

## Vibrazioni libere

Si consideri il modello rappresentato in fig.1; esso presenta uno smorzatore oleodinamico. Quest'ultimo (v. fig.1,b) è costituito da un cilindro pieno di un fluido viscoso (generalmente un olio minerale). Nel cilindro scorre un pistone nel quale sono ricavati dei fori di piccolo diametro. Quando il pistone si muove nel cilindro il fluido passa da una camera all'altra attraversando i fori calibrati ricavati nel pistone. Il flusso è laminare perché i fori sono di piccolo diametro e per tanto la forza di attrito è proporzionale alla velocità.

La costante  $\sigma$  che lega la forza alla velocità è detta costante di smorzamento viscoso.

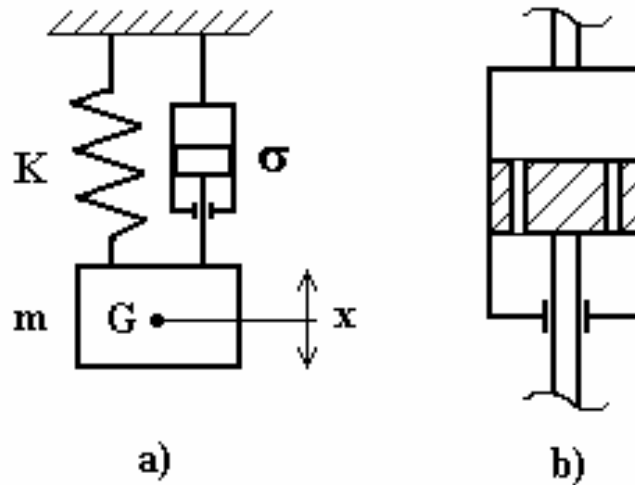
L'equazione del moto libero si scrive :

$$- m\ddot{x} - \sigma\dot{x} - kx = 0$$

Sostituendo l'integrale generale  $x(t)$  nell'equazione del moto si ottiene:

$$m C \lambda^2 e^{\lambda t} + \sigma \lambda e^{\lambda t} + K C e^{\lambda t} = 0$$

Fig.1



Dividendo tutti i termini per  $m$  e ricordando che  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$  si ottiene:

$$\lambda^2 + \frac{\sigma}{m}\lambda + \omega_n^2$$

**e quindi:**

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\sigma}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2m}\right)^2 - \omega_n^2}$$

**E quindi la legge del moto è:**

$$\mathbf{x(t) = C1e^{\lambda t} + C2e^{\lambda t}}$$

Le radici saranno reali, coincidenti o complesse a seconda che risulti:

$$\frac{\sigma}{2m} \geq \omega_n \quad (2)$$

Si definisce smorzamento critico la quantità:

$$\sigma_{cr} = 2\sqrt{mK}$$

Moltiplicando ambo i membri della (2) per  $\sigma_{cr}$  :

