

CORSO DI COMPLEMENTI DI MECCANICA

Prof. Vincenzo Niola

SISTEMI A DUE GRADI DI LIBERTÀ

Lo studio dei sistemi a più gradi di libertà verrà affrontato facendo riferimento, per semplicità, solo a sistemi conservativi, trascurando, cioè lo smorzamento.

Moto libero

Si esamina dapprima il moto libero del sistema, considerando, quindi, che su di esso non agisca nessuna forza esterna e che il moto sia imposto allontanando nell'istante iniziale le masse dalla loro posizione di equilibrio.

Consideriamo il sistema a due gradi di libertà (x_1 ed x_2) rappresentato in fig. Sulla massa m_1 agiscono le seguenti forze:

La forza di inerzia : $-m_1\ddot{x}_1$

La reazione della molla K1 : $-K_1x_1$

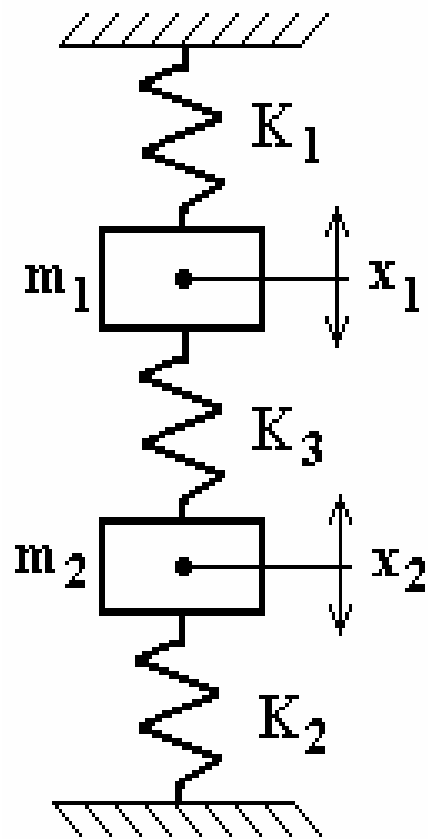
La reazione della molla K3 : $-K_3(x_1 - x_2)$

Sulla massa m2 agiscono le seguenti forze:

La forza di inerzia : $-m_2\ddot{x}_2$

La reazione della molla K2 : $-K_2x_2$

La reazione della molla K3 : $-K_3(x_2 - x_1)$



Applicando il principio di d'Alembert, e cambiando segno a tutti i termini per comodità, le (due) equazioni del moto del sistema si scrivono:

$$m_1 \ddot{x}_1 + K_1 x_1 + K_3 (x_1 - x_2) = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + K_2 x_2 + K_3 (x_2 - x_1) = 0$$

Ovvero:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (K_1 + K_3)x_1 - K_3 x_2 = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + (K_2 + K_3)x_2 - K_3 x_1 = 0$$

Coefficienti di rigidità

E' utile definire i coefficienti di rigidità k_{ij} del sistema , il generico k_{ij} è definito come

- La reazione con segno cambiato che il sistema esercita sulla massa (o sulla sezione) i -esima per uno spostamento unitario della massa (o della sezione) j -esima, ferma restando tutte le altre masse (o sezioni). -

Dalla definizione di coefficienti di rigidità, per il sistema considerato risulta:

$$k_{11} = K_1 + K_3$$

$$k_{22} = K_2 + K_3$$

$$k_{12} = -K_3 = k_{21}$$

Le equazioni del moto si possono allora scrivere nel seguente modo:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

che costituiscono un sistema di equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti.

L'integrale generale di tale sistema di equazioni è:

$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^{\lambda t} \\ x_2 = C_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

ma, per semplicità, supporremo direttamente che la soluzione sia di tipo armonico, per cui, nelle (1) sostituiremo l'integrale particolare:

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cos \omega t \\ x_2 = X_2 \cos \omega t \end{cases} \quad (2)$$

In altri termini, assumere che le (2) siano un integrale delle (1), significa supporre che sia possibile un moto per il quale ciascuna massa si muove con moto armonico di pulsazione ω ed ampiezza X_i . Tale ipotesi risulta essere verificata nella realtà

Condizione di normalizzazione

Poiché non sono note le ampiezze ma solo il loro rapporto, per rappresentare le deformazioni del sistema che vibra con ciascuna delle due pulsazioni naturali, si stabilisce una condizione di normalizzazione.

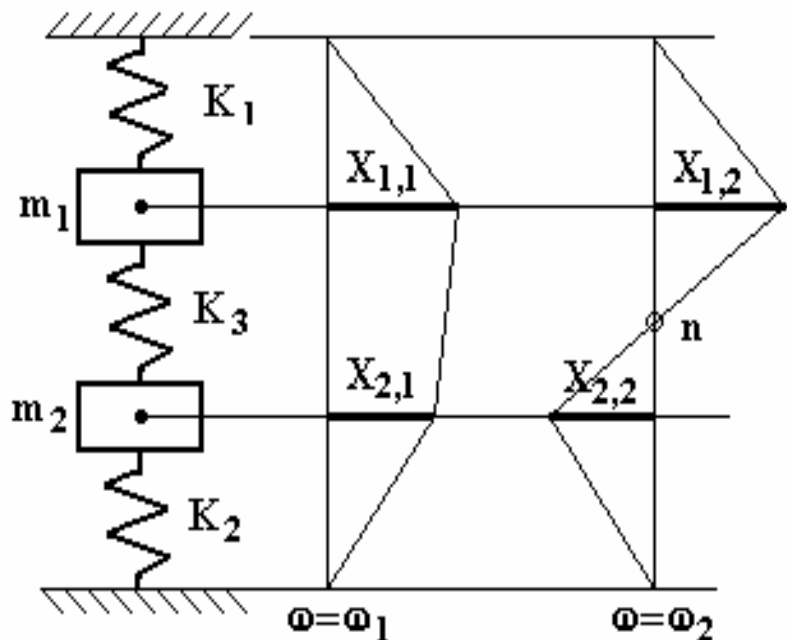
La più semplice condizione di normalizzazione consiste nell'assumere che l'ampiezza della oscillazione della prima massa sia uguale ad 1 e si calcola di conseguenza l'ampiezza della oscillazione della seconda massa. Un esempio è riportato in fig.1. In tale figura le linee che congiungono le estremità dei segmenti che rappresentano le ampiezze delle oscillazioni sono dette linee elastiche. Il generico termine $X_{i,j}$ di quest'ultima rappresenta l'ampiezza di oscillazione della massa i -esima per il j -esimo modo di vibrare.

Come si può osservare dalla fig.1, in corrispondenza della più bassa delle due pulsazioni naturali del sistema le due masse oscillano muovendosi entrambe nello stesso verso, mentre in corrispondenza della più alta delle due pulsazioni naturali del sistema le due masse oscillano muovendosi in verso opposto. Di conseguenza in corrispondenza della pulsazione più elevata la linea elastica presenta un punto che non si sposta, tale punto è detto nodo; in fig.1 il nodo è evidenziato da un cerchietto ed è indicato con n. Da quanto detto si evince che:

Un sistema a due gradi di libertà ha due pulsazioni naturali che individuano due modi di vibrare. Ciascuno di questi ultimi è rappresentato da una linea elastica del tipo riportato in fig.1.

Il primo modo di vibrare (quello a pulsazione più bassa) presenta una linea elastica senza nodi, mentre il secondo modo di vibrare presenta un nodo.

La circostanza per la quale le ampiezze delle vibrazioni non sono note, fisicamente, dipende dal fatto che il moto del sistema è un moto libero e pertanto è determinato dalle condizioni iniziali, solo se queste ultime sono assegnate è possibile calcolare le ampiezze delle vibrazioni libere.



Le equazioni 4.15 possono essere scritte in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Si dimostra che gli autovalori $\{\omega_i\}$ e gli autovettori $[u_{ij}]$ della matrice $[A]$:

$$[A] = [M]^{-1} [k_{i,j}]$$

rappresentano rispettivamente i quadrati delle le pulsazioni naturali del sistema e le ampiezze di oscillazione a meno di una costante arbitraria.

E' da precisare che il primo pedice del generico termine u_{ij} si riferisce alla massa ed il secondo pedice riferisce al modo di vibrare; in altri termini, ciascuna delle colonne della matrice degli autovettori rappresenta la linea elastica del sistema per j -esimo modo di vibrare.

Esempio:

Il sistema rappresentato in fig. 4.35 ha le seguenti caratteristiche:

$$m_1=2 \text{ kg} ; m_2=5 \text{ kg} ;$$

$$K_1=20000 \text{ N/m} ; K_2=40000 \text{ N/m} ; K_3=30000 \text{ N/m} ;$$

Si desidera calcolare le pulsazioni naturali e le linee elastiche.

Si calcolano, innanzi tutto, i coefficienti di rigidità:

$$k_{11} = K_1 + K_3 = 5 \cdot 10^4 \text{ N/m}$$

$$k_{22} = K_2 + K_3 = 7 \cdot 10^4 \text{ N/m}$$

$$k_{12} = k_{21} = -K_3 = -3 \cdot 10^4 \text{ N/m}$$

Si scrive ora il sistema di equazioni del moto:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^4 & -3 \cdot 10^4 \\ -3 \cdot 10^4 & 7 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Si calcolano autovalori ed autovettori della matrice.

$$[A] = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^4 & -3 \cdot 10^4 \\ -3 \cdot 10^4 & 7 \cdot 10^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 \cdot 10^4 & -1,5 \cdot 10^4 \\ -6 \cdot 10^3 & 1,4 \cdot 10^4 \end{bmatrix}$$

e si ottengono quindi:

$$\text{Autovalori : } \{\omega_i^2\} = \begin{Bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8,534 \cdot 10^3 \\ 3,0466 \cdot 10^4 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Autovettori : } [u_{ij}] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6734 & 0,9396 \\ 0,7392 & -0,3424 \end{bmatrix}$$

Le pulsazioni naturali si ottengono come radici quadrate degli autovalori:

$$\omega_1 = 92,38 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 174,55 \text{ rad/s}$$

Se si impone la condizione di normalizzazione $u_{1j}=1$, le ampiezze delle linee elastiche dell'altra massa si calcolano come rapporto tra l'autovettore u_{2j} e l'autovettore u_{1j} :

Primo modo di vibrare $\omega=\omega_1$:

$$X_{1,1}=1 \quad ; \quad X_{2,1}=u_{2,1}/u_{1,1} = / = 1,098.$$

Secondo modo di vibrare $\omega=\omega_2$:

$$X_{1,2}=1 \quad ; \quad X_{2,2}=u_{2,2}/u_{1,2} = / = -0,364$$

Le linee elastiche sono mostrate in fig. 4.37.

