

Lezione 14: Variabili Casuali continue

Corso di Statistica
Facoltà di Economia
Università della Basilicata

Prof. Massimo Aria

- aria@unina.it

variabile casuale **Uniforme Continua**

Si definisce v.c. **Uniforme Continua**, la variabile X che assume valori in un intervallo continuo di estremi $[a,b]$, dove a e b sono numeri reali.

La funzione di densità Uniforme è definita come:

$$f(x) = 1/(b-a) \quad \text{se } a \leq x \leq b$$

mentre $f(x)$ è nulla altrove.

La v.c. Uniforme Continua si indica con

$$X \sim U(a,b)$$

Analogamente a quella discreta, la v.c. uniforme continua modella una prova in cui la probabilità di ogni evento (in questo caso in numero non finito) è costante.

Tale v.c. si ritrova solitamente in esperimenti artificiali per la semplicità della sua formulazione. Si pensi ad esempio al rotolamento di una pallina perfettamente sferica in cui la prova consiste nel verificare dove essa si arresterà in un dato spazio.

La v.c. Uc è simmetrica, non presenta moda e possiede media e varianza pari a:

$$E(X) = (a+b)/2 \quad \text{Var}(X) = (b-a)^2/12$$

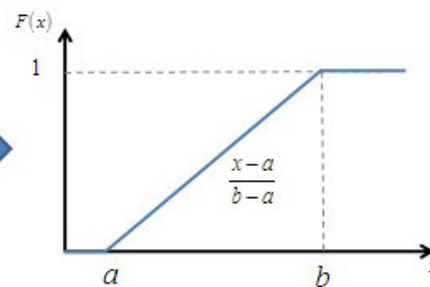
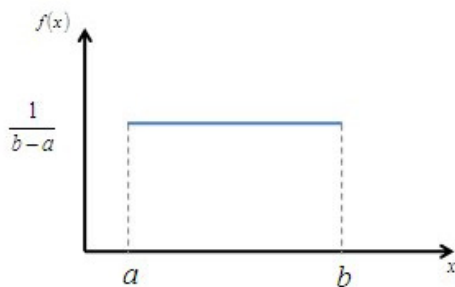
Funzione di densità e ripartizione della Uniforme

Funzione di densità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione di ripartizione

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{per } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{per } x \geq b \end{cases}$$



variabile casuale Normale

La v.c. Normale è certamente la v.c. più importante per le sue innumerevoli applicazioni e le rilevanti proprietà di cui gode.

Molti fenomeni reali si manifestano con una distribuzione empirica che si approssima molto bene con una funzione di densità normale.

La v.c. normale è detta anche *Gaussiana* in quanto venne utilizzata per la prima volta dal matematico Gauss.

Essa si indica con

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

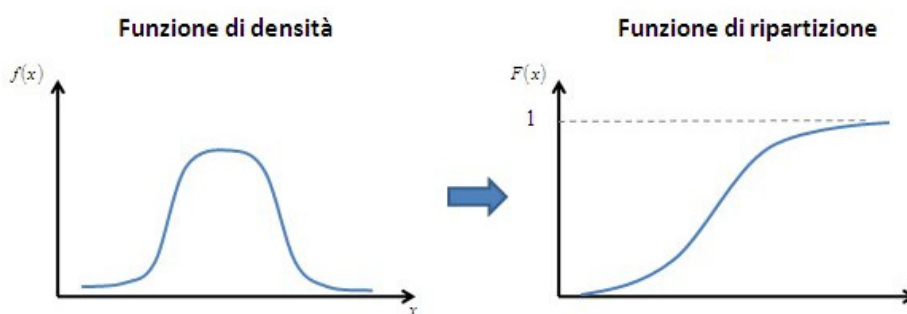
Infatti esprime la densità di probabilità di un esperimento sulla base di due parametri, la media e la varianza della v.c.

Funzione di densità e ripartizione della Normale

v.c. Normale

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

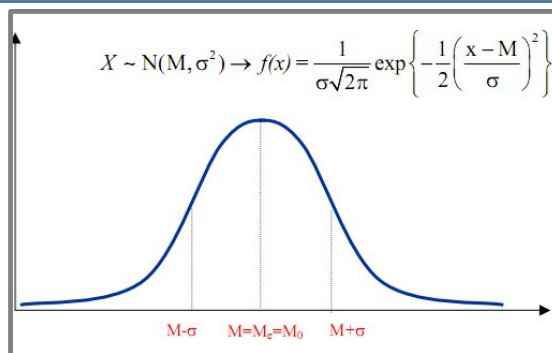
per ogni x tale che $-\infty < x < +\infty$



Proprietà della Normale

La v.c. Normale gode delle seguenti proprietà:

- è simmetrica rispetto alla media
- ha forma campanulare
- dipende da due parametri, la media μ e la varianza σ^2
- la funzione di densità è massima in corrispondenza della media
- Ha due punti di flesso in corrispondenza dei valori $\mu-\sigma$ e $\mu+\sigma$
- è asintotica rispetto all'asse delle ascisse
- una trasformazione lineare di v.c. normali è ancora una v.c. normale
- la somma di due v.c. normali indipendenti è ancora una v.c. normale con media e varianza pari, rispettivamente alla somma delle medie e alla somma delle varianze delle due v.c. normali



Simmetria della v.c. normale

I parametri della v.c. normale

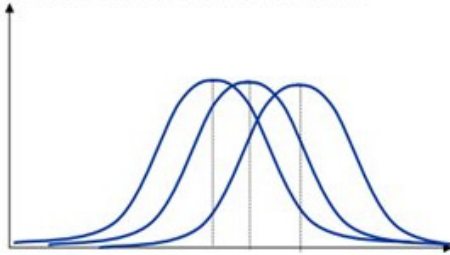
La curva normale dipende dalla media e dalla varianza

Esistono quindi infinite curve normali.

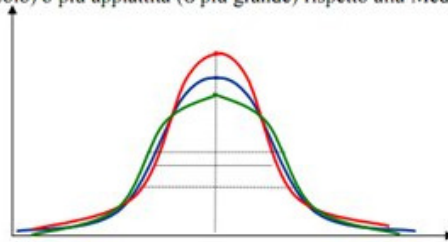
Per ogni variazione dei valori di media e varianza, la curva muta nella forma.

In particolare:

- al variare di μ subisce traslazioni orizzontali



- al variare di σ la curva assume forma più appuntita (σ più piccolo) o più appiattita (σ più grande) rispetto alla Media



v.c. Normale Standardizzata

Come visto in precedenza, la curva normale dipende da due parametri, media e varianza.

Da ciò si deduce che esistono infinite v.c. normale in quanto sono infinite le coppie (μ, σ^2) che possono considerarsi.

Per calcolare la probabilità che una v.c. Normale assuma valori in un intervallo $[a, b]$ bisognerebbe quindi integrare la funzione di densità tra a e b rispetto ai parametri (μ, σ^2) .

Il concetto di standardizzazione viene in aiuto nel calcolo della probabilità di una normale.

Infatti standardizzando è possibile ridurre l'infinità di curve normale ad un'unica funzione standardizzata con parametri $(\mu=0, \sigma^2=1)$.

I valori di probabilità sono tabulati, quindi una volta standardizzata la curva è possibile individuare in apposite tabelle i valori di interesse (senza ricorrere al calcolo dell'integrale).

v.c. Normale Standardizzata

$$\text{Se } \mu = 0 \text{ e } \sigma^2 = 1 \Rightarrow N(\mu, \sigma^2) = Z(0,1)$$

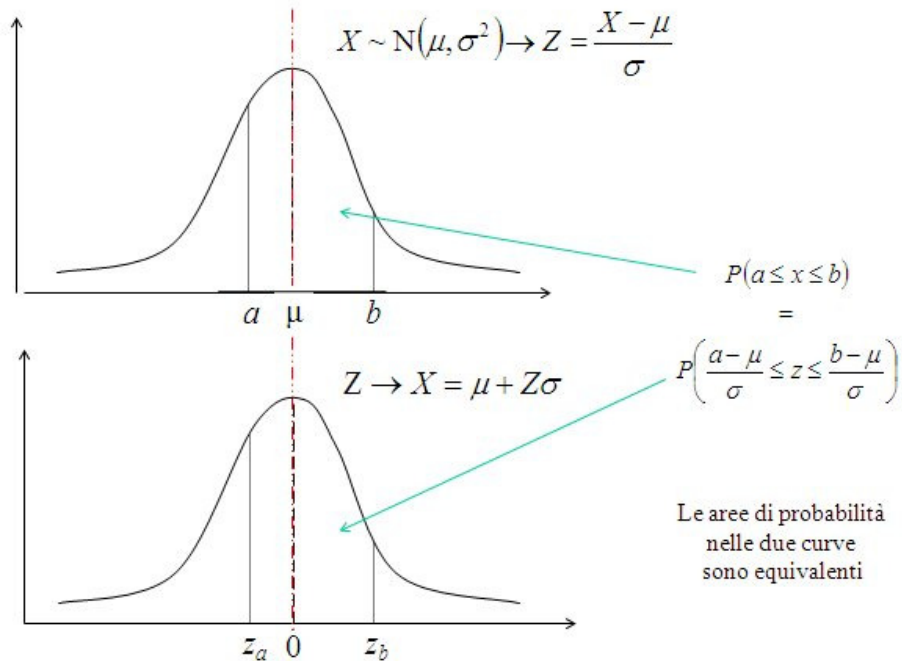
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad -\infty \leq z \leq +\infty$$

