Elementi di Teoria dei campi

Complementi di Fisica per Scienze della Terra

F.Garufi 2008-09

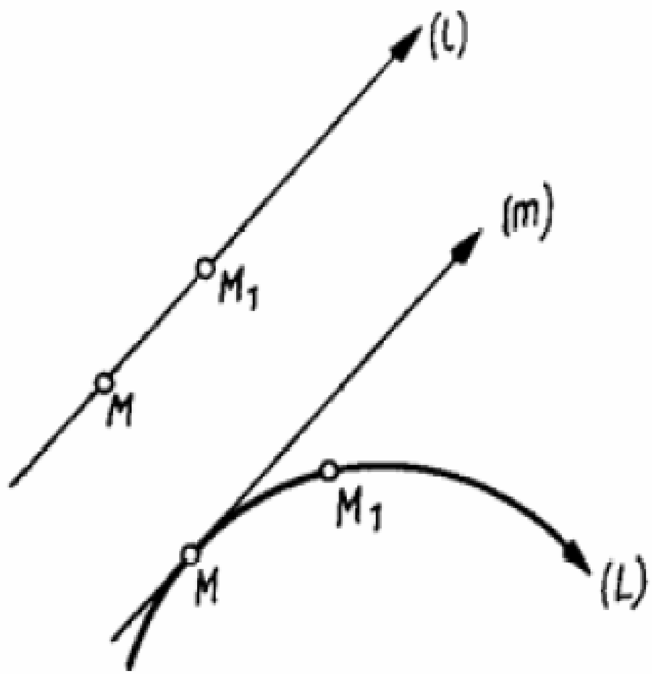
Definizione di campo

- Se una quantità fisica ha un valore definito in ogni punto dello spazio o porzione di esso, si definisce un campo di questa quantità.
- Se la quantità è scalare (temperatura, pressione, potenziale elettrico…) il campo è scalare, se vettoriale (velocità, forza…) il campo si dice vettoriale.

Campo Scalare

- Un campo scalare è definito come una funzione U(x,y,z), del punto di coordinate spaziali x, y, z.
- Per es. Un corpo riscaldato dà un campo di temperature. Il valore della temperatura ha un valore definito in ogni punto del corpo e può variare da punto a punto.
- Se tracciamo una linea in una direzione ℓ attraverso il punto M e consideriamo il punto adiacente M', definiamo la derivata del campo rispetto alla direzione ℓ come:

[U(M')-U(M)]/MM' e possiamo scrivere:



$$\frac{\partial U}{\partial \ell} = \lim_{M' \to M} \frac{U(M') - U(M)}{\overline{MM'}}$$

Campo Scalare

- In ogni punto c'è un'infinità di derivate in ogni direzione,ma possono essere tutte espresse in funzione delle derivate rispetto alle direzioni di x, y e z.

$$\frac{\partial U}{\partial \ell} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos(\ell, x) + \frac{\partial U}{\partial y}\cos(\ell, y) + \frac{\partial U}{\partial z}\cos(\ell, z)$$

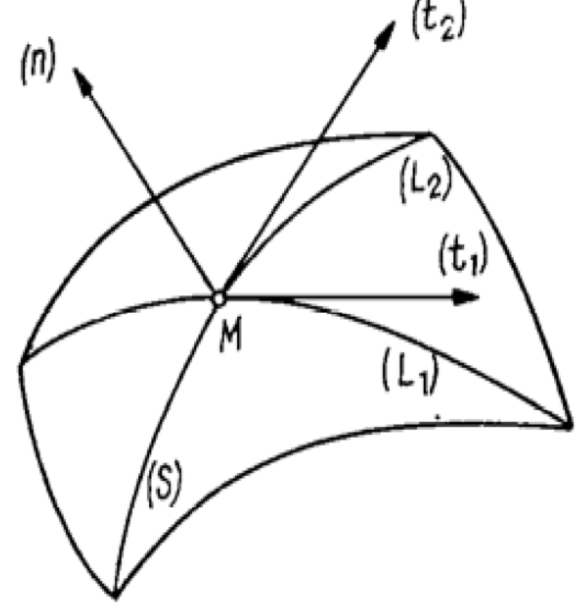
- Avremmo potuto esprimere la derivata lungo una qualsiasi curva s che attraversa M, invece che una retta e dunque:

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

- Le derivate delle coordinate rispetto a s, sono i coseni direttori della tangente alla curva s nel punto M.