$$\frac{\sigma_{cr}}{2m} 2\sqrt{mK} \geq \sqrt{\frac{K}{m}} \sigma_{cr}$$

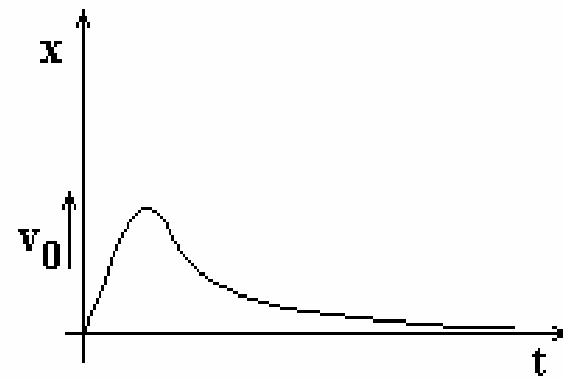
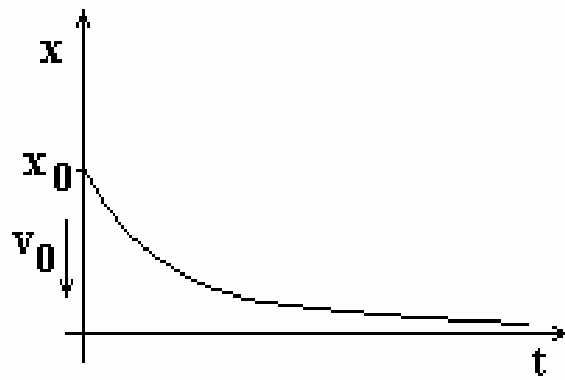
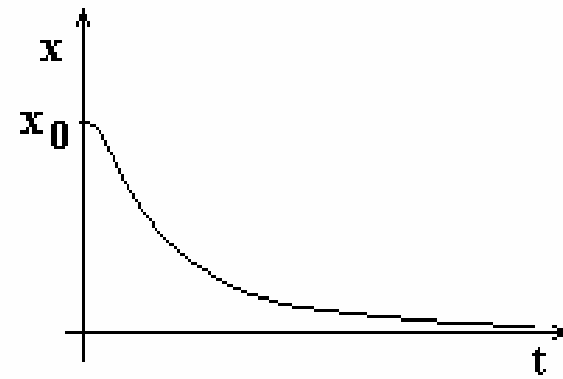
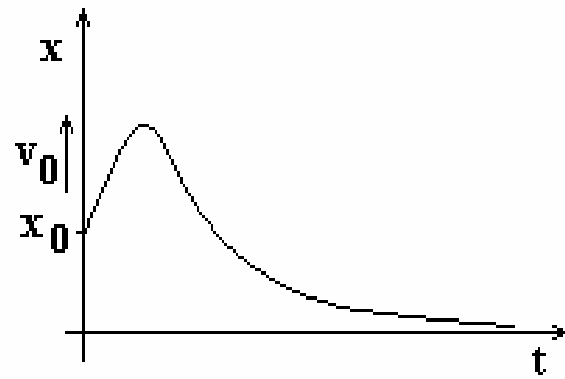
ossia:

$$\sigma \geq \sigma_{cr}$$

Come si vede dall'equazione della legge del moto il moto del sistema è, in ogni caso, aperiodico e presenta caratteristiche differenti a seconda che lo smorzamento sia maggiore o minore di quello critico.

### 1) $\sigma > \sigma_{cr}$

In questo caso  $\lambda_1$   $\lambda_2$  sono reali e negative. L'equazione del moto mostra che il moto libero tende asintoticamente a 0 per  $t$  che tende ad infinito, qualunque siano le condizioni iniziali.



$$2) \underline{\sigma = \sigma_{cr}}$$

Le due  $\lambda_1$   $\lambda_2$  sono coincidenti:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\sigma_{cr}}{2m} = -\frac{2\sqrt{mK}}{2m} = -\omega_n$$

per cui:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_n t}$$

Il moto del sistema è qualitativamente analogo a quello riportato nella figura precedente.

### 3) $\sigma < \sigma_{cr}$

Le due  $\lambda_1$   $\lambda_2$  sono complesse e coniugate:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\sigma}{2m} \pm i \omega_n \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{2m\omega_n}\right)^2} = -\frac{\sigma}{\sigma_{cr}} \omega_n \pm i \omega_n \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\right)^2}$$

se si pone:

$$\omega_s = \omega_n \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\right)^2}$$

la legge del moto ha espressione:

$$x(t) = e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}} \omega_n t} (C_1 e^{i\omega_s t} + C_2 e^{-i\omega_s t})$$

che, per le formule di Eulero si può scrivere:

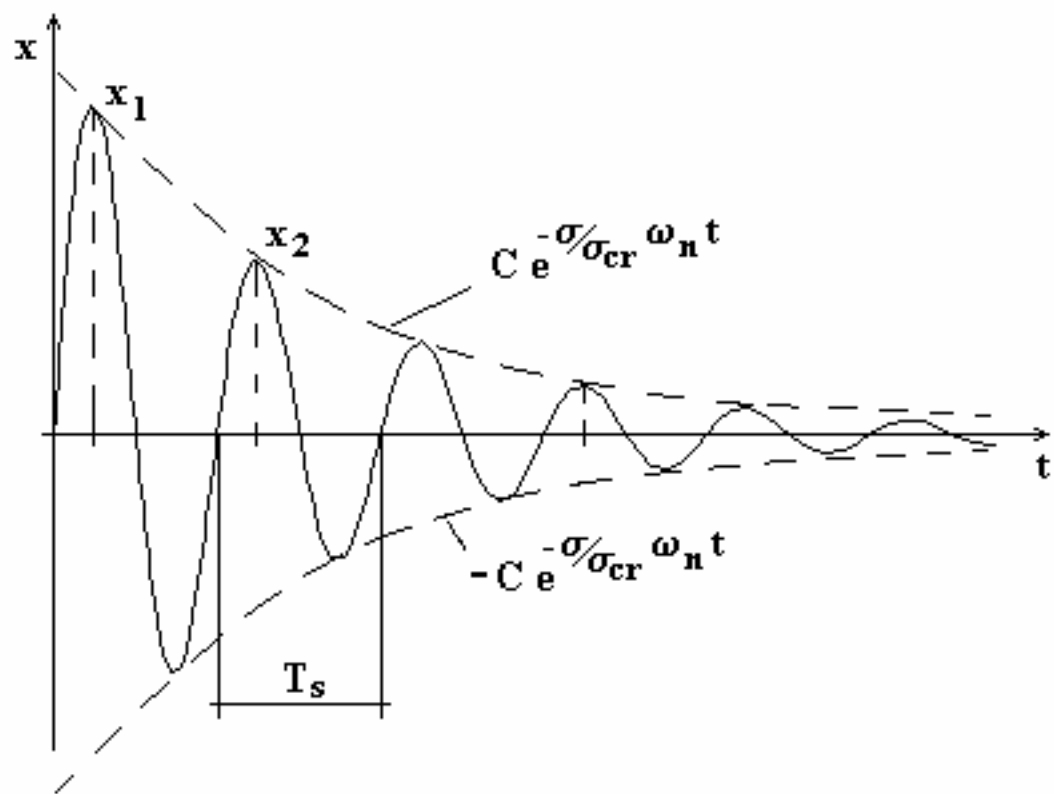
Il moto del sistema è una vibrazione armonica di pulsazione  $\omega_s$  la cui ampiezza decresce nel tempo. Per questo motivo non si tratta di un moto armonico e neppure periodico, ma che si annulla periodicamente ad intervalli di tempo  $T_s \doteq \frac{2\pi}{\omega_s}$

tale moto prende il nome di moto armonico smorzato. L'andamento di questo moto è rappresentato nella fig. seguente.

Si dimostra che le curve di equazioni:

$$x(t) = \pm C e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}} \omega_n t}$$

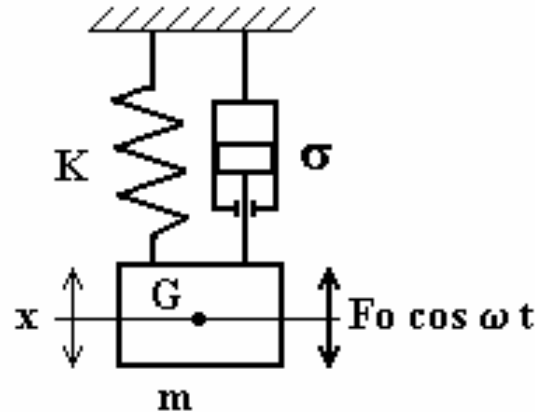
sono le curve in sviluppo della legge del moto.



## Vibrazioni forzate di sistemi con smorzamento viscoso

Consideriamo ora un sistema come quello rappresentato in fig 2. sotto l'azione di una forza armonica che agisce nella massa  $m$

Fig.2



L'equazione del moto è:

$$-m\ddot{x} - \sigma\dot{x} - kx + F_0 \cos \omega t = 0$$

ossia:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

Come si è già detto a proposito dei modelli senza smorzamento (ora a maggior ragione) il moto del sistema è somma di un moto libero (destato dalle condizioni iniziali e dall'applicazione della forzante) e del moto forzato. Dopo il transitorio iniziale, a regime, il moto libero si estingue ed è presente solo il moto forzato:

$$x(t) \approx X_f \cos(\omega t + \varphi)$$

L'equazione appena scritta rappresenta quindi un integrale particolare. La fase  $\varphi$ , dal punto di vista analitico è resa necessaria dal termine  $\dot{x}$ ; dal punto di vista fisico esprime il concetto per il quale lo spostamento (cioè l'effetto) è in ritardo rispetto alla forzante (la causa).

