Complemento

Serie e trasformate di Fourier

Definizione

Sia f(x) una funzione definita nell'intervallo
$-\pi<x<\pi$. Diremo che f(x) può essere sviluppata in serie di Fourier se:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

converge.

Integrando ambo i membri tra $-\pi$ e π e tenendo conto delle simmetrie di sin(x) e cos(x), otteniamo un'espressione per a_0

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

I termini a_n e b_n si ottengono moltiplicando rispettivamente per cos(mx) e sin(mx) ed integrando. Si ottiene:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)dx$$

Funzioni definite in un intervallo arbitrario

Se f(x) è definita nell'intervallo c-d<x<c+d:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi(x+c)}{d}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi(x+c)}{d}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{d}\int_{c-d}^{c+d} f(x) \cos\left(\frac{n\pi(x+c)}{d}\right)\,\mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{1}{d}\int_{c-d}^{c+d} f(x) \sin\left(\frac{n\pi(x+c)}{d}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Serie seno e serie coseno

- Se la funzione f(x) è pari, cioè se f(x)=f(-x), allora esiste solo la somma contenente I termini cos(nx)
- Parimenti, se è dispari: f(x)=-f(-x), sopravvivono solo I termini contenenti sin(nx)

Rappresentazione con gli esponenziali complessi

Utilizzando le espressioni di sin(nx) e cos(nx) in funzione di e^{ix} ed e^{-ix} si ha:

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{inx}+\mathrm{e}^{-inx})+b_n\frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{inx}-\mathrm{e}^{-inx})\right)\\ &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}(a_n-ib_n)\,\mathrm{e}^{inx}+\frac{1}{2}(a_n+ib_n)\,\mathrm{e}^{-inx}\right)\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\,\mathrm{e}^{inx}\end{aligned}$$

$$c_n=\begin{cases}\frac{1}{2}(a_n-ib_n) & \text{for } n\geq 1\\ \frac{a_0}{2} & \text{for } n=0\\ \frac{1}{2}(a_{-n}+ib_{-n}) & \text{for } n\leq -1.\end{cases}$$

Esempio: la funzione gradino

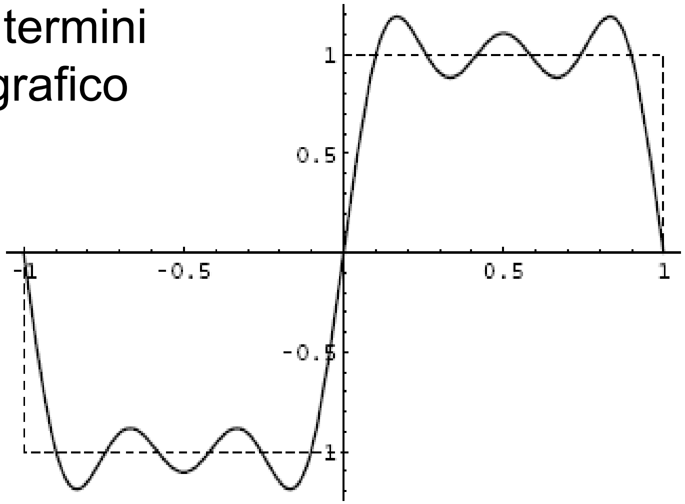
Consideriamo la funzione onda quadra:

$$f_1(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } -1 < x < 0 \\ 1, & \text{for } 0 < x < 1. \end{cases}$$

È dispari, quindi sopravvive solo la serie di sin(nx)

$$\begin{aligned} b_n &= 2\int_0^1 \sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\left[\frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi x)\right]_0^1 \\ &= 2\left(-\frac{(-1)^n}{n\pi} - \frac{-1}{n\pi}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{for odd } n \\ 0 & \text{for even } n. \end{cases} \end{aligned}$$

Sommando i primi tre termini si ottiene il seguente grafico



Proprietà dei coefficienti di Fourier

- Enunciamo senza dimostrazione una proprietà notevole dei coefficienti di Fourier:
  – Se $f(x)$ è discontinua, i coefficienti di Fourier saranno $O(1/n)$, se sono continue le derivate $f'(x)$, $f''(x)$, …, $f^{(k-2)}(x)$, i coefficienti saranno di ordine $O(1/n^k)$

Condizioni per la convergenza

- La funzione x(t) deve essere *assolutamente integrabile* su un periodo:

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|dt < \infty$$

Questo garantisce che tutti i coefficienti siano finiti, infatti:

$$|a_k| = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)e^{-ik\omega_0 t}|\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|\,dt$$

Che, se è vera la prima condizione, implica: $|a_k|<\infty$

Esempio di funzione che non rispetta la prima condizione:

x(t)=1/t; 0<t≤1

- La funzione *x(t)* deve essere avere un numero finito di massimi e minimi in un periodo.
- x(t) deve avere un numero finito di discontinuità in ogni intervallo finito e ciascuna di queste deve essere finita.