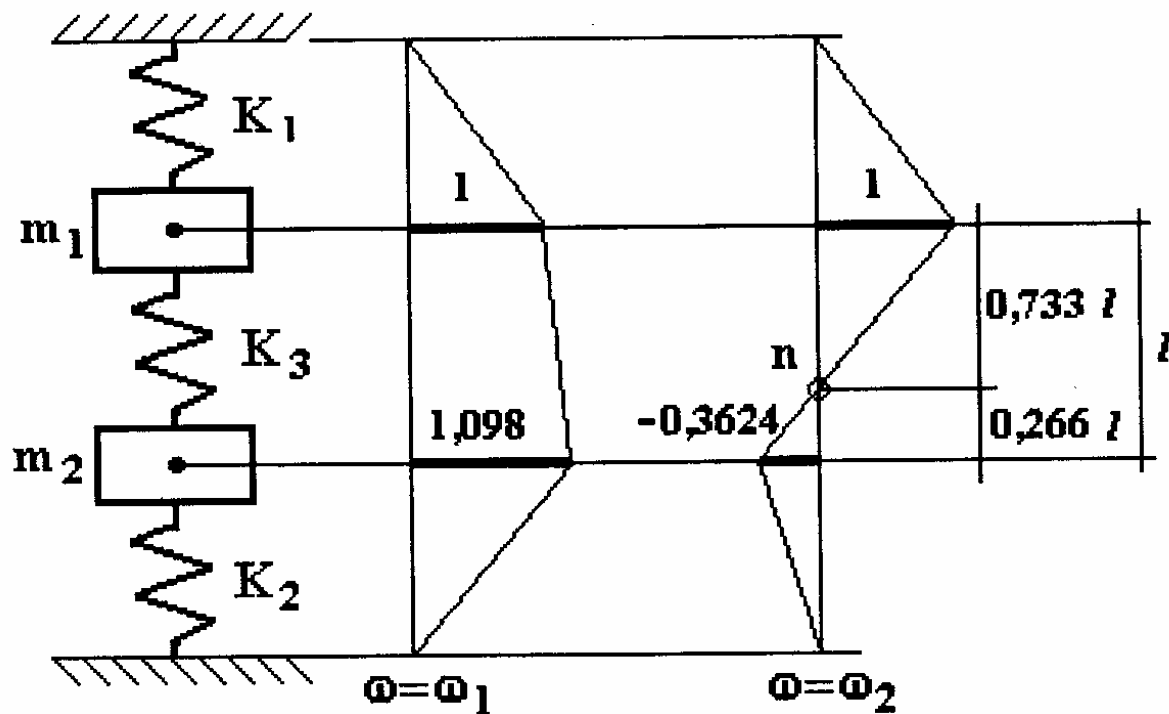


Fig. 4.37

E' possibile controllare che i risultati siano corretti applicando, con criterio, quanto è noto dallo studio dei sistemi ad 1 g.d.l. (grado di libertà). Per il secondo modo di vibrare, se sulla linea elastica si osservano i due triangoli che hanno il nodo come vertice comune, si può ricavare che il nodo stesso si trova sulla molla K_3 ad una distanza pari a $1/(1+0,364) = 0,733$ la sua lunghezza dalla massa 1, ovvero ad una distanza pari a $0,364/(1+0,364) = 0,267$ della sua lunghezza dalla massa 2. Per quanto detto a proposito della sezione nodale, il sistema che oscilla nel secondo modo di vibrare può essere quindi considerato come formato da due sottosistemi:

- un primo sottosistema costituito dalla massa m_1 cui sono collegate due molle (in parallelo) una delle quali di rigidità K_1 e l'altra di rigidità $K_3/0,733 = 40928$ N/m, per una rigidità complessiva pari a : $K' = 20000 + 40928 = 60928$ N/m.
- un secondo sottosistema costituito dalla massa m_2 cui sono collegate due molle (in parallelo) una delle quali di rigidità K_2 e l'altra di rigidità $K_3/0,267 = 1127782$ N/m, per una rigidità complessiva pari a : $K'' = 40000 + 113636 = 153636$ N/m.

Pertanto, per il primo sottosistema si calcola una pulsazione naturale pari a:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K'}{m_1}} = \sqrt{\frac{60928}{2}} = 174,54 \text{ rad / s}$$

e, per il secondo sottosistema si calcola una pulsazione naturale pari a:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K''}{m_2}} = \sqrt{\frac{153636}{5}} = 175,29 \text{ rad / s}$$

A meno di errori numerici, le due pulsazioni sono identiche tra loro e coincidono con quella del secondo modo di vibrare.

Si è detto che le oscillazioni delle masse possono essere armoniche con pulsazione ω_1 oppure ω_2 . Tali oscillazioni sono destinate dalle condizioni iniziali cioè dagli spostamenti iniziali $X_1(0)$ ed $X_2(0)$ e/o dalle velocità iniziali $V_1(0)$ ed $V_2(0)$. Se il rapporto tra le condizioni iniziali è uguale al rapporto tra gli autovettori relativi al j-esimo modo di vibrare, cioè se:

$$X_1(0) / X_2(0) \text{ e/o } V_1(0) / V_2(0) = u_{1,j} / u_{2,j}$$

allora le condizioni iniziali destano solo il modo di vibrare j -esimo e le masse si muoveranno di moto armonico con pulsazione e con una linea elastica rappresentata dalla j -esima colonna della matrice $[u_{ij}]$. Tale comportamento si verifica anche se entrambe gli spostamenti iniziali sono nulli, mentre il rapporto tra le velocità iniziali soddisfa la condizione sopra riportata oppure se entrambe le velocità iniziali sono nulle, mentre il rapporto tra gli spostamenti iniziali soddisfa la condizione sopra riportata.

Se invece le condizioni iniziali sono qualsiasi, ciascuna massa si muoverà con un moto che è dato dalla somma di tutti i modi di vibrare (destati, ciascuno, con ampiezza diversa). Pertanto (cfr. somma di moti armonici diretti secondo lo stesso asse), se il rapporto tra le pulsazioni dei modi di vibrare è un numero razionale, il moto di ciascuna massa sarà periodico; se il rapporto tra le pulsazioni dei modi di vibrare non è un numero razionale, il moto di ciascuna massa sarà aperiodico.

SISTEMI SEMIDEFINITI

Si consideri il sistema rappresentato in fig. 4.38, per tale sistema i coefficienti di rigidità del sistema valgono:

$$k_{11} = k_{22} = K ; \quad k_{12} = k_{21} = -K$$

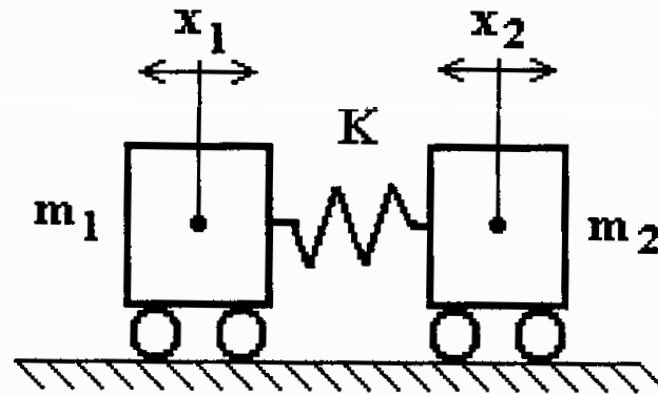


Fig. 4.38

Le equazioni algebriche associate alle equazioni del moto si scrivono:

$$\begin{cases} X_1(K - m_1\omega^2) - X_2K = 0 \\ -X_1K + X_2(K - m_2\omega^2) = 0 \end{cases} \quad (4.17'')$$

Imponendo che sia $\Delta=0$, si ottiene:

$$\omega^4 m_1 m_2 - \omega^2 (m_1 + m_2) K = 0$$

ossia:

$$\omega^2 \left[\omega^2 m_1 m_2 - (m_1 + m_2) K \right] = 0$$

$$\omega^2 \left[\omega^2 m_1 m_2 - (m_1 + m_2) K \right] = 0$$

Tale equazione consente di calcolare i valori delle due pulsazioni naturali:

$$\omega_1 = 0$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}$$

La 4.19 consente di determinare le linee elastiche:
Primo modo di vibrare:

$$X_1 / X_2 = \frac{K}{K} = 1 \Rightarrow X_1 = X_2$$

Secondo modo di vibrare:

$$X_1 / X_2 = \frac{K}{\left(K - m_1 \frac{K(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \right)} = -\frac{m_2}{m_1}$$

In definitiva, si ottiene che:

- il primo modo di vibrare è caratterizzato dall'essere : $\omega_1=0$ ed $X_1=X_2$. Ciò può essere interpretato fisicamente come segue:

Se si impongono condizioni iniziali congruenti con questa linea elastica, e cioè si spostano le due masse di quantità identiche dalla loro posizione di equilibrio ($X_1(0) = X_2(0)$) e/o si impongono uguali velocità iniziali ($V_1(0)$ ed $V_2(0)$) , nessuna forza di richiamo agisce sul sistema che quindi si porterà in una nuova posizione di equilibrio e dunque non ritornerà mai nella posizione di equilibrio precedente. Il periodo di tale “oscillazione rigida” è quindi infinito e, di conseguenza, la pulsazione è nulla. Questo comportamento è proprio di tutti i sistemi ad estremi liberi o semidefiniti, quei sistemi, cioè, per i quali se le masse vengono

allontanate di quantità identiche dalla loro posizione di equilibrio nessuna forza di richiamo agisce su alcuna massa del sistema stesso.

- il secondo modo di vibrare è caratterizzato da una linea elastica per la quale la posizione del nodo è più vicina alla massa più grande, ciò tanto più quanto maggiore è il rapporto massa maggiore/massa minore.

MOTO FORZATO

Si consideri che sulla massa m_1 agisca una forza armonica $F_0 \cos \omega t$, come rappresentato in fig.4.39.