Sostituendo l'integrale particolare nella equazione del moto si ottiene :

$$- m\omega^2 X_f \cos(\omega t + \varphi) - \sigma \omega X_f \sin(\omega t + \varphi) + K X_f \cos(\omega t + \varphi) = F_0 \cos \omega t \quad (3)$$

In questa equazione sono contenute due incognite:

- $X_f$ , l'ampiezza del moto forzato a regime
- $\varphi_0$  il ritardo con il quale lo spostamento raggiunge un massimo rispetto al massimo della forzante.

Per ottenere le due incognite si scrive la (3) per due particolari istanti

$$1. \quad (\omega t + \varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad (K - m\omega^2) X_f = F_0 \cos \omega t$$

$$2. \quad (\omega t + \varphi) = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad -\sigma \omega X_f = -F_0 \sin \omega t$$

Dal sistema di due equazioni appena scritte si ricava:

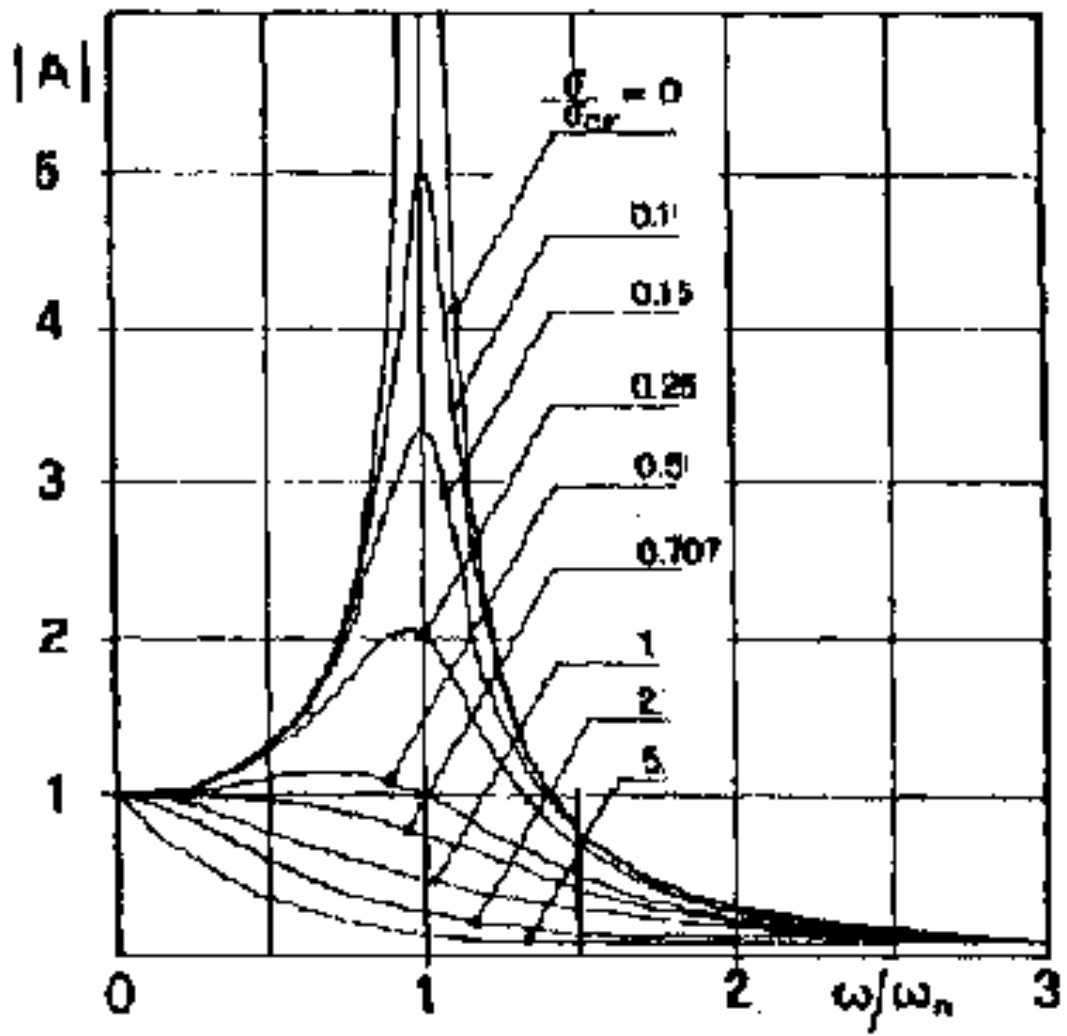
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2 \frac{\sigma}{\sigma_{\text{cr}}} \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