Trasformata di Fourier

Si è visto che la f(x) può essere rappresentata in termini di esponenziali complesse:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{\pi}{L} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/L}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi x/L} f(x)\, \mathrm{d}x \qquad \omega_n = n\pi/L$$

Nel limite per L→∞

$$f(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\, \mathrm{d}\omega$$

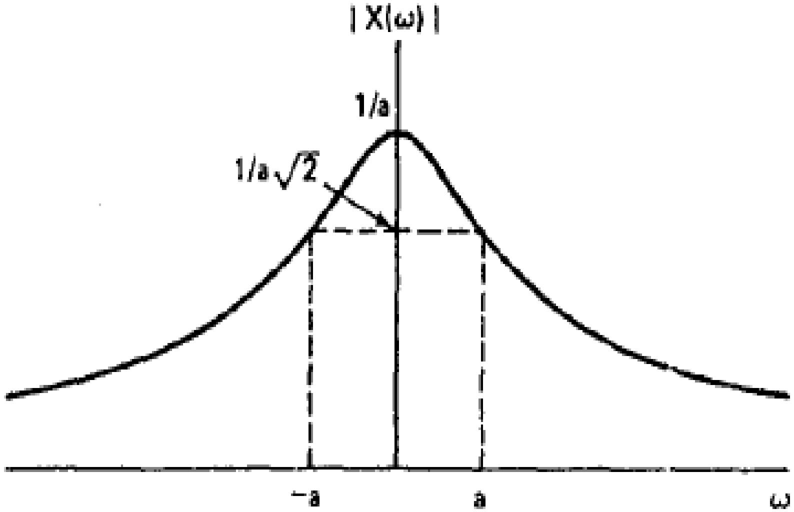
$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\, \mathrm{d}x.$$

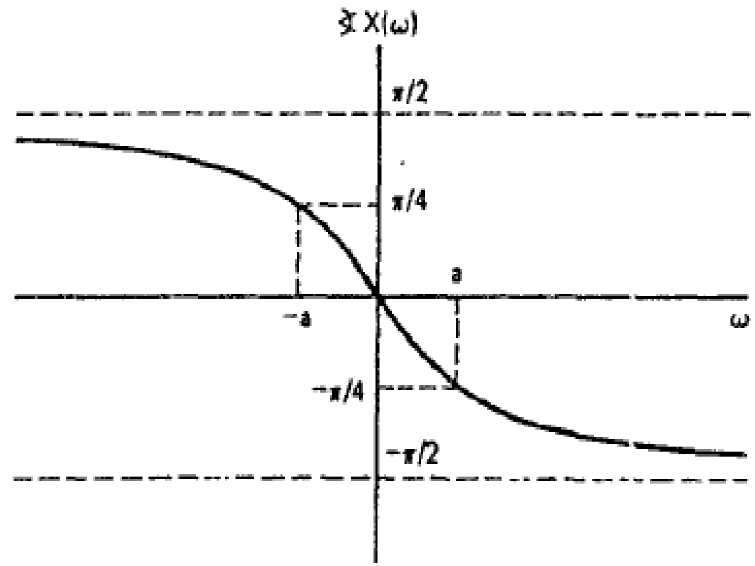
La funzione $\hat{f}(\omega)$ è la trasformata di Fourier di f(x)

Esempi di trasformata di Fourier

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$ Essendo *u(t)* il gradino unitario

$$X(\omega) = \int_0^\infty e^{-at}e^{-i\omega t}dt = -\frac{1}{a+i\omega}e^{-(a+i\omega t)}\Big|_0^\infty = \frac{1}{a+i\omega}$$