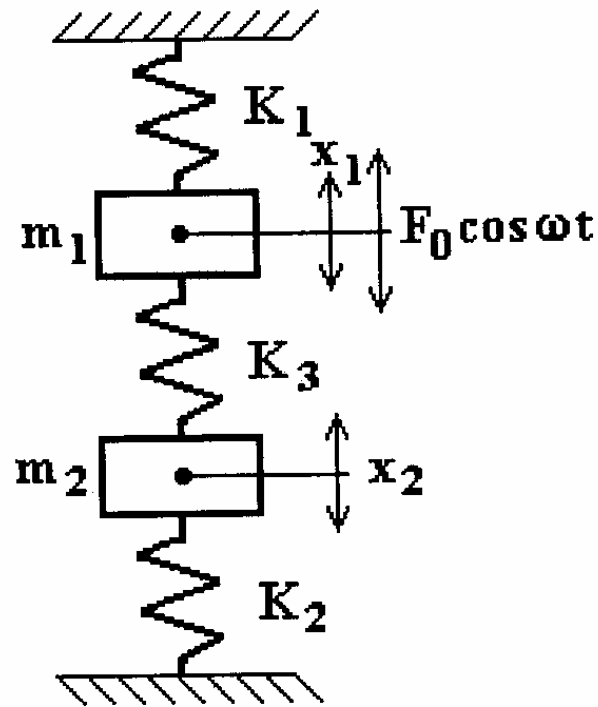


Fig.4.39

Le equazioni del moto si possono scrivere nel seguente modo:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_{11} x_1 + k_{12} x_2 = F_0 \cos \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_{21} x_1 + k_{22} x_2 = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

L'integrale generale di tale sistema di equazioni è:

$$\begin{cases} x_1 = x_{1,l} + x_{1,f} \\ x_2 = x_{2,l} + x_{2,f} \end{cases}$$

Le precedenti relazioni mostrano che l'integrale generale è somma di due termini: x_l che rappresenta l'integrale generale delle equazioni omogenee e quindi, fisicamente, il moto libero ed x_f che rappresenta l'integrale particolare, ossia il moto forzato.

Se su di un sistema lineare agisce una forzante armonica di pulsazione ω , a regime, (ossia dopo un transitorio iniziale) il sistema stesso oscillerà con un moto armonico avente la stessa pulsazione ω della causa forzante.

Se su di un sistema lineare agisce una forzante armonica di pulsazione ω , a regime, (ossia dopo un transitorio iniziale) il sistema stesso oscillerà con un moto armonico avente la stessa pulsazione ω della causa forzante. Pertanto nelle 4.20 sostituiamo l'integrale particolare:

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cos \omega t \\ x_2 = X_2 \cos \omega t \end{cases} \quad (4.16)$$

Si ottiene così:

$$\begin{cases} X_1(k_{11} - m_1\omega^2) + X_2k_{12} = F_0 \\ X_1k_{21} + X_2(k_{22} - m_2\omega^2) = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

Indicando con Δ il determinante del sistema di equazioni 4.21:

$$\Delta = (k_{11} - m_1\omega^2)(k_{22} - m_2\omega^2) - k_{12}^2 \quad (4.22)$$

si possono calcolare le ampiezze di oscillazione:

$$\begin{aligned} X_1 &= F_0 (k_{22} - m_2 \omega^2) / \Delta \\ X_2 &= F_0 k_{21} / \Delta \end{aligned} \tag{4.23}$$

In fig. 4.40 è rappresentato l'andamento qualitativo delle ampiezze delle oscillazioni di un sistema a 2g.d.l. al variare della pulsazione ω della forzante.

Dalla figura si può osservare quanto segue:

- le ampiezze delle oscillazioni tendono ad infinito (si è trascurato lo smorzamento) per $\omega = \omega_1$ e per $\omega = \omega_2$. Ciò è evidente dalle 4.22 e 4.23, essendo i valori delle pulsazioni naturali quelli per i quali si annulla il determinante dei coefficienti.

- Esiste un valore della pulsazione ω^* della forzante per la quale risulta $X_1=0$ ossia la massa sulla quale agisce la forzante è ferma.

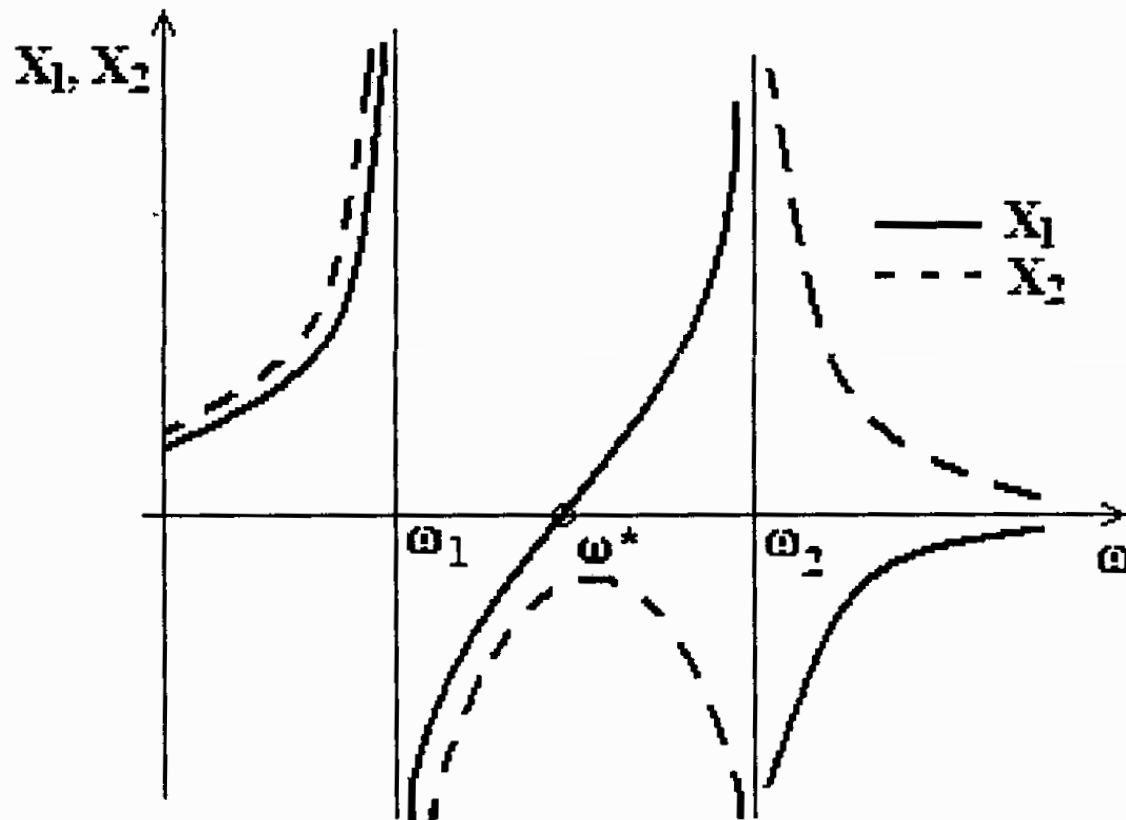


Fig.4.40

Il valore ω^* della pulsazione della forzante per il quale risulta $X_1=0$ si può facilmente ottenere dalla prima delle 4.23:

$$k_{22} = m_2 \omega^{*2} \Rightarrow \omega^* = \sqrt{\frac{k_{22}}{m_2}} = \sqrt{\frac{K_2 + K_3}{m_2}} \quad (4.24)$$

4.8.4 Smorzatori dinamici

L'ultima osservazione riportata nel paragrafo precedente trova applicazione negli smorzatori dinamici. Nella fig.4.41 è rappresentato schematicamente un sistema costituito da una massa m_1 sulla quale agisce una forzante armonica e da una massa m_2 (più piccola) collegata elasticamente alla prima.

Nota la pulsazione ω della forzante, dalla 4.24 si evince che se il valore della massa m_2 e delle rigidità che la collegano alla massa m_1 sono tali che risulti:

$$\omega = \sqrt{\frac{K_2}{m_2}}$$

la massa 1 resterà ferma, mentre la massa 2 sarà l'unica ad oscillare.

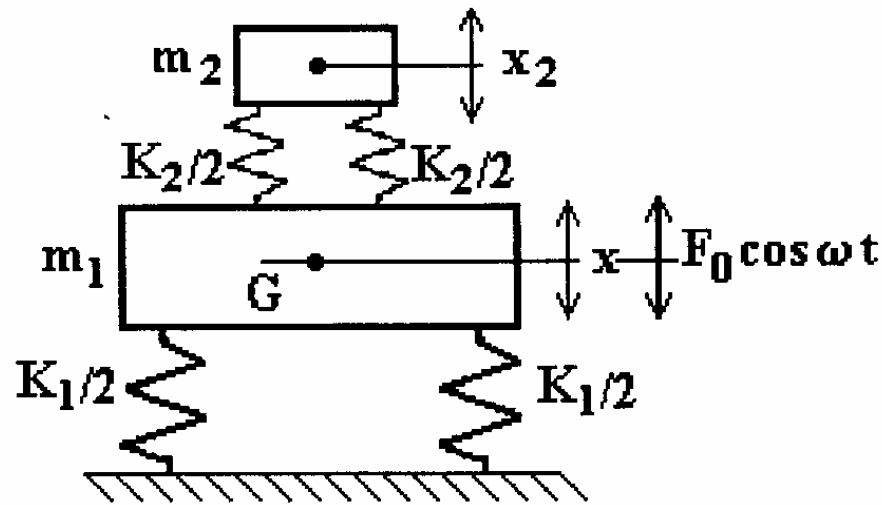


fig.4.41

Su tale principio vengono costruiti gli smorzatori dinamici. Il principio di funzionamento di questi ultimi si può riassumere come segue: ad una massa che si vuole impedire che vibri, si collega un'altra massa tramite un vincolo elastico tale da soddisfare la condizione data dalla 4.24. Se tale condizione è rispettata, la massa che è stata aggiunta (la m_2 nel caso considerato) oscillerà in controfase alla massa (m_1) sulla quale agisce la forzante (essendo $\omega_1 < \omega^* < \omega_2$) ed eserciterà sulla massa m_1 una forza che istante per istante è uguale ed opposta alla $F_0 \cos \omega t$.