Superfici di livello

- Consideriamo le superfici caratterizzate dalla proprietà che in ciascun loro punto, il campo scalare U(M) ha lo stesso valore costante C. Queste sono la famiglia di *superfici di livello* U(M)=C definite dalla costante C. Per es.nel caso del corpo riscaldato, le superfici di uguale temperatura
- Sia S la superficie di livello che passa attraverso il punto M. Prendiamo 3 direzioni perpendicolari attraverso M, la normale alla superficie n, e le direzioni t_1 e t_2, sul piano tangente. Siccome U(M) è costante lungo tutti i punti di S:



$$\frac{\partial U}{\partial t_1} = \frac{\partial U}{\partial t_2} = 0$$

Dunque, prendendo una qualsiasi direzione ℓ, sarà: $\dfrac{\partial U}{\partial \ell} = \dfrac{\partial U}{\partial n}\dfrac{dn}{d\ell}$

Gradiente

Se tracciamo un vettore in direzone di **n**, di modulo $\partial U/\partial n$, la cui proiezione in una qualsiasi direzione ℓ dà la derivata di U rispetto a ℓ, questo definisce il *gradiente* del campo scalare U.

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \ell} = grad_{\ell} U(M)$$

Dove con $grad_{\ell}$ U, si è indicata la proiezione di grad U su ℓ.

La direzione di grad U(M) è sempre quella normale alla superficie di livello nel verso in cui U(M) è crescente.

Dunque il gradiente di uno scalare è un vettore normale alle superfici di livello

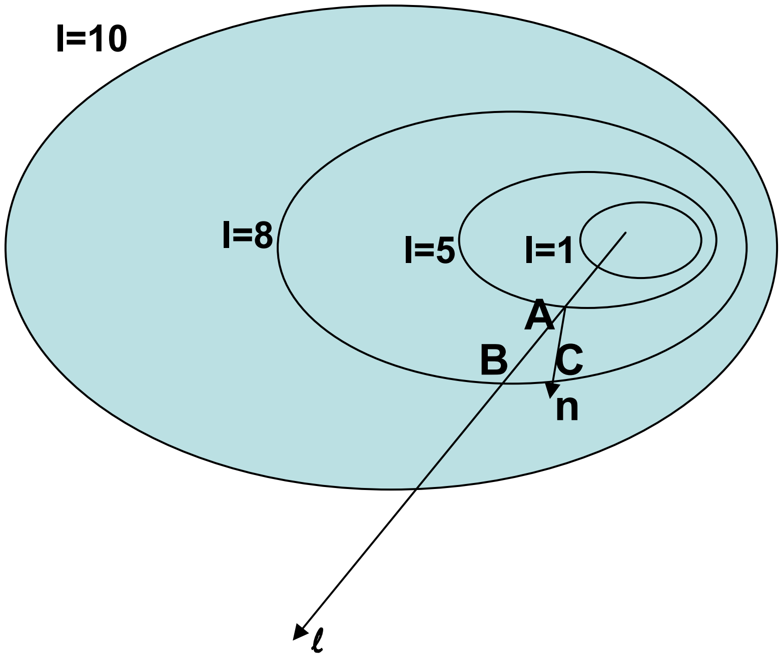
$$\vec{\nabla} U \equiv grad \ U(M)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \ell} = \vec{\nabla} U \cdot \vec{\ell}$$

Avendo introdotto l'operatore differenziale nabla: $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{\mathbf{k}}$

Gradiente esempio grafico

$$\frac{\partial I}{\partial \ell} = \frac{I(B) - I(A)}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\Delta I}{\overrightarrow{AC}} \frac{AC}{AB} = \nabla I \cos(\vartheta) = \vec{\nabla} I \cdot \vec{n}$$



Gradiente: esempio

- Se i punti di un corpo hanno differenti temperature, il calore passerà da quelli a temperatura maggiore a quelli a temperatura minore. La quantità di calore che attraversa l'elemento di superficie dS nel tempo dt sarà proporzionale a dt a dS e alla derivata della temperatura nella direzione **n** normale a dS:

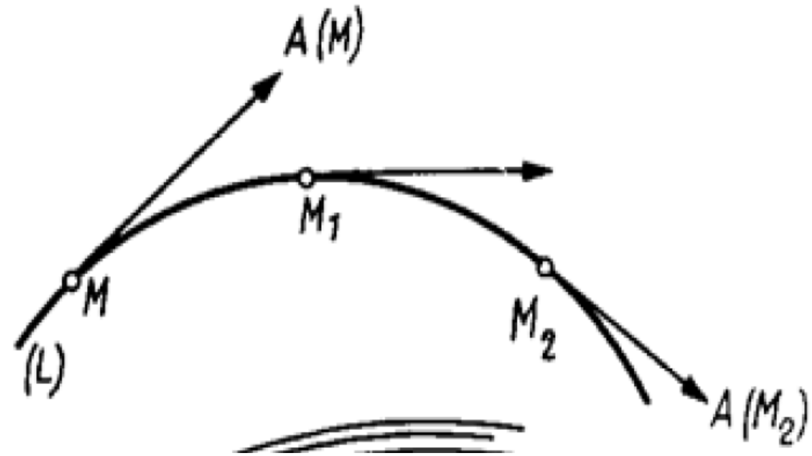
$$\Delta Q = k\ dS\ dt \left| \frac{\partial T(M)}{\partial n} \right|$$