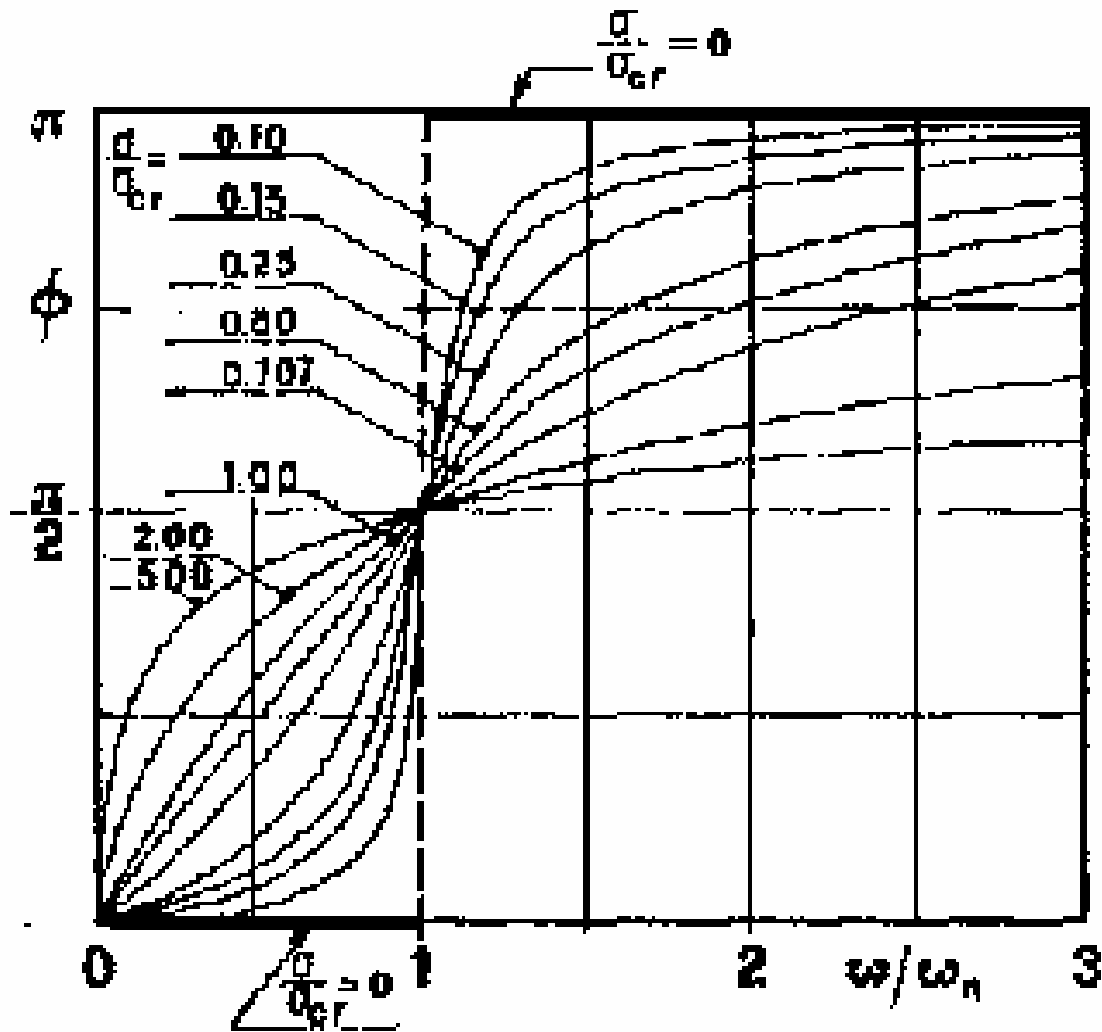
$$X_f = \frac{F_0}{K} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{\sigma}{\sigma_{\text{cr}}} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

Il primo termine a secondo membro è lo spostamento statico  $X_{\text{st}}$  ; il secondo è il coefficiente di amplificazione  $A$  in presenza di smorzamento.