CENNI SUI SISTEMI A PIU' GRADI DI LIBERTA'

In generale per i sistemi a più gradi di libertà le equazioni del moto si possono ottenere applicando il principio di d'Alembert in modo analogo a quello visto per i sistemi ad 1 g.d.l. .

Moto libero

Si consideri, ad esempio, il sistema a più gradi di libertà rappresentato in fig.4.42, trascurando le azioni smorzanti, le equazioni del moto per ciascuna massa si scriveranno:

$$\text{Massa 1: } m_1 \ddot{x}_1 + K_1 x_1 + K_2 (x_1 - x_2) = 0$$

$$\text{Massa 2: } m_2 \ddot{x}_2 + K_2 (x_1 - x_2) + K_3 (x_2 - x_3) = 0$$

.....

.....

$$\text{Massa n: } m_n \ddot{x}_n + K_{n-1} (x_n - x_{n-1}) + K_n x_n = 0$$

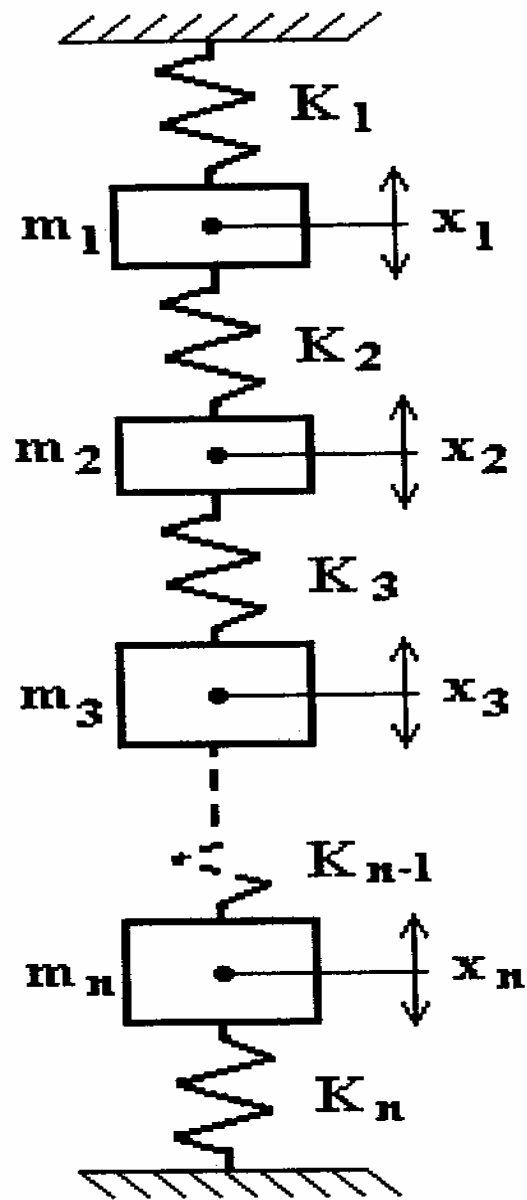


Fig. 4.42

Si ottiene quindi un sistema di n equazioni differenziali che costituisce il sistema di equazione del moto del sistema fisico considerato.

Se si utilizzano i coefficienti di rigidità del sistema k_{ij} , definiti nel paragrafo 4.8, per il sistema rappresentato in fig.4.42 risulterà:

$$\begin{array}{lll}
 k_{11} = K_1 + K_2 & k_{22} = K_2 + K_3 & k_{33} = K_3 + K_4 \\
 k_{12} = -K_2 = k_{21} & k_{23} = -K_3 = k_{32} & k_{13} = k_{14} = k_{1n} = 0 \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & k_{nn} = K_{n-1} + K_n
 \end{array}$$

per cui, le precedenti equazioni si possono scrivere:

$$\begin{array}{l}
 m_1 \ddot{x}_1 + k_{11} x_1 + k_{12} x_2 = 0 \\
 m_2 \ddot{x}_2 + k_{21} x_1 + k_{22} x_2 + k_{23} x_3 = 0 \\
 \dots\dots\dots \\
 m_n \ddot{x}_n + k_{n,n-1} x_{n-1} + k_{n,n} x_n = 0
 \end{array} \tag{4.25}$$

Questo sistema si può scrivere in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} m_1 & & & & \\ & m_2 & & & \\ & & - & & \\ & & & - & \\ & & & & m_n \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ - \\ - \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & & & \\ k_{21} & k_{22} & - & & \\ & - & - & - & \\ & & - & k_{n-1,n-1} & k_{n-1,n} \\ & & & k_{n,n-1} & k_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ - \\ - \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ - \\ - \\ 0 \end{Bmatrix}$$

e, in forma simbolica:

$$[m] \cdot \{\ddot{x}\} + [k_{i,j}] \cdot \{x\} = \{0\}$$

Come si può osservare quest'ultima equazione è formalmente analoga a quella vista per i sistemi ad 1 g.d.l. in assenza di smorzamento.

È ancora da osservare che, nell'esempio considerato, la matrice delle masse è diagonale e quella dei coefficienti di rigidità è tridiagonale; ciò è dovuto alla particolare struttura del sistema che viene detto ad accoppiamento elastico adiacente. Nel caso generale, invece, tali matrici contengono anche altri termini.

In generale le pulsazioni naturali e le linee elastiche si ottengono come già visto nel par.4.8.1., ossia come autovalori ed autovettori della matrice [A] :

$$[A] = [M]^{-1} [k_{i,j}]$$

Esempio:

Si consideri il sistema rappresentato in fig.4.43, per il quale sono assegnati i valori delle masse e delle rigidità delle molle:

$$m_1=2 \text{ kg} ; m_2=5 \text{ kg} ; m_3=3 \text{ kg} ; m_4=8 \text{ kg} ;$$

$$K_1=20000 \text{ N/m} ; K_2=40000 \text{ N/m} ; K_3=30000 \text{ N/m} ;$$

$$K_4=30000 \text{ N/m} ; K_5=50000 \text{ N/m} ;$$

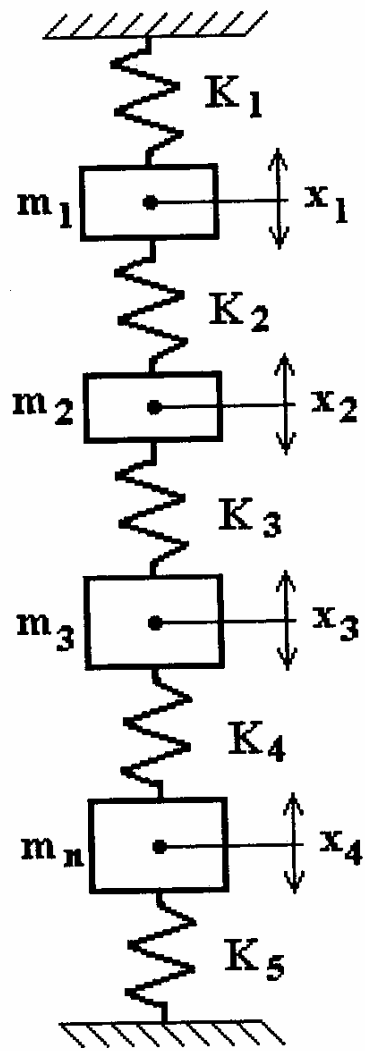


Fig.4.43

Si desidera calcolare le pulsazioni naturali e le linee elastiche.

Si procede come visto per il sistema a 2 g.d.l.: si calcolano, innanzi tutto, i coefficienti di rigidità:

$$k_{11} = K_1 + K_3 = 5 \cdot 10^4 \text{ N/m}$$

$$k_{22} = K_2 + K_3 = 7 \cdot 10^4 \text{ N/m}$$

$$k_{12} = k_{21} = -K_2 = -4 \cdot 10^4 \text{ N/m}$$

$$k_{13} = k_{31} = k_{14} = k_{41} = 0$$

$$k_{23} = k_{32} = -K_3 = -3 \cdot 10^4 \text{ N/m}$$

$$k_{24} = k_{42} = 0$$

$$k_{34} = k_{43} = -K_4 = -3 \cdot 10^4 \text{ N/m}$$

$$k_{33} = K_3 + K_4 = 6 \cdot 10^4 \text{ N/m}$$

$$k_{44} = K_4 + K_5 = 8 \cdot 10^4 \text{ N/m}$$

Si scrive poi il sistema di equazioni del moto:

$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 5 & & \\ & & 3 & \\ & & & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{Bmatrix} + 10^4 \begin{bmatrix} 6 & -4 & & \\ -4 & 7 & -3 & \\ & -3 & 6 & -3 \\ & & -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Si calcolano autovalori ed autovettori della matrice:

$$[A] = [M]^{-1}[k_{ij}] = 10^4 \begin{bmatrix} 3 & -2 & & \\ -0,8 & 1,4 & -0,6 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -0,375 & 1 \end{bmatrix}$$

e si ottengono quindi:

$$\text{Autovalori : } \{\omega_i^2\} = \begin{Bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{Bmatrix} = 10^4 \begin{Bmatrix} 0,296 \\ 0,893 \\ 2,422 \\ 3,789 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Autovettori : } [u_{ij}] = \begin{bmatrix} -0,469 & -0,462 & -0,464 & -0,908 \\ -0,635 & -0,487 & -0,134 & 0,358 \\ -0,542 & 0,204 & 0,847 & -0,217 \\ -0,289 & 0,713 & -0,223 & 0,029 \end{bmatrix}$$

Le pulsazioni naturali si ottengono come radici quadrate degli autovalori:

$$\omega_1 = 54,41 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 94,48 \text{ rad/s}$$

$$\omega_3 = 155,66 \text{ rad/s}$$

$$\omega_4 = 194,66 \text{ rad/s}$$

Se si impone la condizione di normalizzazione $u_{1j}=1$, le ampiezze delle linee elastiche delle altre masse si calcolano come rapporto tra l'autovettore u_{ij} (con $i \neq 1$) e l'autovettore u_{1j} :

Primo modo di vibrare $\omega = \omega_1$:

$$X_{1,1} = 1 \quad ; \quad X_{2,1} = u_{2,1} / u_{1,1} = 1,36 ;$$

$$X_{3,1} = u_{3,1} / u_{1,1} = 1,16 \quad ; \quad X_{4,1} = u_{4,1} / u_{1,1} = 0,62 .$$

Analogamente si procede per gli altri modi di vibrare.