- k è il coefficiente di proporzionalità chiamato conducibilità termica.
- Se consideriamo il flusso di calore –k grad T(M), questo avrà il segno – perchè il flusso va nel senso delle temperature decrescenti mentre il gradiente va nel verso delle temperature crescenti.

$$\Delta Q = k\ dS\ dt \vec{\nabla} T(M) \cdot \vec{\mathbf{n}}$$

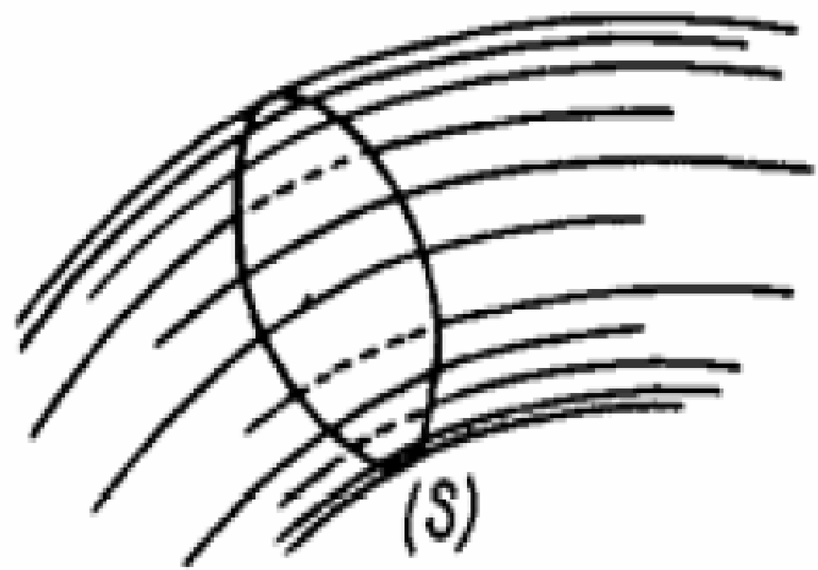
Campi vettoriali

- Consideriamo ora un campo vettoriale: ovvero un vettore **A**(M) il cui modulo e direzione sono definiti in ciascun punto M dello spazio occupato dal campo.
- Definiamo una linea del campo vettoriale, la curva tale che la tangente in ogni punto abbia la direzione del campo **A**(M) in quel punto. Si può mostrare che la linea di campo ha equazione: $$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}$$



Campi vettoriali

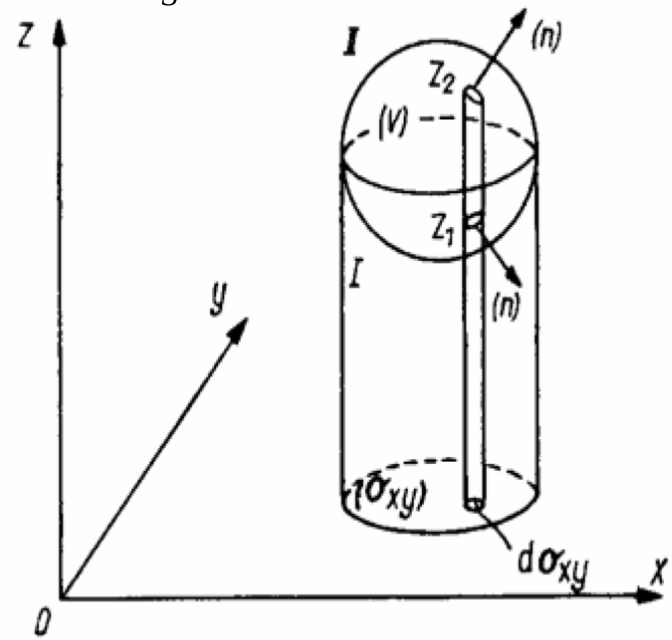
Se tracciamo le linee di vettore attraverso tutti i punti di un elemento di superficie S, il loro insieme forma un *tubo vettoriale* (per es. un tubo di flusso è l'insieme dei vettori velocità di un fluido attraverso una superficie).