Nella figura 3 è riportato l'andamento di  $A$  in valore assoluto in funzione del rapporto  $\omega/\omega_n$  per diversi valori di  $\sigma/\sigma_{\text{cr}}$ .

Fig.3





## Isolamento delle vibrazioni

Il problema dell'isolamento delle vibrazioni si presenta in due modi differenti:

- Un sistema meccanico (ad esempio un gruppo di macchine) genera delle forze di inerzia le quali essendo forze esterne al sistema si scaricano sulla struttura di sostegno. Interponendo dei vincoli elastici si vuole limitare l'ampiezza forze trasmesse al basamento. Questo problema prende il nome di **isolamento attivo**.
- Un sistema (ad esempio uno strumento di precisione) poggia su di un basamento che vibra per una causa qualsiasi. Mediante l'interposizione di elementi elastici tra il basamento ed il sistema si vuole limitare che l'ampiezza della vibrazione della struttura di sostegno si trasmetta integralmente al sistema.

Questo problema prende il nome di isolamento passivo. In entrambi gli aspetti, una massa sospesa mediante vincoli deformabili ha sei gradi di libertà, come mostrato in fig.4.

Tuttavia lo studio del problema mediante modelli ad 1 grado di libertà quali quelli rappresentati nelle figure 4 e 5 consente di ottenere risultati molto utili alla comprensione del problema stesso ed, in alcuni casi, applicabili direttamente

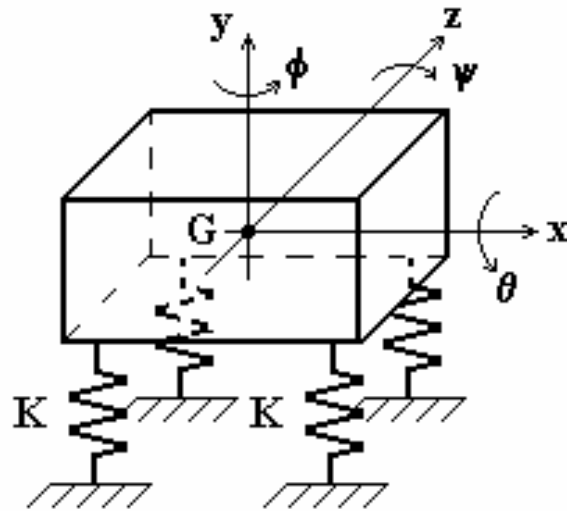


Fig. 4

## Isolamento attivo

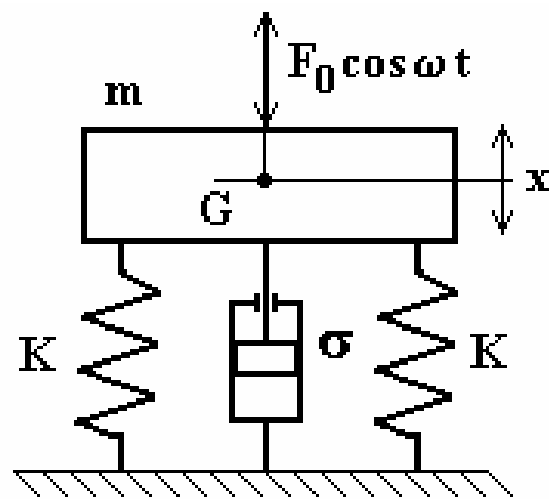


Fig.5

In fig.5 è rappresentato un modello ad 1 g.d.l. relativo al problema dell'isolamento attivo delle vibrazioni. L'unico moto del sistema è quello verticale (moto di rimbalzo). Consideriamo l'azione di una forza armonica l'equazione del moto del sistema è quella già nota:

Alla struttura si trasmette una forza  $F_t$  attraverso le molle e gli smorzatori; pertanto essa è il risultante di due forze: una di ampiezza  $KX$  che si trasmette per l'elasticità dei vincoli elastici ed una di ampiezza  $\sigma\omega X$  che si trasmette a causa dello smorzamento.

