Lezione 11: Introduzione alla probabilità

Corso di Statistica
Facoltà di Economia
Università della Basilicata

Prof. Massimo Aria

- aria@unina.it

Alcuni concetti primitivi della probabilità

Si introducono i Concetti Primitivi e la loro reciproca relazione:

"la Prova genera l'Evento con una certa Probabilità"

Prova: è un esperimento soggetto a incertezza e può suddividersi in sottoprove.

Evento: è uno dei possibili risultati della prova e costituisce un insieme di descrizioni circa i possibili risultati dell'esperimento.

L'insieme di tutti i risultati possibili di una prova prende il nome di **Spazio Campionario** e si indica con il simbolo $\boldsymbol{\Omega}$.

Tipologia e algebra degli eventi

Tipologia di eventi:

•***Eventi compatibili***: si dicono compatibili due eventi che possono verificarsi contemporaneamente.

•***Eventi equiprobabili***: sono eventi che hanno pari probabilità di verificarsi.

Algebra degli eventi:

• ***Unione (o somma logica) di due eventi A e B*** (simbolo U): è l'evento "si verifica A oppure B oppure entrambi"

• ***Intersezione (o prodotto logico) di due eventi A e B*** (simbolo U capovolta): è l'evento "si verificano A e B contemporaneamente"

• ***Negazione di un evento A*:** è quell'evento che si verifica allorché non si verifica A

Introduzione alla probabilità

La **Probabilità** è un concetto che viene usato in molte discipline e che è ormai entrato a far parte del linguaggio corrente in quanto usualmente si devono prendere decisioni che, anche dopo aver esaminato le informazioni disponibili, vengono maturate in condizioni di incertezza.

Nonostante ciò è difficile dare un'interpretazione, e quindi una definizione, di probabilità che sia completamente soddisfacente ed esente da critiche.

Infatti la probabilità è un *concetto primitivo*, cioè originario per l'essere umano perché innato e sempre presente nelle sue regole di comportamento.

Nel seguito si illustreranno le definizioni di probabilità storicamente fornite dalle diverse scuole di pensiero: la scuola classica, la scuola frequentista e la scuola soggettivista.
Successivamente si tratterà poi la definizione assiomatica della probabilità.

Definizione classica della probabilità

Scuola Classica:
La probabilità è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli al verificarsi di un risultato e il numero totale dei possibili risultati, ammesso che questi siano egualmente possibili.

Questa definizione presuppone:
- la *conoscenza di tutti i possibili casi* che possano verificarsi, e che quindi il numero di questi casi sia finito
- la *equiprobabilità di tutti i casi.*

Alcune osservazioni critiche:
- la definizione di probabilità si fonda sul concetto di equiprobabilità (presupponendo quindi la conoscenza del concetto di probabilità che invece si intende definire)
- essa trova applicazione solo in esperimenti noti nelle loro caratteristiche (casi noti e finiti, ecc.) e i cui eventi siano equiprobabili

Definizione frequentista della probabilità

Scuola Frequentista:
la probabilità è il limite della frequenza relativa di un evento ripetibile quando cresce, oltre ogni limite, il numero delle prove.

In altre parole la probabilità è pari alla frequenza relativa dei successi quando si ripete la prova all'infinito.

Questa definizione presuppone:
- la *ripetibilità della prova all'infinito* nelle stesse condizioni

Alcune osservazioni critiche:
- la prova non è sempre ripetibile per ragioni tecniche, economiche, ecc.

Definizione soggettivista della probabilità

Scuola Soggettivista:
la probabilità rappresenta il grado di fiducia che un individuo coerente attribuisce al presentarsi di un evento, ovvero, per quantificare, come la somma *p* che è disposto a scommettere quando, verificandosi l'evento, vince 1.

Per individuo coerente (o razionale) si intende un individuo che, nell'ottica di poter vincere 1, è disposto a scommettere una somma *p* non superiore a 1.
Inoltre egli scommetterà una cifra maggiore quanto più alta sarà la fiducia che l'evento si verifichi.

Alcune osservazioni critiche:
- Tale definizione comporta l'individuazione di una misura di probabilità che, data una stessa prova, muta al variare dell'individuo considerato.

Teoria assiomatica della probabilità

Lo studioso Kolmogorov propone una teoria della probabilità basata sulla individuazione di alcuni assiomi (o postulati) dai quali si dimostrano una serie di teoremi.

Un **assioma** è un'affermazione che non si dimostra in quanto principio di base universalmente accettato.

La teoria assiomatica si fonda su tre momenti fondamentali:

- l'*individuazione dei concetti primitivi* di prova, evento e spazio così come definiti in precedenza;
- l'*enunciazione degli assiomi* (o postulati) della probabilità;
- la *dimostrazione dei teoremi* mediante i postulati e con l'ausilio della logica e della matematica.

Postulati della probabilità

I°) Positività:
La Probabilità di un evento A è un numero unico maggiore o uguale di 0: **P(A)≥0**.