Le linee elastiche sono mostrate in fig. 4.44.

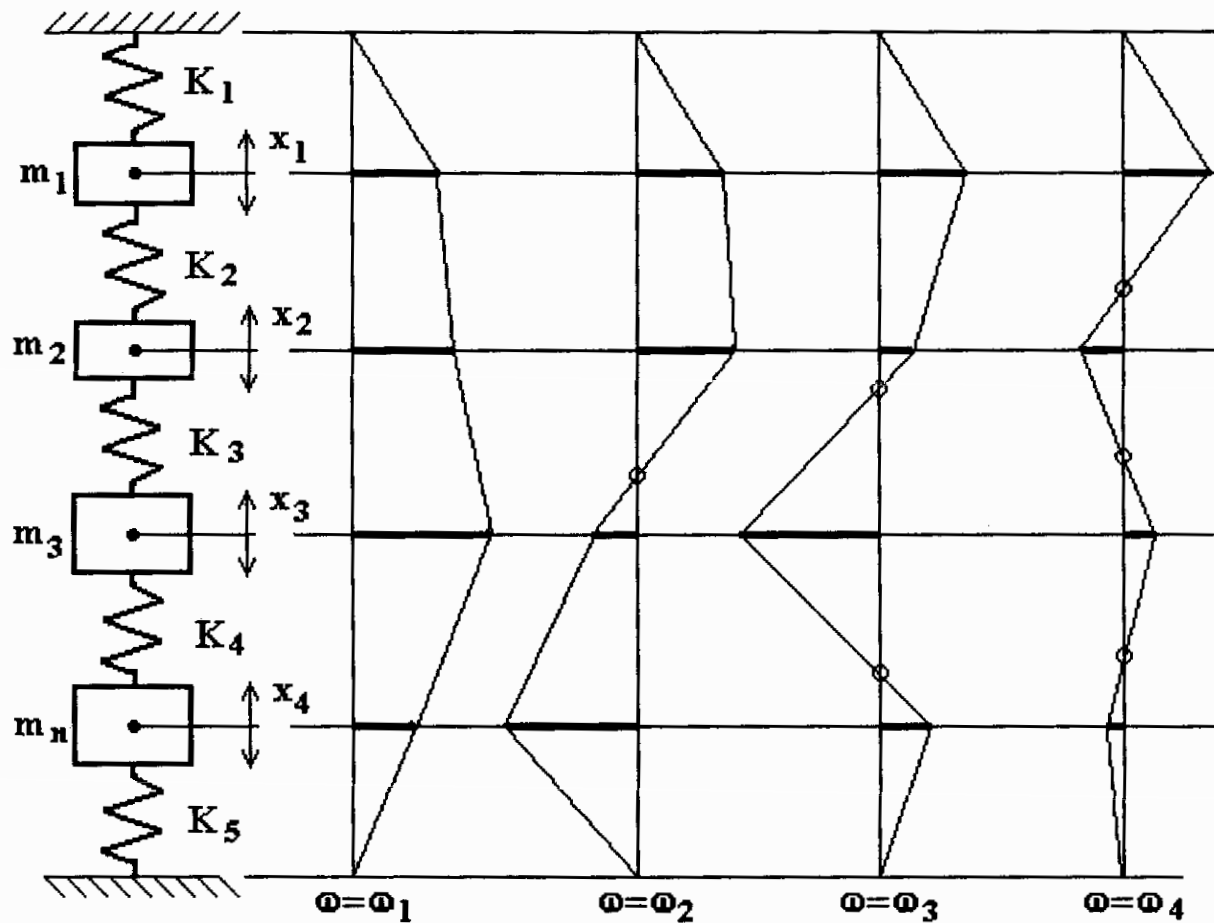


fig.4.44

Come si può osservare la linea elastica del primo modo di vibrare non ha nodi, quella del secondo ha 1 nodo, quella del terzo ha 2 nodi e quella

del quarto ha 3 nodi. In generale, nelle linee elastiche dei sistemi ad n g.d.l., il numero di nodi è pari al numero del modo di vibrare meno 1.

Moto forzato

Si consideri che sul sistema rappresentato in fig.4.43 agiscono alcune forze armoniche, ciascuna di esse applicata su di una massa, di ampiezza F_i , ciascuna con una fase iniziale ϕ_i e tutte con la stessa pulsazione ω . Le equazioni del moto si scrivono, in forma simbolica:

$$[m] \cdot \{\ddot{x}\} + [k_{i,j}] \cdot \{x\} = \{F_i \cos(\omega t + \phi_i)\} \quad (4.26)$$

Si dimostra (teorema di espansione) che le ampiezze delle oscillazioni forzate delle masse valgono:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= u_{11}\eta_1(t) + u_{12}\eta_2(t) + \dots + u_{1n}\eta_n(t) \\ x_2(t) &= u_{21}\eta_1(t) + u_{22}\eta_2(t) + \dots + u_{2n}\eta_n(t) \\ &\dots\dots\dots \\ x_n(t) &= u_{n1}\eta_1(t) + u_{n2}\eta_2(t) + \dots + u_{nn}\eta_n(t) \end{aligned} \quad (4.27)$$

dove u_{ij} sono gli autovettori e le $\eta_j(t)$ sono delle coordinate normali che consentono di risolvere il sistema di n equazioni in n incognite (4.26) come un insieme di n equazioni indipendenti. Si dimostra infatti che la generica $\eta_j(t)$ vale:

$$\eta_j(t) = \eta_{st}^{(j)} A^{(j)} \cos(\omega t + \psi^{(j)})$$

Si osservi che la precedente relazione è formalmente simile a quella già vista per i sistemi forzati ad 1 g.d.l. . I termini che compaiono in tale relazione valgono:

$$\eta_{st}^{(j)} = \frac{\left| \sum_1^n \vec{F}_i u_{ij} \right|}{\sum_1^n m_i u_{ij}^2} \cdot \frac{1}{\omega_j^2}$$

ed è detta ampiezza di equilibrio;

$$A^{(j)} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_j^2}}$$

e rappresenta il coefficiente di amplificazione del modo di vibrare j -esimo, essendo ω_j la pulsazione di tale modo di vibrare. Infine, il termine $\psi^{(j)}$ rappresenta la fase del vettore risultante degli n vettori $F_i u_{ij}$, come mostrato in fig. 4.45.

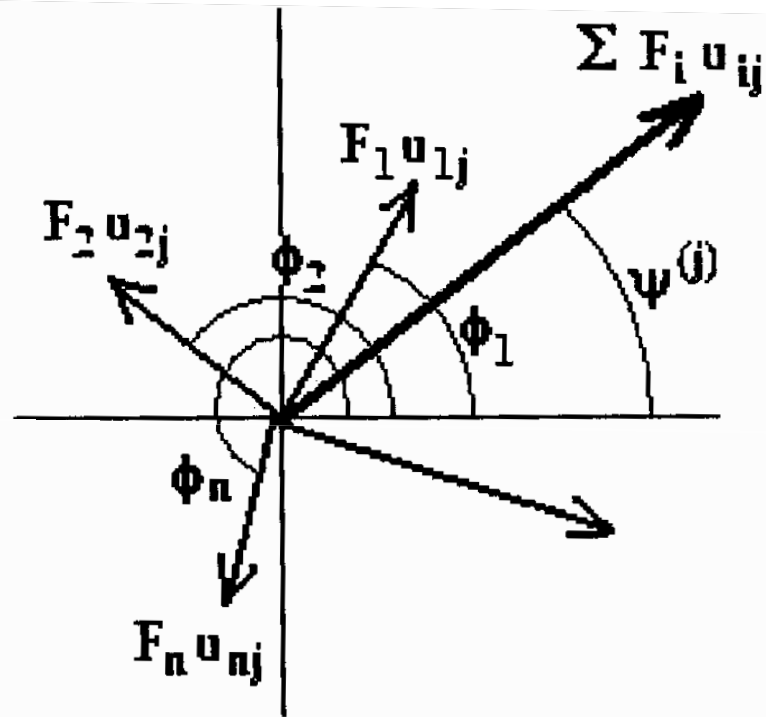


Fig.4.45

In definitiva, quindi, risulta:

$$\begin{aligned}
 x_i(t) = & u_{i1} \frac{\left| \sum_1^n \vec{F}_i u_{i1} \right|}{\sum_1^n m_i u_{i1}^2} \cdot \frac{1}{\omega_1^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}} \cos(\omega t + \psi^{(1)}) + \\
 & + u_{i2} \frac{\left| \sum_1^n \vec{F}_i u_{i2} \right|}{\sum_1^n m_i u_{i2}^2} \cdot \frac{1}{\omega_2^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}} \cos(\omega t + \psi^{(2)}) + \dots\dots\dots \\
 & \dots\dots + u_{in} \frac{\left| \sum_1^n \vec{F}_i u_{in} \right|}{\sum_1^n m_i u_{in}^2} \cdot \frac{1}{\omega_n^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \cos(\omega t + \psi^{(n)})
 \end{aligned}$$

Tale relazione consente di calcolare la legge del moto di ciascuna massa.

DINAMICA DEI ROTORI

Velocità critica flessionale

Si definisce *rotore* il sistema composto da un albero sul quale sono calettati degli elementi detti *dischi* (dischi di turbine o compressori, palettature, etc). In generale, l'albero va visto come un corpo elastico continuo con inerzia e rigidità variabili lungo l'asse. Tale sistema è piuttosto complesso da analizzare, ma, se sono valide le seguenti ipotesi:

- dimensione assiale dei dischi piccola rispetto alla lunghezza totale dell'albero,
- massa dei dischi grande rispetto a quella del tronco d'albero su cui essi sono calettati,
- momenti d'inerzia dei dischi trascurabili,

allora il modello che risulta da queste semplificazioni è quello di albero elastico privo di massa su cui sono calettati elementi assimilabili a masse concentrate.

Su tali sistemi, interessa studiare l'effetto combinato dello squilibrio statico e della deformabilità dell'albero.