Formule integrali utili

- **Formula di Ostrogradskij**: date tre generiche funzioni P, Q ed R definite in un volume V racchiuso da una superficie S, detta n la normale alla superficie è:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iint_S \left[P\cos(n,X) + Q\cos(n,Y) + R\cos(n,Z) \right] ds$$

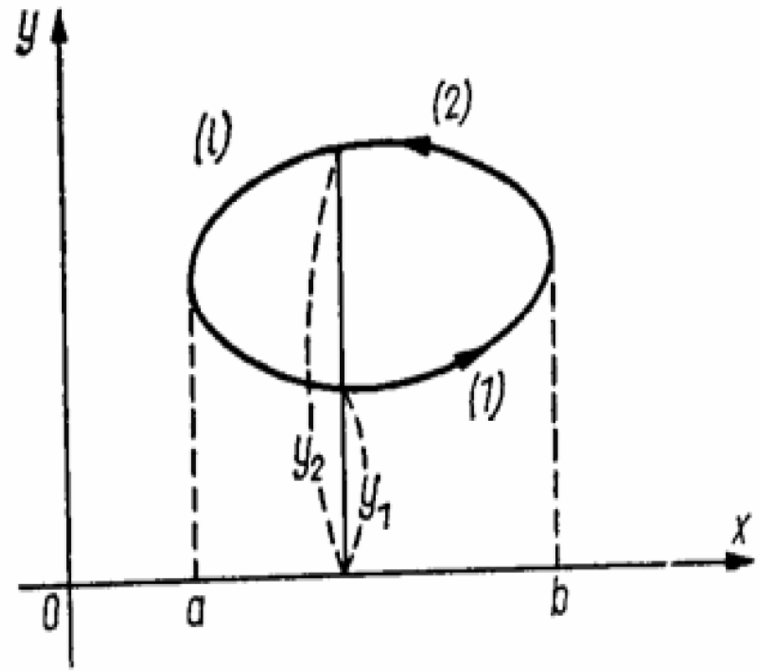


Formule integrali utili

- **Formula di Green:**

lega un integrale di superficie all'integrale di linea sul contorno della superficie

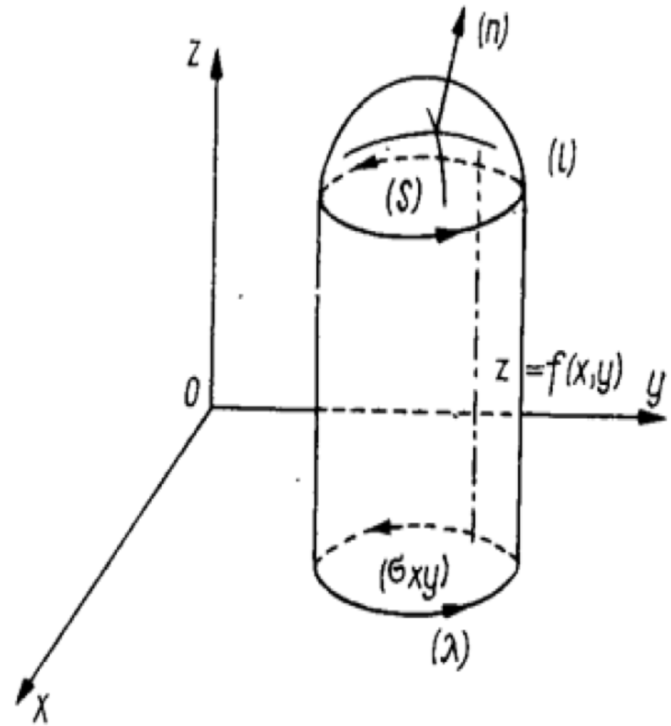
$$\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dS = \oint_\ell P dx + Q dy$$



Formule integrali utili

- **Formula di Stokes:**

Consideriamo una superficie non chiusa S con contorno ℓ e la normale n alla superficie. Definendo il senso antiorario di percorrenza di ℓ come quello positivo, vale:



$$\oint_{\ell} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos(n, X) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos(n, Z) \right] dS$$

Divergenza di un campo

- Sia V un volume racchiuso dalla superficie *S* ed ***n*** la normale alla superficie. Applicando la formula di Ostrogradskij ad A_x, A_y ed A_z:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV =$$

$$= \iint_S \left[A_x \cos(n, X) + A_y \cos(n, Y) + A_z \cos(n, Z) \right] dS =$$

$$= \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS$$

L'argomento dell'integrale di volume è la divergenza del campo vettoriale **A**. L'integrale di superficie è il flusso del campo attraverso la superficie S.