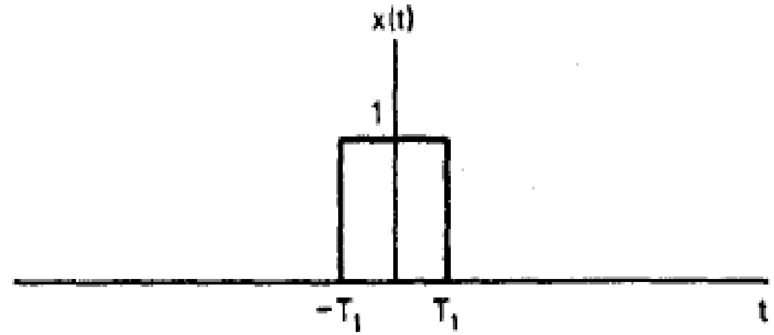


Esempi di trasformata di Fourier

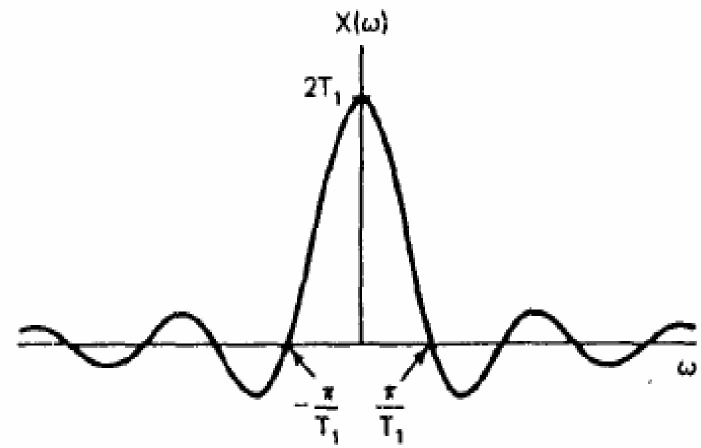
$$x(t) = \delta(t)$$

$$X(\omega) = \int_0^\infty \delta(t) e^{-i\omega t} dt = 1$$

La δ ha uguali contributi a tutte le frequenze



$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$



$$X(\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-i\omega t} dt =$$

$$= -\frac{1}{i\omega}\left(e^{-i\omega T_1} - e^{i\omega T_1}\right) = 2\frac{\sin(\omega T_1)}{\omega}$$

Proprietà delle trasformate di Fourier

- Relazione di chiusura: analogamente a quanto accade in algebra per due vettori ortonormali, per cui:

$$\sum_i \sum_j v_i v^j = \delta_i^j$$

Esiste una relazione analoga per le trasformate di Fourier:

$$\boxed{\delta(x-\xi) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-\xi)} \, \mathrm{d}\omega.}$$

Dove si è introdotta la funzione delta di Dirac

$$\delta(x-\xi) = \begin{cases} 0 & x \neq \xi \\ \infty & x = \xi \end{cases}$$

Proprietà delle trasformate

- Proprietà di shifting: $F\{x(t-t_0)\} = e^{-i\omega t_0} X(\omega)$
- Proprietà di scaling: $F\{x(at)\} = \dfrac{1}{|a|} X\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$
- Differenziazione ed integrazione:

$$F\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = i\omega\, X(\omega)$$

$$F\left(\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right) = \frac{1}{i\omega} X(\omega) + \pi\, X(0)\delta(\omega)$$

Proprietà delle trasformate 2

- Relazione di Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, x(t) \,|^2 \; dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\, X(\omega) \,|^2 \; d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, x(t) \,|^2 \; dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) x(t) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right] dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) X(\omega) d\omega$$

Spettro di una funzione

- Si chiama **spettro** di una funzione, l’andamento delle ampiezze dei coefficienti di Fourier in funzione della frequenza, o, nel continuo, l’andamento della trasformata di Fourier o, più spesso, della PSD (vedi sotto).
- Si chiama densità di potenza spettrale (power spectral density - PSD) l’integrale:

$$I(\omega) = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \right|^2 = F(\omega) F^*(\omega)$$

Spettro di una sequenza di impulsi

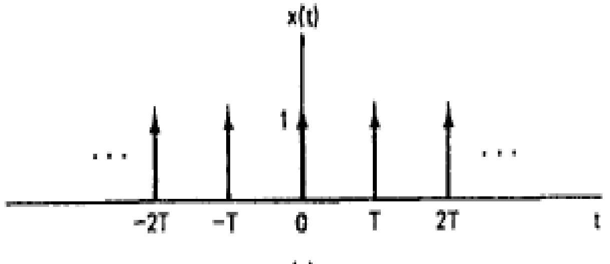
Sia il segnale x(t) la sovrapposizione di impulsi ad intervalli T.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

