di sensibilità definisce quindi i limiti entro cui potrebbe variare la resistenza incognita R_X senza produrre indicazioni sensibili sul galvanometro a causa di una insufficiente sensibilità del metodo. Ipotizzando per l'incertezza di sensibilità una distribuzione di probabilità di tipo rettangolare di ampiezza ±dR_X, si ricava l'incertezza tipo di sensibilità:

$$u_{RXS} = \frac{dR_X}{\sqrt{3}}$$

Per ottenere l'incertezza globale di R_X (u_{RXG}) bisogna combinare l'incertezza tipo u_{RX} con l'incertezza tipo di sensibilità u_{RXS}:

$$u_{RXG}^2 = u_{RX}^2 + u_{RXS}^2$$

e quindi, in definitiva:

$$u_{RXG} = \sqrt{u_{RX}^2 + u_{RXS}^2}$$

Tecnica della doppia pesata

Come visto precedentemente, la relazione di equilibrio del ponte di Wheatstone è:

$$R_X = R_C \cdot \frac{R_A}{R_B}$$

Se si cambiasse il cablaggio del ponte, invertendo la posizione della resistenza R_A con quella di R_B, ovviamente la relazione di equilibrio diventerebbe:

$$R_X = R_C \cdot \frac{R_B}{R_A}$$

In genere, nella implementazione pratica del ponte di Wheatstone, i due resistori R_A ed R_B vengono scelti dello stesso valore nominale per cui, a prima vista, le due configurazioni circuitali dovrebbero portare allo stesso risultato di misura. Però, a causa dell'incertezza che caratterizza i resistori R_A ed R_B, essi pur avendo lo stesso valore nominale, presenteranno in genere un diverso valore effettivo. Questa considerazione si traduce nel fatto, verificato sperimentalmente, che invertendo la posizione del resistore R_A con quella del resistore R_B, il valore del resistore campione R_C che porta il ponte (nelle due configurazioni circuitali) all'equilibrio risulta in genere essere diverso.

$$R_X = R_C^{'} \cdot \frac{R_A}{R_B}$$

$$R_X = R_C^{''} \cdot \frac{R_B}{R_A}$$

In questo paragrafo, si vuole presentare un metodo che cerca di ridurre l'incertezza di misura. Tale metodo (detto della doppia pesata, in quanto trae spunto da una tecnica comunemente usata per ridurre l'incertezza di una pesata ottenuta con una bilancia a due braccia) consiste nel ripetere due volte le operazioni di azzeramento del ponte scambiando di posto i resistori R_A ed R_B. Moltiplicando membro a membro le due relazioni di equilibrio si ottiene:

$$R_X^2 = R_C^{'} \cdot \frac{R_A}{R_B} \cdot R_C^{''} \cdot \frac{R_B}{R_A} = R_C^{'} \cdot R_C^{''}$$

e quindi:

$$R_X = \sqrt{R_C^{'} \cdot R_C^{''}}$$

da cui si evince che R_X è solo funzione di due valori della resistenza campione R_C e risulta quindi indipendente dalle incertezze dei resistori R_A ed R_B. Essendo in genere i valori R_C' ed R_C" molto prossimi tra loro si ricava:

$$R_X = \sqrt{R_C^{'} \cdot R_C^{''}} \cong \sqrt{R_C^2} = R_C$$

si ricava che l'incertezza con cui si misura R_X è uguale a quella di R_C ossia con la tecnica della doppia pesata si riesce a trasferire la precisione di R_C ad R_X.

Ovviamente, per quanto riguarda l'incertezza di sensibilità continuano a valere tutte le considerazioni già fatte in precedenza.