1 Cenni storici

Lo studio della dinamica dei rotori nasce a seguito dello sviluppo della macchina a vapore e degli impianti di potenza da essa derivati. Una prima analisi si deve a Rankine, che nel 1869 dimostrò che il moto di un rotore costituito da un albero uniforme dotato di massa ed elasticità è stabile se la velocità di rotazione ω è minore di un certo valore, definito prima velocità critica ω_c , mentre è instabile per $\omega > \omega_c$. Per tutta la restante parte del secolo si ritenne che il funzionamento al di sopra della prima velocità critica fosse impossibile ed i rotori furono progettati per funzionare con $\omega < \omega_c$.

Nel 1900 De Laval dimostrò sperimentalmente che una turbina a vapore poteva funzionare stabilmente anche al di sopra della velocità critica, ma ai costruttori non era chiaro perché alcune macchine potevano funzionare mentre altre, progettate apparentemente con gli stessi criteri, erano soggette a gravi rotture.

Una serie di studi condotti a cavallo del 1900 mostrò che esistono degli intervalli di velocità entro i quali un rotore può sviluppare vibrazioni violente: tali intervalli furono definiti *velocità critiche*. Se il rotore viene fatto funzionare in uno di questi intervalli di

velocità, si può verificare la rottura dei cuscinetti a causa delle forze ad essi trasmesse, con conseguente distruzione del rotore, oppure il degrado delle tenute a labirinto dovuto alle eccessive deformazioni del rotore, con conseguente perdita di efficienza.

Successivamente Dunkerley considerò il rotore come un albero elastico ed i cuscinetti come appoggi, dimostrando che le velocità critiche coincidono con le pulsazioni naturali di vibrazione trasversale dell'albero. Pertanto, poiché inevitabilmente un rotore non è mai perfettamente bilanciato, quando la velocità di rotazione coincide con una delle pulsazioni naturali di vibrazione, gli sbilanciamenti eccitano il sistema in una condizione di risonanza.

L'effetto di questo studio fu di indurre i progettisti a realizzare rotori molto rigidi in modo tale da portare la prima pulsazione naturale al di sopra della velocità di funzionamento. Questa tendenza si scontrava con il continuo aumento delle velocità di progetto delle macchine, dovuto a ragioni economiche: risultava sempre più difficile e costoso, a causa degli incrementi di diametro del rotore necessari per ottenere la rigidità desiderata, costruire rotori funzionanti al di sotto della prima velocità critica.

Nel 1919 Jeffcott considerò, analogamente a Dunkerley, un albero elastico su appoggi rigidi, ma incluse nell'analisi la presenza di smorzamento, dimostrando che:

- la *precessione sincrona* (moto in cui il piano in cui giace la deformata dell'albero ruota con la stessa velocità angolare dell'albero) è l'unico moto possibile a regime;
- le forze scaricate sui cuscinetti crescono con la velocità di rotazione ω fino ad un valore massimo, per poi decrescere.

Questi risultati portarono alla definizione di velocità critica come velocità alla quale la forza trasmessa ai cuscinetti è massima.

Lo studio di Jeffcott dimostrò che era possibile e talvolta opportuno operare al di sopra della prima velocità critica. Ne derivò una proliferazione di turbine, compressori e pompe con rotori molto leggeri adatti a funzionare ben al di sopra della prima velocità critica. Tuttavia si verificarono seri inconvenienti su rotori funzionanti ad una velocità di rotazione circa doppia della prima velocità critica ($\omega = 2\omega_c$).

Una serie di studi successivi chiarì che il problema era dovuto ad instabilità dei supporti lubrificati (oil whip) e che il moto del rotore si mantiene stabile per $\omega < 2\omega_c$.

2 Rotore di Jeffcott

Si considera il sistema composto da un albero elastico privo di massa poggiato su due supporti rigidi con calettato in mezzeria un disco di massa m (figura 1). Si suppone che il disco non sia equilibrato staticamente, e che quindi il centro di massa G non coincida col centro del disco O_1 , ma si trovi ad una certa distanza ε , detta eccentricità del disco. Si suppone inoltre trascurabile l'azione del peso.

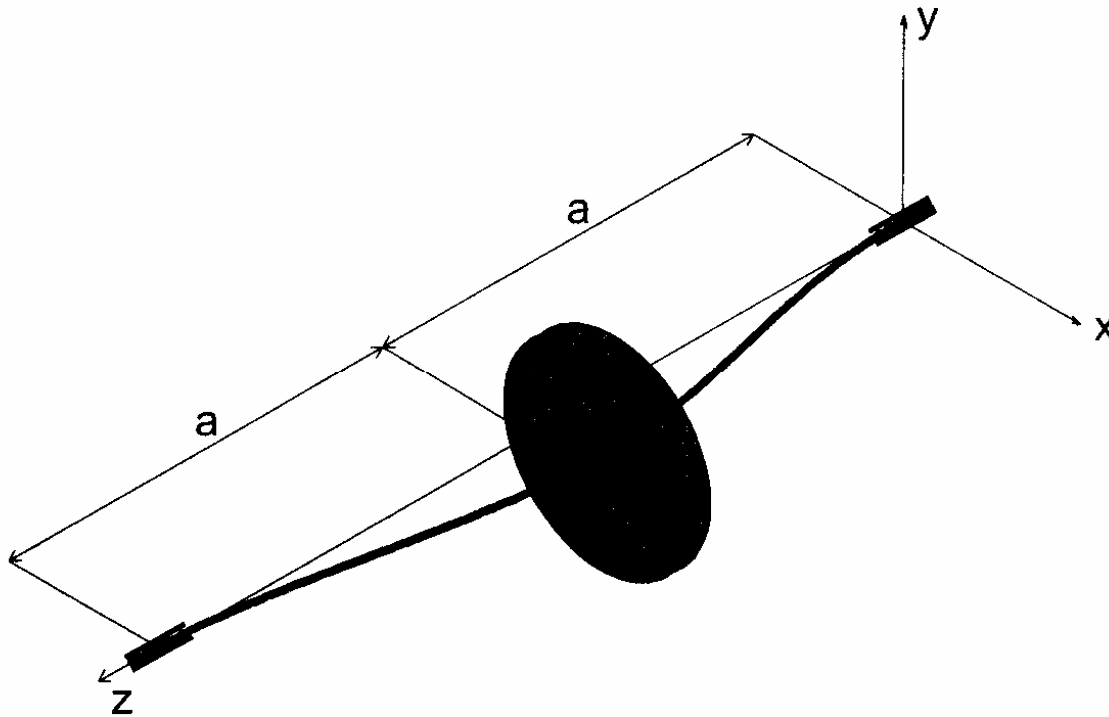


Figura 1: Rotore di Jeffcott.

La ragione per cui si suppone che il disco sia calettato in mezzeria è quella di poter trascurare l'effetto del momento risultante delle forze d'inerzia. Infatti, quando l'albero ruota ad una certa velocità angolare ω , la forza centrifuga provoca un'inflessione simmetrica dell'albero, e quindi il piano in cui giace il disco non cambia. Pertanto l'asse di rotazione del disco non varia e non nasce alcun momento risultante delle forze d'inerzia.

Si vuole determinare il moto del sistema considerando l'albero rotante a velocità $\omega = \text{costante}$. Per ricavare l'equazione del moto, si considera una sezione con un piano perpendicolare all'asse z e passante per il centro di massa G del disco (figura 2). Anche il centro O_1 del disco si muove in questo piano: quindi il segmento $\overline{O_1G}$ è solidale al disco e ruota con velocità angolare ω , formando un angolo ωt con l'asse x preso come riferimento. Pertanto il sistema possiede due gradi di libertà, che corrispondono alle coordinate x_1 e y_1 di O_1 : infatti, nota la posizione di O_1 e la velocità angolare ω , è possibile ricavare in ogni istante la posizione di G .

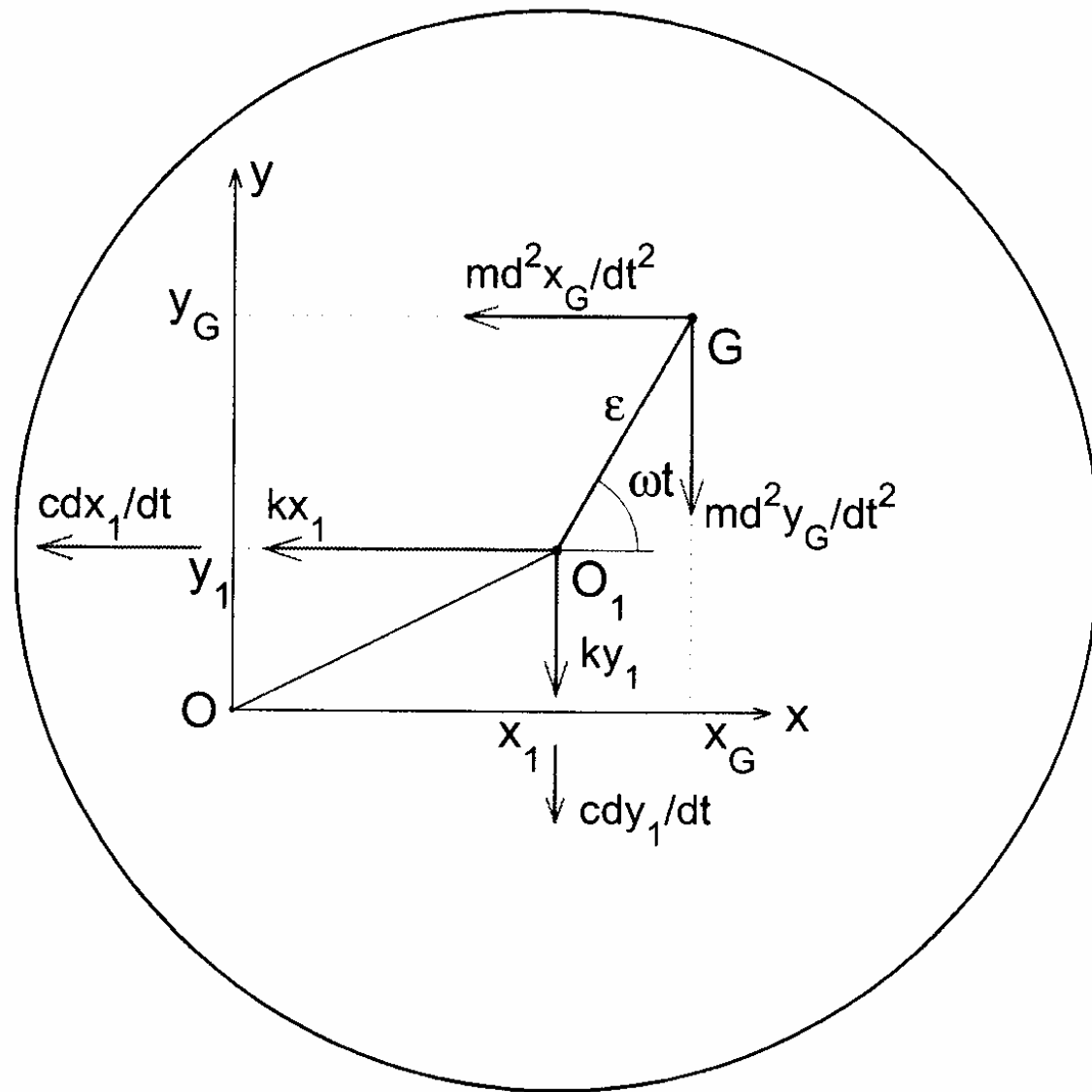


Figura 2: Diagramma del corpo libero del disco.