Relazione tra $N(\mu, \sigma^2)$ e $Z(0,1)$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad X = \mu + Z\sigma$$

v.c. normale standardizzata

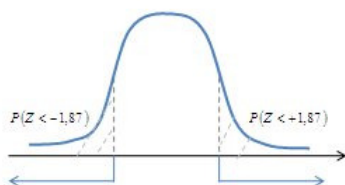
Relazione tra curva normale e standardizzata



Esempio: calcolo della probabilità di una normale

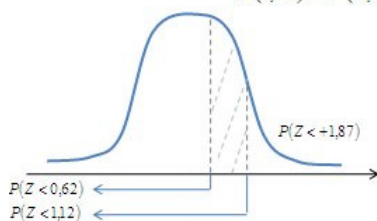
Sia X un v.c., che rappresenta il numero di visitatori che visitano un museo, e che si distribuisce come una normale avente media 180 e varianza 64. Si calcoli la probabilità che:

a) X sia minore 165 $P(X < 165) = P\left(z < \frac{165 - 180}{8}\right) = P(Z < -1,87) = P(Z < +1,87)$



Per la proprietà della **simmetria**

b) X sia minore 165 $P(185 < X < 189) = P(0,62 < Z < 1,12) = F(1,12) - F(0,62) = P(Z < 1,12) - P(Z < 0,62) = 0,8686 - 0,7324 = 0,1362$



Differenza tra le funzioni di ripartizione

v.c. notevoli derivate dalla normale

Dalla v.c. Normale è possibile derivare ulteriori variabili casuali che, per il loro impiego nella statistica inferenziale, assumono un notevole interesse.

Si fa riferimento in particolare alle seguenti variabili casuali:

- v.c. Chi quadrato
- v.c. T di Student
- v.c. F di Fisher

v.c. Chi quadrato

La v.c. Chi quadrato X^2 è una distribuzione asimmetrica, continua e definita per valori reali non negativi.

La funzione di densità dipende da un unico parametro chiamato *gradi di libertà*, un intero positivo indicato con la lettera v .

La v.c. X^2 può definirsi come *la somma di v variabili casuali normali standardizzate al quadrato*.

Per valori di v elevati ($v \geq 80$ è un valore sufficiente), la v.c. Chi quadrato si approssima ad una v.c. normale.

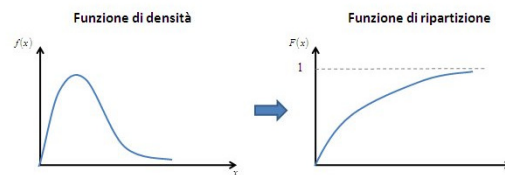
La v.c. X^2 ha media e varianza pari a:

$$E(\mathbf{X})=v$$

$$\mathbf{Var}(\mathbf{X})=2v$$

v.c. Chi Quadrato χ^2

$$X = \sum_{i=1}^v Z_i^2 \sim \chi_v^2 \quad \text{per ogni } v = 1, 2, 3, \dots$$

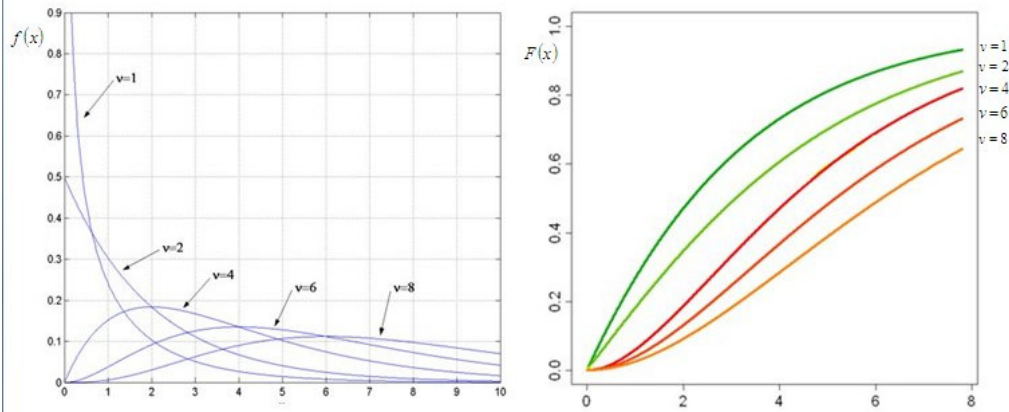


v.c. Chi quadrato

Approssimazione della v.c. χ^2 alla Normale

Data una v.c. X che si distribuisce come un Chi quadrato,
al crescere di v

$$\chi_v^2 \rightarrow N(\mu = v, \sigma^2 = 2v)$$



v.c. t di Student

La v.c. t di Student presenta diverse similarità con la v.c. normale standardizzata.