II°) Certezza:
La Probabilità dell'evento certo e quindi dello Spazio Campionario Ω è sempre 1: P(I)=P(Ω)=1.
(dove con "I" si indica un evento certo)

III°) Unione:
Siano A e B due eventi incompatibili,
allora la probabilità della loro unione è la somma delle singole probabilità di A e B.

NB.
Dal primo e secondo assioma si deduce che la probabilità di un evento A è sempre compresa tra 0 e 1.

Postulati della Probabilità

Positività $P(A) \geq 0$

Certezza $P(I) = P(\Omega) = 1$

$\rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$

$A \cap B = \emptyset \leftarrow$ Eventi incompatibili

Unione $\Downarrow$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

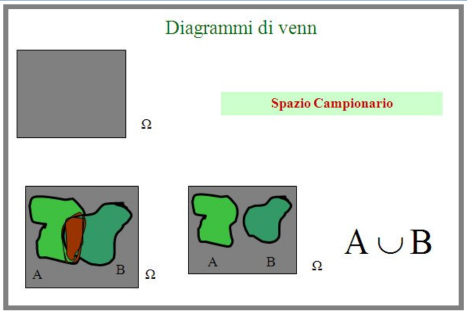
Postulati della probabilità

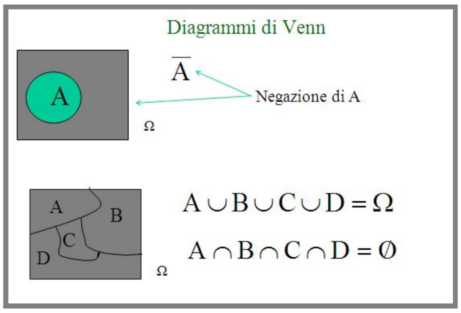
Diagrammi di Venn

Le relazioni dell'algebra degli eventi vengono illustrate su un piano mediante grafici caratteristici detti **Diagrammi di Venn**.

In questi diagrammi lo spazio campionario viene disegnato come un rettangolo all'interno del quale vengono posti insiemi chiusi che rappresentano gli eventi.

Non interessa l'esatto contorno, quanto piuttosto le mutue relazioni fra di essi e con lo spazio campionario.





Teoremi fondamentali della probabilità

I°) Probabilità dell'evento impossibile
La probabilità dell'evento impossibile è pari a 0.

II°) Probabilità dell'evento negazione
Dato un evento A, la probabilità dell'evento negazione di A è pari al complemento a 1 della probabilità di A.

III°) Probabilità totali
Dati due eventi A e B, la probabilità dell'unione di A e B è pari alla somma delle singole probabilità dei due eventi meno la probabilità dell'intersezione.

Quest'ultimo teorema generalizza il concetto dell'unione per eventi compatibili.

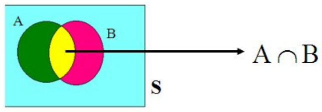
I Teoremi Fondamentali

1) $P(\emptyset) = 0$

2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Teorema delle Probabilità Totali

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



Teoremi della probabilità

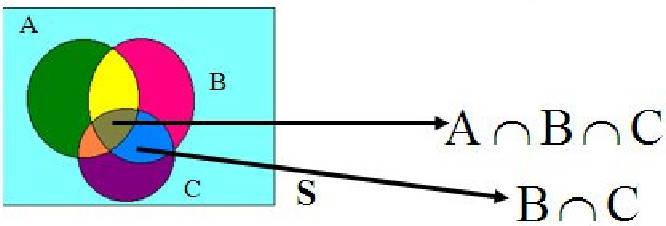
Teorema delle probabilità totali per 3 eventi

Generalizzazione del teorema della probabilità totale al caso di 3 eventi

$$P(A \cup B \cup C) =$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) -$$

$$- P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$



Probabilità condizionata

Si definisce **probabilità condizionata** la probabilità di un evento B condizionata al verificarsi di un evento A.

P(B|A) "*Probabilità dell'evento B dato che si è verificato l'evento A*"

Teorema della probabilità condizionata

La probabilità condizionata dell'evento B dato A è pari *al rapporto tra la probabilità dell'intersezione di A e B e la probabilità dell'evento A.*

Probabilità Condizionata

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

da cui deriva che la probabilità dell'intersezione è pari a:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \bullet P(B) = P(A) \bullet P(B|A)$$

Probabilità condizionata

Probabilità condizionata

Due eventi A e B si dicono **stocasticamente indipendenti** quando il verificarsi dell'uno non modifica la probabilità del verificarsi dell'altro evento.

Formalmente si definiscono indipendenti due eventi per cui:

*P(A intersezione B)=P(A)*P(B);*

oppure

P(B|A)=P(B);

Indipendenza Stocastica

- Due Eventi A e B sono Stocasticamente Indipendenti se:

$$P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B)$$

oppure

$$P(A|B) = P(A)$$

Definizione di eventi indipendenti

Teorema di Bayes

Il **teorema di Bayes**, proposto da Thomas Bayes nel 1763, deriva da due teoremi fondamentali quello delle probabilità condizionate e quello delle probabilità totali.