Ricapitolando, si ha:

O : traccia dell'asse di rotazione

O_1 : centro del disco (collegamento tra disco e albero)

G : centro di massa del disco

$\overline{O_1G}$: segmento solidale al disco, di lunghezza ε

x_1, y_1 : coordinate del centro del disco (incognite del problema)

Nel diagramma di corpo libero del disco sono presenti le componenti della forza d'inerzia, della forza elastica (richiamo elastico dell'albero) e della forza smorzante (attrito tra disco e aria o smorzamento interno del materiale dell'albero). Sommando le componenti di forza sugli assi x e y si ottiene:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_G + c\dot{x}_1 + kx_1 = 0 \\ m\ddot{y}_G + c\dot{y}_1 + ky_1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

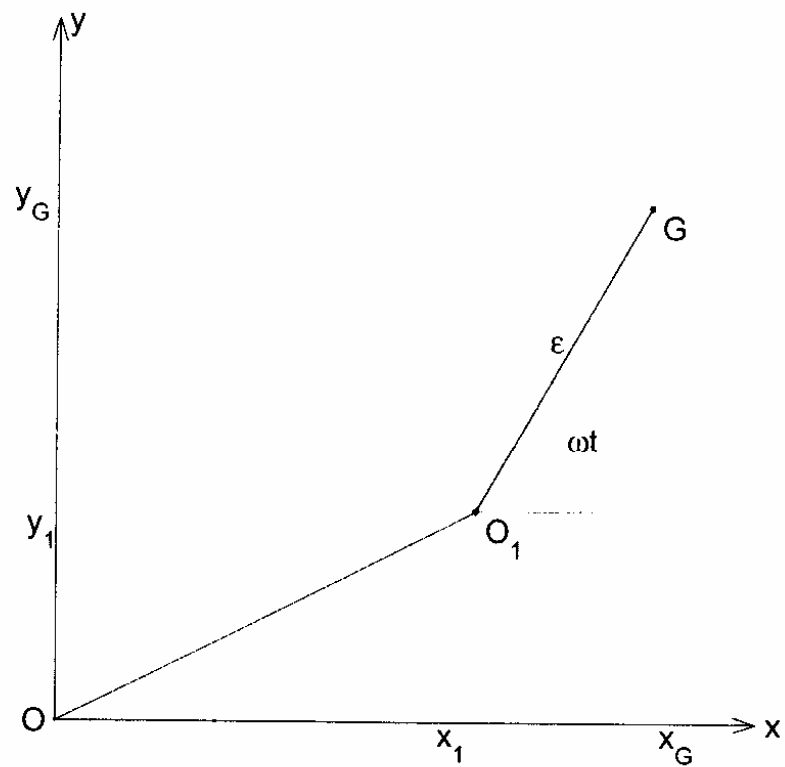


Figura 3: Coordinate del centro di massa del disco.

ed essendo (figura 3):

$$\begin{cases} x_G = x_1 + \varepsilon \cos \omega t \\ y_G = y_1 + \varepsilon \sin \omega t \end{cases} \quad \text{da cui:} \quad \begin{cases} \ddot{x}_G = \ddot{x}_1 - \varepsilon \omega^2 \cos \omega t \\ \ddot{y}_G = \ddot{y}_1 - \varepsilon \omega^2 \sin \omega t \end{cases} \quad (2)$$

si ottiene:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 = m\varepsilon\omega^2 \cos \omega t \\ m\ddot{y}_1 + c\dot{y}_1 + ky_1 = m\varepsilon\omega^2 \sin \omega t \end{cases} \quad (3)$$

cioè due equazioni disaccoppiate in x_1 e y_1 . La soluzione di regime, per le due equazioni, si può porre rispettivamente nella forma:

$$\begin{cases} x_1(t) = R_x \cos(\omega t - \varphi_x) \\ y_1(t) = R_y \sin(\omega t - \varphi_y) \end{cases} \quad (4)$$

Sostituendo nell'equazione del moto (3) si possono ricavare i valori delle ampiezze e delle fasi. Risulta:

$$\begin{cases} R_x = \frac{m\varepsilon\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \\ R_y = \frac{m\varepsilon\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} = R_x = R \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \tan \varphi_x = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \\ \tan \varphi_y = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \tan \varphi_x \end{cases} \implies \varphi_x = \varphi_y = \varphi \quad (6)$$

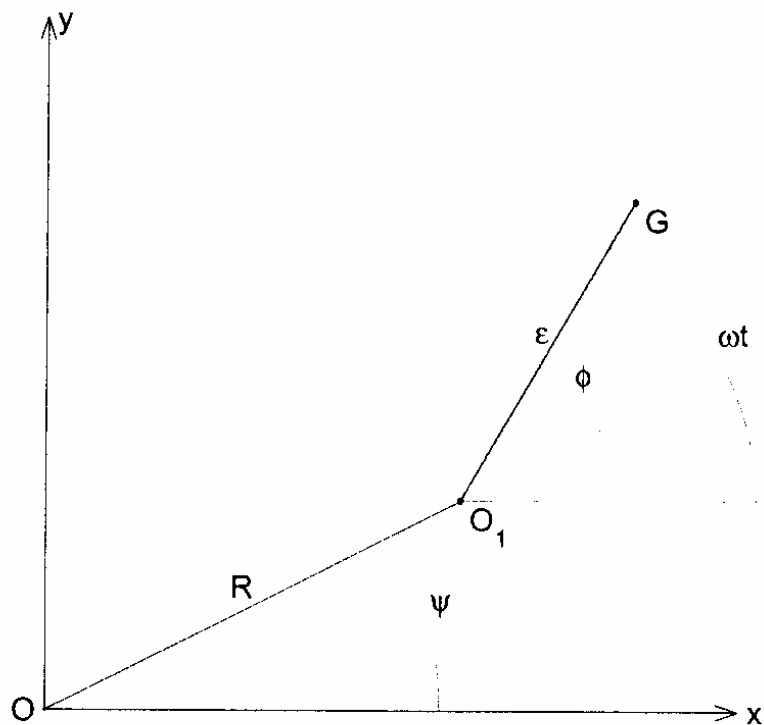


Figura 4: Relazione tra φ e ψ .

e quindi:

$$\begin{cases} x_1(t) = R \cos(\omega t - \varphi) = R \cos \psi \\ y_1(t) = R \sin(\omega t - \varphi) = R \sin \psi \end{cases} \quad (7)$$

avendo posto (figura 4):

$$\psi = \omega t - \varphi$$

Ne consegue che il punto O_1 si muove su una traiettoria circolare di centro O con velocità angolare:

$$\dot{\psi} = \omega$$

la stessa con la quale ruota il disco e quindi il segmento $\overline{O_1G}$) ad esso solidale. Pertanto la linea spezzata OO_1G ruota rigidamente con velocità angolare ω : infatti i due segmenti che la compongono (OO_1 e O_1G) ruotano entrambi con velocità angolare ω . Il tipo di moto in questione viene detto *precessione sincrona*, in quanto il piano della deformata, rappresentato nella sezione considerata dal segmento OO_1 , ruota con velocità angolare ω identica alla velocità di rotazione del rotore.

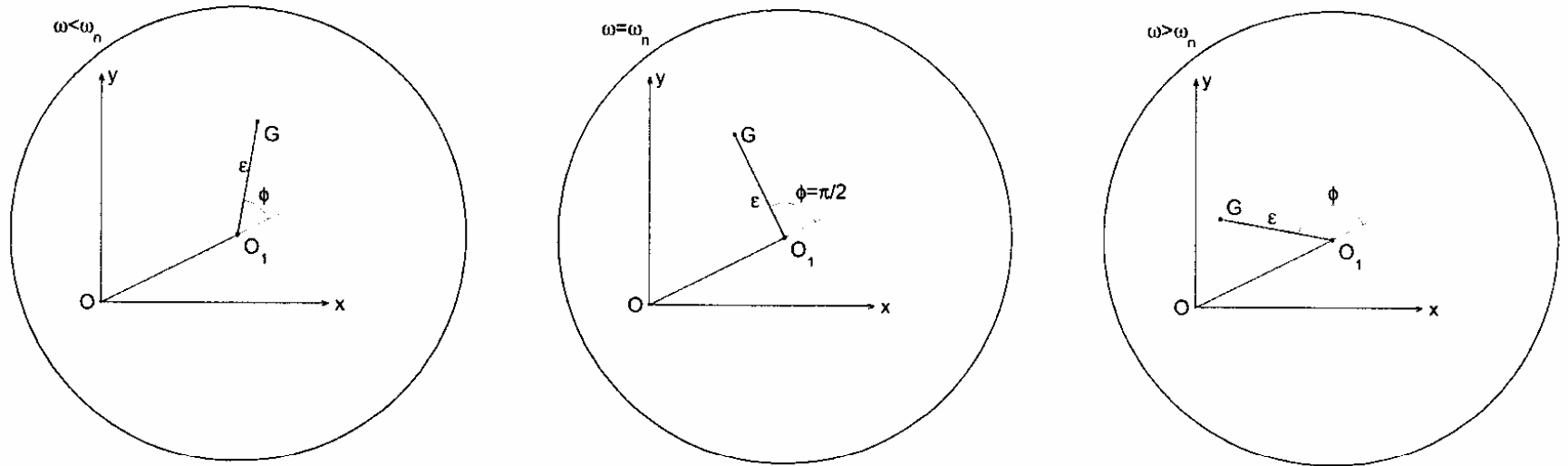


Figura 5: Moto a regime per $\omega < \omega_n$, $\omega = \omega_n$ e $\omega > \omega_n$.