Divergenza di un campo

- Utilizzando il vettore nabla, possiamo scrivere la formula della divergenza come (Teorema di Gauss):

$$\iiint_V (div\ \vec{\mathbf{A}})\,dV \equiv \iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{A}})\,dV = \iint_S (\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{n}})\,dS$$

- Possiamo definire la divergenza del campo in ogni punto M dello spazio come il limite del rapporto tra il flusso del campo attraverso un piccolo volume che circonda M ed il volume stesso quando questo tende a zero.
- Di conseguenza si può definire il campo scalare $div\ \mathbf{A}$.

Esempio: Equazione di continuità

- È l'equazione che esprime la conservazione della materia in fluidodinamica. Consideriamo un volume V, la massa di fluido di densità ρ contenuta nel volume è:

$$m = \iiint \rho \, dV$$

- La massa di fluido che scorre attraverso la superficie dS che circonda il volume, considerando la velocità **v** del fluido è (flusso di massa):

$$\Phi = \iint_S \rho \, \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{n}} \, dS$$

- Questa quantità va eguagliata alla diminuzione di massa all'interno del volume nell'unità di tempo

$$\iint_S \rho \, \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{n}} \, dS = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \, dV$$

Esempio: Equazione di continuità

- Applicando il teorema della divergenza al primo membro:

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{\mathbf{v}})\, dV = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \, dV$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{\mathbf{v}} = 0$$

- Sviluppando il secondo addendo:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\nabla} \rho = 0}$$

- Il vettore ρ**v=j** è il flusso densità di massa (corrente), la sua direzione è quella del moto del fluido e l'intensità è la massa di fluido che scorre nell'unità di tempo in una superficie unitaria ortogonale alla velocità.

Flusso e poli

- Genericamente, se $\mathbf{v}$ è un campo vettoriale, il suo flusso attraverso una superficie S è: $\Phi(\vec{\mathbf{v}}) = \iint_S \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, dS$
- Se all'interno della superficie non c'è una sorgente del campo (un polo) il flusso entrante nella superficie è uguale a quello uscente da essa, dunque: $\Phi(\vec{\mathbf{v}}) = 0$
- Di conseguenza, se la divergenza del campo è non nulla in un punto, vuol dire che in quel punto c'è un **polo** del campo.
- Il segno della divergenza darà la **polarità** (positiva o negativa), il valore, l'intensità del polo.
- I poli hanno natura scalare (hanno un intensità ed un segno ma non una direzione)

Campo Solenoidale

- Un campo la cui divergenza sia ovunque identicamente nulla si chiama campo **solenoidale.**
- In un campo solenoidale, le linee di flusso non hanno inizio né fine
- In particolare possono essere delle linee chiuse orientate
- La solenoidalità di un campo è assicurata solo dall'annullarsi della divergenza e non semplicemente del flusso. Infatti il flusso attraverso una superficie potrebbe anullarsi per effetto di più poli che si compensino.
- Se un campo ha divergenza non nulla esso non ha sorgenti scalari, ma può averne di vettoriali (per es. di dipolo) o tensoriali (per es. di quadrupolo)

Rotore di un campo vettoriale

- Usando la formula di Stokes con P=A_x, Q=A_y, R=A_z otteniamo:

$$\int_\ell A_x dx + A_y dy + A_z dz =$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos(n, X) + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos(n, Z) \right] dS$$

Se consideriamo dℓ un arco orientato della curva ℓ, l'integrando dell'integrale di linea corrisponde al prodotto scalare $\mathbf{A} \cdot d\ell$.

Possiamo introdurre un altro vettore, **rot A,** le cui componenti siano quelle fra parentesi tonde nell'integrale di superficie:

$$\mathbf{rot}\ \vec{\mathbf{A}} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{\mathbf{k}}$$

In tal modo la formula di Stokes può essere scritta come:

$$\oint_\ell \vec{\mathbf{A}} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S rot\ \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\ dS$$

Che si legge:*la circuitazione di **A** sul contorno ℓ della superficie S è uguale al flusso del rotore di **A** attraverso la superficie.*