Il teorema, in presenza di una serie di eventi H_i ognuno caratterizzato da una probabilità (prob. a priori) e di evento E incluso nello spazio degli H_i (condizionato dagli eventi H_i con diverse probabilità, le *verosimiglianze*), consente di pervenire al calcolo delle probabilità a posteriori attraverso una particolare interpretazione del ruolo giocato dalle verosimiglianze e dalle prob. a priori.

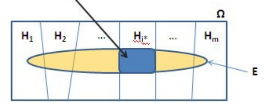
In tempi recenti, grazie alla scuola soggettivista, si è sviluppato un importante filone della teoria delle decisioni che prende il nome di *statistica bayesiana*.

Per illustrare il teorema nel seguito si presenta un tipico esempio in cui trova applicazione la *filosofia bayesiana*.

Siano $H_1, H_2, \ldots, H_m$ un insieme di eventi che costituisco una partizione dello spazio Ω
Allora per qualsiasi evento E incluso in Ω, la probabilità di $H_{i^*}|E$ è:

Prob. a posteriori *Prob. a priori* *Verosimiglianze*

$$P(H_{i^*} | E) = \frac{P(H_{i^*}) \cdot P(E | H_{i^*})}{\sum_{i=1}^{m} P(H_i) \cdot P(E | H_i)} = \frac{P(H_{i^*}) \cdot P(E | H_{i^*})}{P(E)}$$



Le quantità al numeratore sono rapportate alla somma delle probabilità [P(E)] così che le probabilità a posteriori rispettino gli assiomi della probabilità.
Infatti l'evento E diventa il nuovo spazio campionario delle probabilità a posteriori e quindi la loro somma deve necessariamente essere pari a 1 (secondo assioma)

Formulazione del teorema di Bayes

Esempio del teorema di Bayes

Supponiamo che un medico sappia che un certo sintomo E (ad esempio una febbre altissima) possa essere l'effetto associato a tre possibili malattie H_1, H_2, H_3, con probabilità condizionate $P(E|H_1)$, $P(E|H_2)$, $P(E|H_3)$.

Queste probabilità esprimono rispettivamente la probabilità che si manifesti l'evento E (la febbre altissima) dato che il paziente abbia contratto la malattia H_1 oppure H_2 oppure H_3. Esse sono anche dette **verosimiglianze**.

Si immagini che le verosimiglianze siano pari a: $P(E|H_1)=0,90$ $P(E|H_2)=0,10$ $P(E|H_3)=0,30$

Nella formulazione della diagnosi di un paziente, il medico non può fermarsi alla valutazione di queste probabilità. Infatti se così facesse egli dovrebbe dedurre che il paziente che presenta sintomi E è sicuramente affetto dalla malattia H_1 (in quanto la verosimiglianza è più alta, coloro che sono affetti da H_1 nel 90% dei casi presentano il sintomo E).

In realtà il medico deve anche considerare il fatto che le malattie hanno differenti probabilità di verificarsi (in considerazione del luogo in cui ci si trova, della rarità della patologia, ecc.). Una malattia come la malaria potrebbe essere molto frequente in Africa, ma la probabilità che ne sia affetto un paziente italiano risulta invece molto remota.

Quindi si immagini che le tre malattie abbiano le seguenti probabilità di presentarsi nella popolazione di interesse: $P(H_1)=0,03$ $P(H_2)=0,70$ $P(H_3)=0,27$

Esse prendono il nome di **probabilità a priori**.

Considerando ancora la patologia H_1 essa risulta essere una malattia rara (solo il 3% dei casi). Per cui pur avendo una elevata verosimiglianza, il medico deve pesare questa misura rispetto alla probabilità che la malattia sia presente in un paziente.

Questa probabilità pesata prende il nome di **probabilità a posteriori** ed è calcolata secondo la formulazione del teorema di Bayes.

$$P(H_1|E) = \frac{P(H_1) \cdot P(E|H_1)}{\sum P(H_i) \cdot P(E|H_i)} = \frac{0,03 \cdot 0,90}{(0,03 \cdot 0,90) + (0,70 \cdot 0,10) + (0,27 \cdot 0,30)} = 0,15169$$

$$P(H_2|E) = \frac{P(H_2) \cdot P(E|H_2)}{\sum P(H_i) \cdot P(E|H_i)} = \frac{0,70 \cdot 0,10}{(0,03 \cdot 0,90) + (0,70 \cdot 0,10) + (0,27 \cdot 0,30)} = 0,39326$$

$$P(H_3|E) = \frac{P(H_3) \cdot P(E|H_3)}{\sum P(H_i) \cdot P(E|H_i)} = \frac{0,27 \cdot 0,30}{(0,03 \cdot 0,90) + (0,70 \cdot 0,10) + (0,27 \cdot 0,30)} = 0,45505$$

Per cui il medico propenderà per la diagnosi della patologia H_3 che presenta la più alta probabilità condizionata alla presenza di un certo sintomo E !!!.

Nella prossima lezione

Nella prossima lezione si affronteranno i seguenti argomenti:

- le variabili casuali
- le caratteristiche delle variabili casuali
- i momenti delle variabili casuali