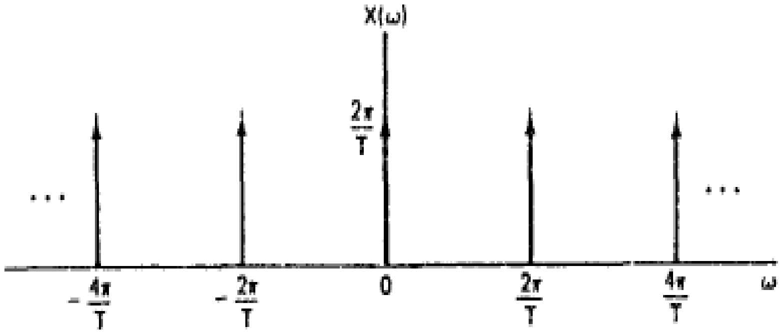
I coefficienti di Fourier di x(t) saranno:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-ik\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

$$\Rightarrow X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right)$$



(a)



Convoluzione

- Si definisce prodotto di convoluzione (folding) di due funzioni x(t) e h(t) l'integrale:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

h(t) è la ***risposta all'impulso*** di un sistema

$$\Rightarrow Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right]e^{i\omega t}dt =$$

Shifting

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{i\omega t}dt\right]}_{H(\omega)e^{-i\omega\tau}}d\tau = H(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau =$$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

H(ω) è la ***risposta in frequenza***

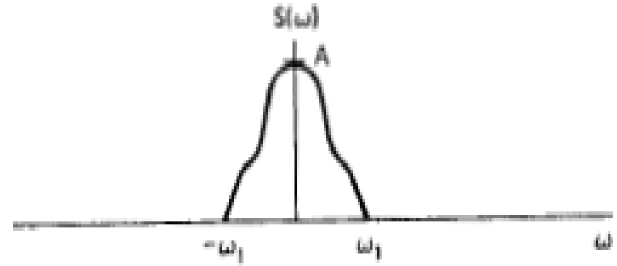
Modulazione

- La proprietà di convoluzione stabilisce che la convoluzione nel tempo corrisponde alla moltiplicazione nella frequenza.
- Per dualità la trasformata del prodotto di due funzioni *x(t)* e *y(t)*:

$$r(t) = x(t)\,y(t)$$

$$F\{r(t)\} \equiv R(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X(\omega) * Y(\omega)\right]$$

Dunque la moltiplicazione dei due segnali può essere pensata come la *modulazione in ampiezza* di un segnale con l'altro:

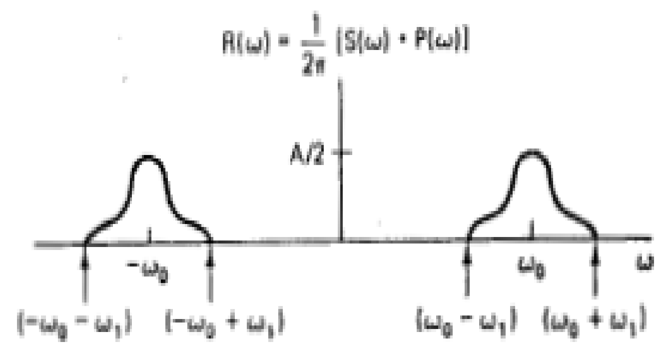


Esempio: sia s(t) un segnale con spettro S(ω), e sia $p(t)=\cos(\omega_0 t)$

$P(\omega)=\pi\delta(\omega - \omega_0)+ \pi\delta(\omega + \omega_0)$

Se r(t)=s(t)p(t), allora

$$R(\omega)=\frac{1}{2\pi}S(\omega)*P(\omega)=\frac{1}{2}\left[S(\omega-\omega_0)+S(\omega+\omega_0)\right]$$



Campionamento

- Campionare un segnale ad intervalli regolari equivale a moltiplicare il segnale s(t) con un treno di impulsi equispaziati

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

$$r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t)\delta(t - kT)$$

$$R(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(S(\omega) * P(\omega)\right) =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega) * \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right) =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} S\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right)$$