Esempio di Rotore: la vorticità

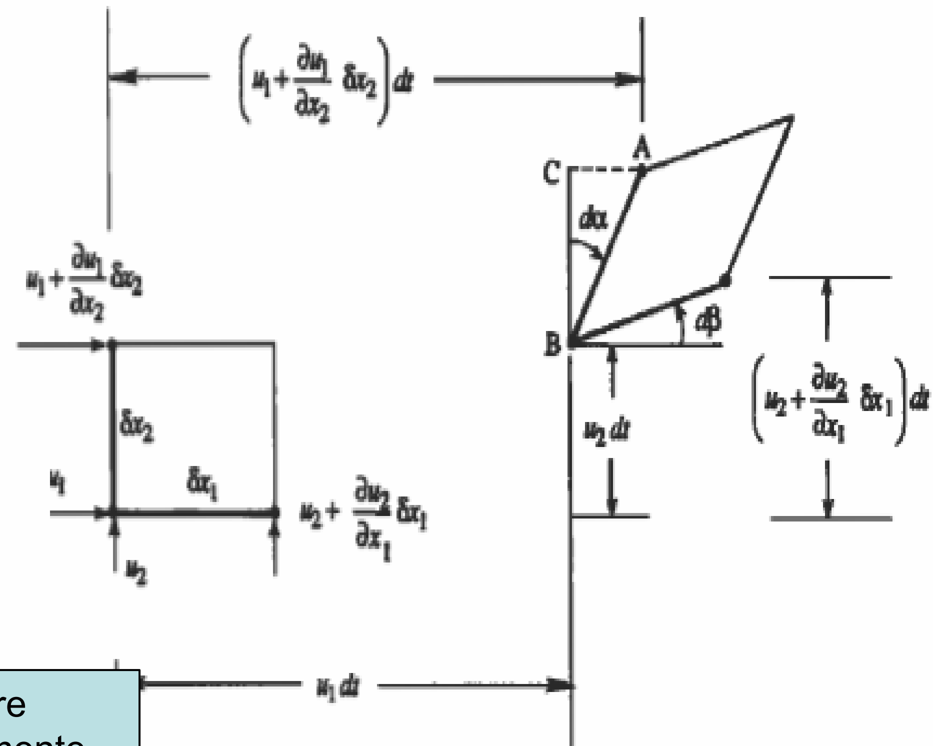
Calcoliamo la velocità angolare media dei due lati ortogonali all'inizio.

$$AB: \quad -\frac{d\alpha}{dt}$$

$$BE: \quad \frac{d\beta}{dt}$$

La velocità angolare media sarà: ½(-dα/dt+dβ/dt), e la vorticità attorno all'asse 3, due volte questo valore.

$$\omega_3 = \frac{1}{dt}\left\{\frac{1}{\delta x_2}\left(-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\delta x_2\, dt\right) + \frac{1}{\delta x_1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\delta x_1\, dt\right)\right\}$$
$$= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$



Deformazioni di un elemento di un fluido

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}} \quad \text{or} \quad \omega_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j},$$

Tensore completamente antismmetrico

Notazione vettoriale

- Le formule e le relazioni precedenti, possono essere scritte in modo semplificato mediante l'uso del vettore nabla, percedentemente definito e delle regole del calcolo vettoriale

$$
\begin{aligned}
&grad\,\Phi = \nabla\Phi \\
&div\,\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A} \\
&rot\,\mathbf{A} = \nabla\times\mathbf{A}
\end{aligned}
$$

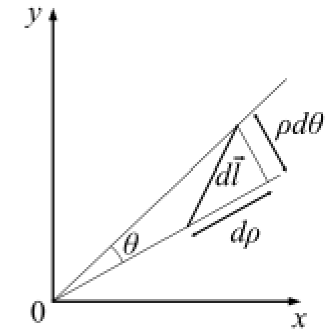
$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A}\times\mathbf{B}\times\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} \\
&\Rightarrow \nabla\times\nabla\times\mathbf{A} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} \\
&ovvero \\
&rot\,(rot\,\mathbf{A}) = grad\,div\,\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}
\end{aligned}
$$

$$
rot\,\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}
$$

Gradiente in Coordinate polari e sferiche

In $\mathbb{R}^2$ possiamo introdurre altri sistemi di riferimento come quello polare:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi \end{cases}$$



Dove ρ rappresenta la coordinata radiale, mentre φ rappresenta la coordinata angolare. Per calcolare il gradiente di una funzione

$$f = f(\rho;\phi)$$

basterà eseguire la trasformazione:

$$\nabla f(\rho;\phi) = \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial\rho} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial\rho} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)\mathbf{e}_y$$

Ricordando che:

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \mathbf{e}_y = \mathrm{sen}\,\phi\,\mathbf{e}_\rho + \cos\,\phi\,\mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{e}_x = \cos\phi\,\mathbf{e}_\rho - \mathrm{sen}\,\phi\,\mathbf{e}_\phi \end{array}$$

$$\nabla f(\rho;\phi) = \left(\cos\phi\frac{\partial f}{\partial\rho} - \frac{\mathrm{sen}\,\phi}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)(\cos\phi\,\mathbf{e}_\rho - \mathrm{sen}\,\phi\,\mathbf{e}_\phi) + \left(\mathrm{sen}\,\phi\frac{\partial f}{\partial\rho} + \frac{\cos\phi}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)(\mathrm{sen}\,\phi\,\mathbf{e}_\rho + \cos\phi\,\mathbf{e}_\phi)$$

$$\mathrm{grad}\ f(\rho,\phi) = \nabla f(\rho,\phi) = \frac{\partial f}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi$$

In coordinate Sferiche:

$$\begin{cases} x = \rho\ \mathrm{sen}\theta\ \cos\phi \\ y = \rho\ \mathrm{sen}\theta\ \mathrm{sen}\,\phi \\ z = \rho\ \cos\theta \end{cases}$$

$$\boxed{\mathrm{grad}\ f(\rho,\theta,\phi) = \nabla f(\rho,\theta,\phi) =}$$

$$\boxed{= \frac{\partial f}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\rho\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi}$$

Divergenza in coordinate curvilinee ortogonali

$$x = \varphi_1(q_1, q_2, q_3); \quad y = \psi_1(q_1, q_2, q_3); \quad z = \omega_1(q_1, q_2, q_3).$$

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2, \qquad ds_1 = H_1 dq_1; \quad ds_2 = H_2 dq_2; \quad ds_3 = H_3 dq_3,$$

$$dv = ds_1 ds_2 ds_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3.$$

$$\left.\begin{aligned} H_1^2 &= \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial q_1}\right)^2 \\ H_2^2 &= \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial q_2}\right)^2 \\ H_3^2 &= \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial q_3}\right)^2. \end{aligned}\right\}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{(v_1)\to M} \frac{\iint\limits_{(S_1)} A_n \, dS}{v_1}, \qquad \frac{\partial(H_2 H_3 A_{q_1})}{\partial q_1} dq_1 dq_2 dq_3.$$

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial(H_2 H_3 A_{q_1})}{\partial q_1} + \frac{\partial(H_3 H_1 A_{q_2})}{\partial q_2} + \frac{\partial(H_1 H_2 A_{q_3})}{\partial q_3}\right].}$$

Coordinate sferiche:

$$\begin{cases} x = \rho \ \operatorname{sen}\theta \ \cos\phi \\ y = \rho \ \operatorname{sen}\theta \ \operatorname{sen}\phi \\ z = \rho \ \cos\theta \end{cases}$$

$q_1 = r$, $q_2 = \theta$ and $q_3 = \varphi$. We find ds^2:

$$ds^2 = (\sin\theta\cos\varphi\, dr + r\cos\theta\cos\varphi\, d\theta - r\sin\theta\sin\varphi\, d\varphi)^2 +$$
$$+ (\sin\theta\sin\varphi\, dr + r\cos\theta\sin\varphi\, d\theta + r\sin\theta\cos\varphi\, d\varphi)^2 +$$
$$+ (\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta)^2, \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2,$$

$$H_1 = 1, \ H_2 = r, \ H_3 = r\sin\theta$$

$$\boxed{\nabla\cdot\mathbf{F} = \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 F_r}{\partial r} + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial \operatorname{sen}\theta F_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial F_\psi}{\partial\psi}\right]}$$

Operatore di Laplace in coordinate curvilinee ortogonali

A=grad U => div A=div grad U = ΔU

$$A_{q_1} = \lim_{\Delta s_1 \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta s_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial U}{\partial q_1}, \quad A_{q_2} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial q_2}; \qquad A_{q_3} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial U}{\partial q_3}.$$

Sostituendo nell'espressione della divergenza:

$$\Delta U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} \right) \right].$$

Equazione di Laplace in coordinate sferiche:

$$H_1 = 1,\ H_2 = r,\ H_3 = r \sin \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) = 0$$

or

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Se U non dipende dagli angoli (per es. U=GM/r):