Tali forze sono in quadratura per cui il loro risultante è:

$$F_t = \sqrt{(KX)^2 + (\sigma\omega X)^2}$$

L'efficacia del sistema di sospensione è quantificata da un parametro detto coefficiente di trasmissibilità definito come rapporto tra l'ampiezza della forza trasmessa e l'ampiezza della forzante

$$|T| = \frac{F_t}{F_0} \quad \text{deve risultare} < 1$$

ricordando che

$$X_f = \frac{F_0}{K} A, \text{ risulta:}$$

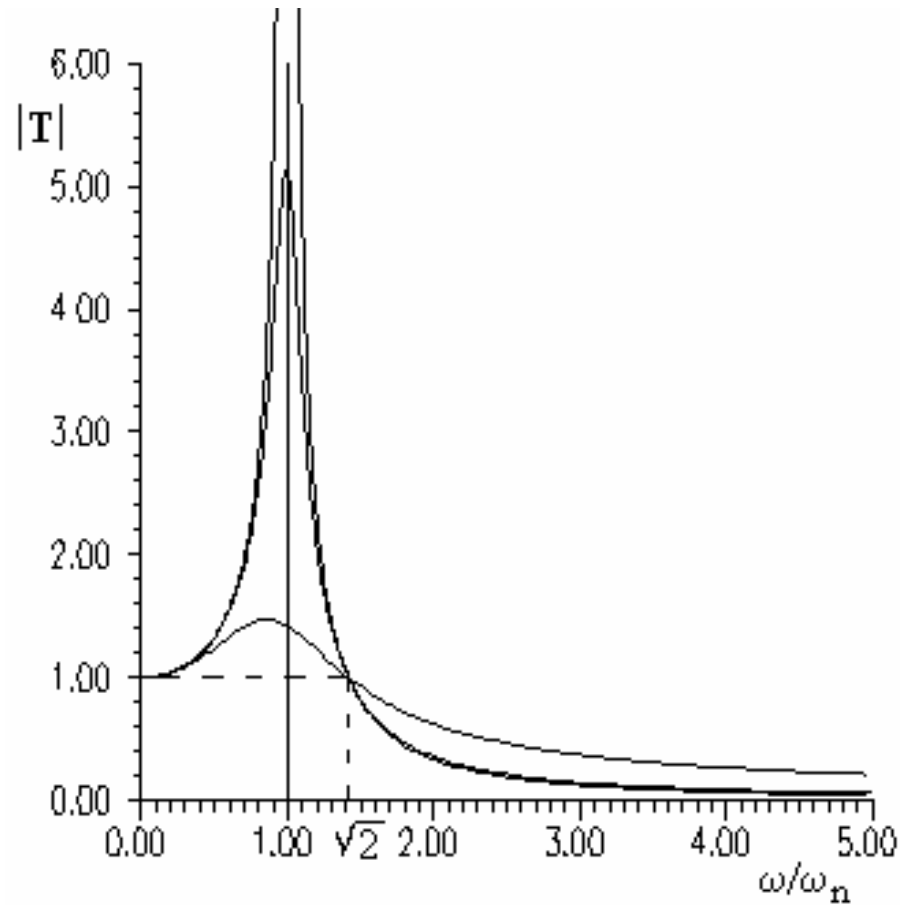
$$T = \frac{\sqrt{1 + \left(2 \frac{\sigma}{\sigma_{cr}} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{\sigma}{\sigma_{cr}} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

In fig.6 è rappresentato l'andamento di  $|T|$  in funzione di  $\omega/\omega_n$  per diversi valori del parametro  $\sigma/\sigma_{cr}$ . Dalla figura si osserva essenzialmente quanto segue:

- Per ottenere che sia  $T < 1$  occorre che sia  $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$ , qualunque sia il valore dello smorzamento.
- Per  $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$ , all'aumentare dello smorzamento  $T$  aumenta.

Ciò può essere interpretato considerando che lo smorzatore costituisce un mezzo attraverso il quale la forza si trasmette al basamento.

Fig.6



Gli elementi elastici possono essere realizzati con i seguenti materiali:

Acciaio (molle ad elica, molle a terra ecc.); Gomma;  
Sughero; Feltro

Ognuno di questi materiali può essere utilizzato in un campo di valori della pulsazione naturale del sistema