Infatti anch'essa è continua e definita sull'intero asse reale, ha una funzione di densità di forma campanulare e simmetrica rispetto allo zero.

Differenza fondamentale rispetto ad una Z , è che una t presenta una variabilità più elevata (*forma platicurtica*).

La funzione di densità della t dipende, come per la v.c. Chi quadrato, da un unico parametro v , i *gradi di libertà*.

La **v.c. t di Student** può definirsi come *il rapporto tra una normale standardizzata e la radice quadrata di un Chi quadrato rapportato ai propri gradi di libertà*.

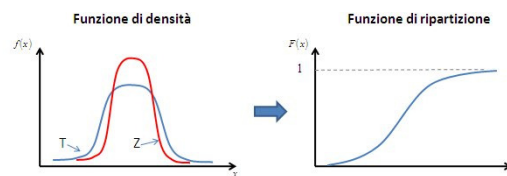
Per valori di v elevati ($v \geq 30$ è un valore sufficiente), la v.c. t di student si approssima ad una v.c. normale standardizzata.

La v.c. t di Student ha media e varianza pari a:

$$\mathbf{E(X)}=0 \quad \text{e} \quad \mathbf{Var(X)}=v/(v-2)$$

v.c. t di Student

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi_v^2}{v}}} \sim t_v \quad \text{per ogni } v=1,2,3,\dots$$



La v.c. t presenta una distribuzione meno appuntita rispetto alla normale standardizzata (ha una forma platicurtica)

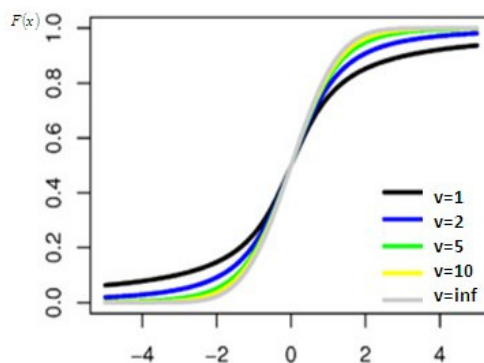
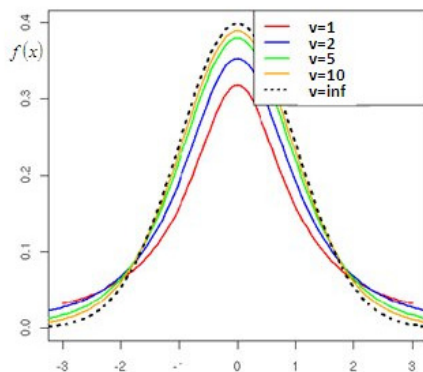
v.c. t di Student

Approssimazione della v.c. t alla Normale

Data una v.c. X che si distribuisce come una t di Student,

al crescere di v

$$t_v \rightarrow N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$$



v.c. F di Fisher

La v.c. F di Fisher è una distribuzione asimmetrica, continua e definita per valori reali non negativi.

La funzione di densità dipende da due parametri, i *gradi di libertà* v_1 al numeratore e i *gradi di libertà* v_2 al denominatore.

La **v.c. F di Fisher** può definirsi come *il rapporto tra due v.c. Chi quadrato ognuna delle quali è rispettivamente rapportata ai propri gradi di libertà.*

Per un valore di $v_1=1$, si può dimostrare che la v.c. F coincide con il quadrato di una v.c. t di Student con v_2 gradi di libertà.

v.c. F di Fisher

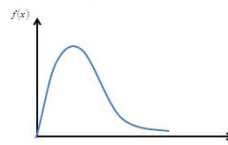
$$X = \frac{Y_1/v_1}{Y_2/v_2} \sim F_{v_1, v_2}$$

per ogni $v_1 = 1, 2, 3, \dots$
e per ogni $v_2 = 1, 2, 3, \dots$

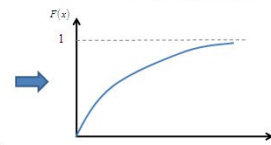
dove
 $Y_1 \sim \chi_{v_1}^2$
 $Y_2 \sim \chi_{v_2}^2$

$$E(X) = \frac{v_2}{v_2 - 2} \quad \text{Var}(X) = \frac{2v_2^2 \cdot (v_1 + v_2 - 2)}{v_1(v_2 - 2)^2(v_2 - 4)}$$

Funzione di densità



Funzione di ripartizione



v.c. F di Fisher