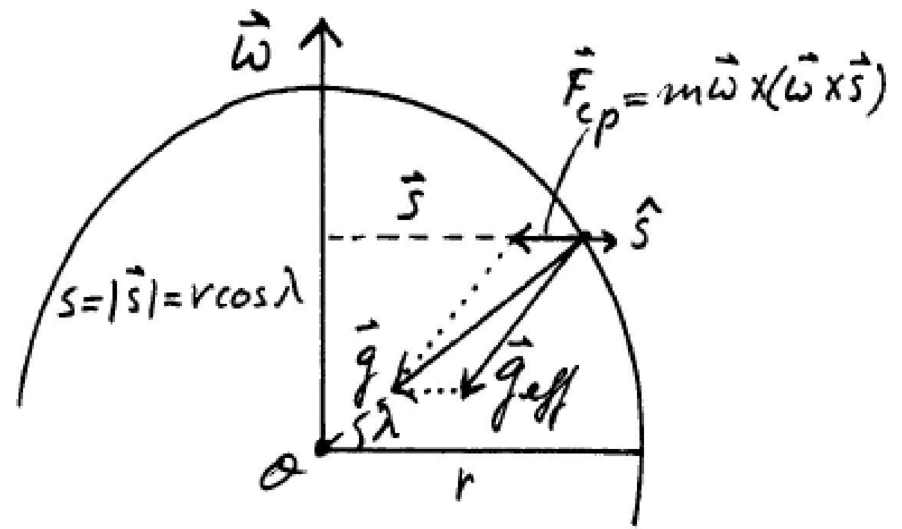
$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) = 0,$$

$$r^2 \frac{\partial U}{\partial r} = -C_1 \quad \text{or} \quad \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{C_1}{r^2}$$

Esempio: il potenziale gravitazionale

- È un potenziale centrale, per cui $U=U(r)=-GM/r$
- Sappiamo che la forza per unità di massa (l'accelerazione) è g (9.81 ms^{-2} per $r=R_T$).

$$g = \frac{\partial U}{\partial r} = -GM\,\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r} = \frac{GM}{r^2}$$

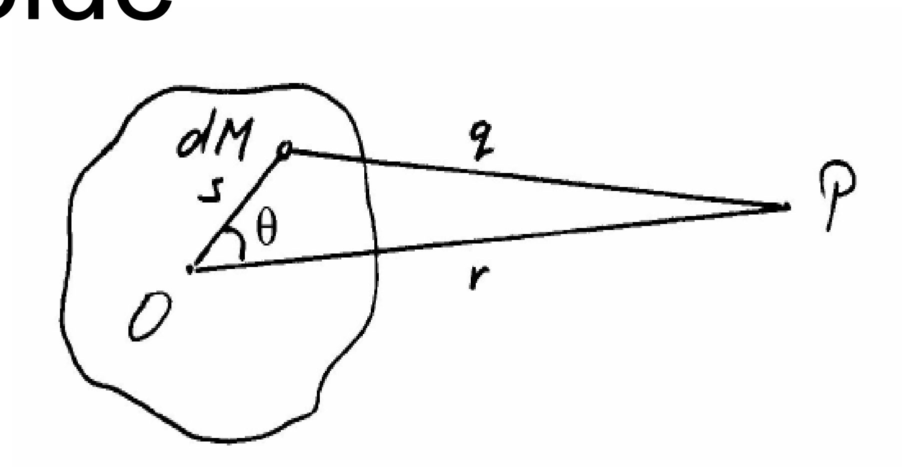


In realtà, però, la rotazione terrestre rende U=U(r, θ). Infatti, l'accelerazione centripeta dipende dalla latitudine λ del punto un cui si misura e va sottratta all'accelerazione gravitazionale

$$U_{\rm rot} = -\int r\omega^2\cos^2\lambda\,dr = -\frac{1}{2}r^2\omega^2\cos^2\lambda = -\frac{1}{2}r^2\omega^2\sin^2\theta$$

Il geoide

- Anche senza considerare la rotazione, il potenziale gravitazionale non è esattamente centrale, ma dipende dalla latitudine, perché la forma della terra non è esattamente sferica ma è un geoide. $dU = -\frac{G}{q}\,dM$



$q^2=s^2+r^2-2sr\cos\theta$

Sviluppando in serie:

$$\left[1+\left(\frac{s}{r}\right)^2-2\left(\frac{s}{r}\right)\cos\theta\right]^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{r}\right)^2 + \left(\frac{s}{r}\right)\cos\theta+\frac{3}{2}\left(\frac{s}{r}\right)^2\left(\cos^2\theta\right)$$

$$dU=-\frac{GdM}{r\left(1+\left(\frac{s}{r}\right)^2-2\left(\frac{s}{r}\right)\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}}$$

E dunque:

$$U(P) = \int_V dU = -\frac{G}{r}\int dM - \cancel{\frac{G}{r^2}\int s\cos\theta\,dM} - \frac{G}{2r^3}\int s^2\left(3\cos^2\theta-1\right)\,dM$$

$$\mathbf{g} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial r},\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\lambda}\right)$$