Ricordando che:

$$\omega_n^2 = k/m \quad c_c = 2m\omega_n \quad \zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n}$$

si possono esprimere sia il rapporto R/ϵ tra ampiezza della deformata e eccentricità del disco che l'angolo di fase φ :

$$\frac{R}{\varepsilon} = \frac{m\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} = \frac{\omega^2/\omega_n^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (8)$$

$$\tan \varphi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (9)$$

avendo diviso numeratore e denominatore per k nell'ultimo passaggio.

Analizzando le due ultime relazioni è possibile trarre alcune importanti conclusioni. Fissato un valore del fattore di smorzamento $\zeta \neq 0$, la fase φ cresce al crescere di ω . In particolare si ha che per:

$$\omega < \omega_n \quad \implies \quad \tan \varphi > 0 \quad \implies \quad 0 < \varphi < \pi/2$$

$$\omega = \omega_n \quad \implies \quad \tan \varphi \rightarrow \infty \quad \implies \quad \varphi = \pi/2$$

$$\omega > \omega_n \quad \implies \quad \tan \varphi < 0 \quad \implies \quad \pi/2 < \varphi < \pi$$

e pertanto il centro di massa G è rispettivamente esterno, allineato o interno alla perpendicolare ad OO_1 (figura 5).

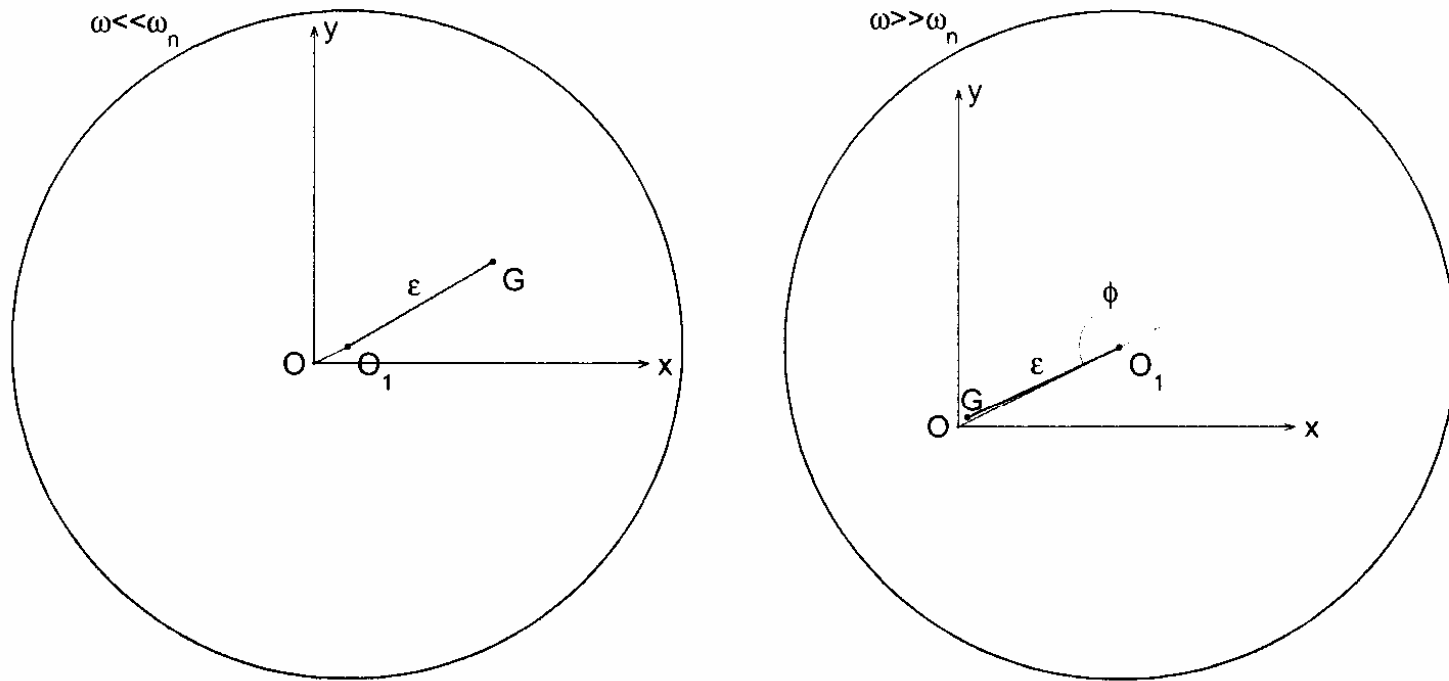


Figura 6: Moto a regime per $\omega \ll \omega_n$ e $\omega \gg \omega_n$.

Se in particolare $\omega \ll \omega_n$, allora $\varphi \cong 0$, mentre se $\omega \gg \omega_n$, allora $\varphi \cong \pi$ (figura 6) ed inoltre $R/\varepsilon \cong 1$, cioè il centro di massa tende a portarsi sull'asse di rotazione (fenomeno dell'*autocentrimento*).

Nel caso ideale di smorzamento nullo, si ha sempre $\tan \varphi = 0$, e quindi $\varphi = 0$ o $\varphi = \pi$. Poiché per $\zeta = 0$:

$$\frac{R}{\varepsilon} = \frac{\omega^2/\omega_n^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

si ha:

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{per } \omega < \omega_n \\ \pi & \text{per } \omega > \omega_n \end{cases}$$

Quindi i punti O , O_1 e G sono allineati, con G posto rispettivamente all'esterno o all'interno del segmento OO_1 , in una situazione simile a quella rappresentata in figura 6. Se invece $\omega = \omega_n$, l'angolo φ risulta indeterminato nel caso di smorzamento nullo.

Il grafico di R/ε in funzione di ω/ω_n è mostrato in figura 7 per vari valori del fattore di smorzamento ζ . L'ampiezza della deformata è inizialmente crescente con ω e raggiunge un massimo per un valore della velocità angolare ω_c che si ricava dall'equazione:

$$\frac{d(R/\varepsilon)}{d(\omega/\omega_n)} = 0 \quad (10)$$

Si ottiene, dopo svariati calcoli:

$$\frac{\omega_c}{\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}} \cong 1 \quad . \quad (11)$$

per piccoli valori di ζ , ossia:

$$\omega_c \cong \omega_n \quad (12)$$

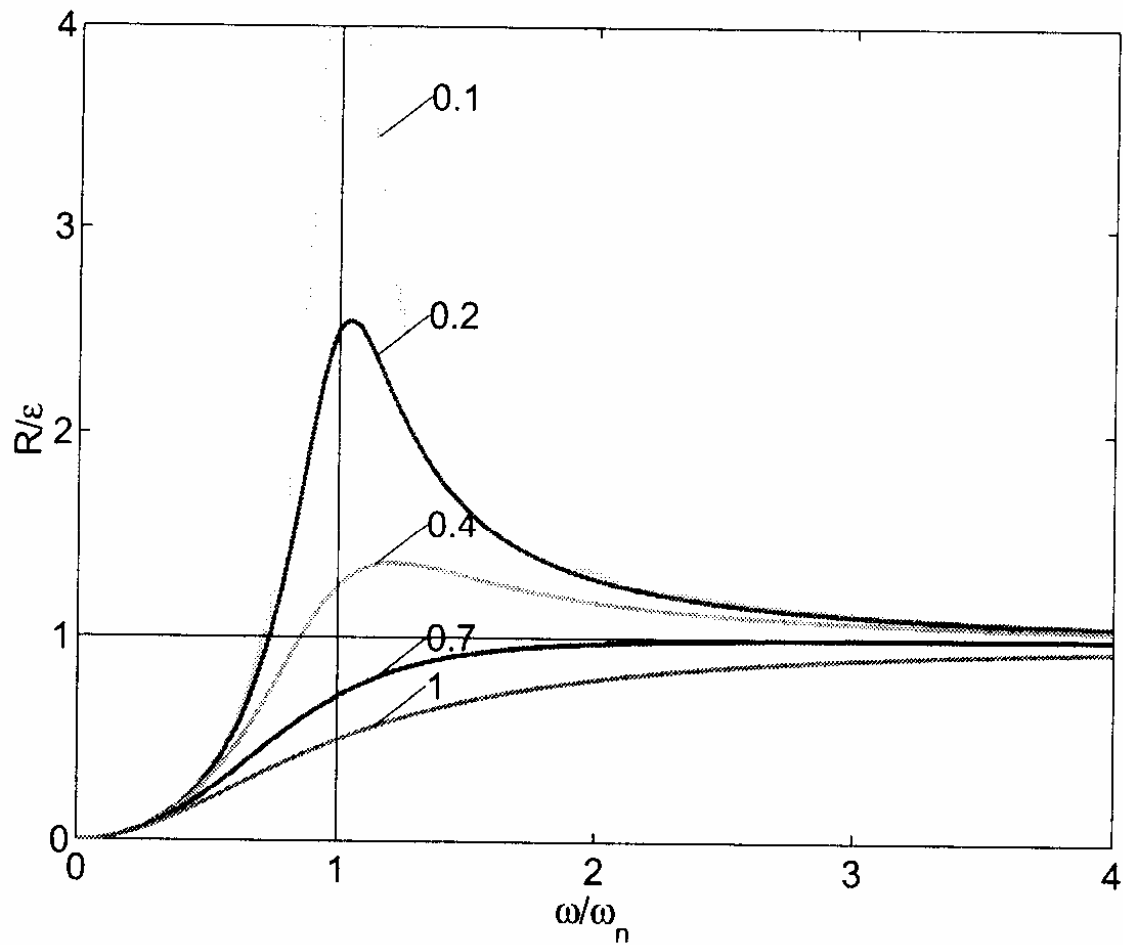


Figura 7: Rapporto tra ampiezza della deformata e eccentricità del disco.

La velocità angolare ω_c si definisce *velocità critica flessionale* dell'albero ed è anche la velocità in corrispondenza alla quale si ha la sollecitazione massima dei cuscinetti. In pratica, essa corrisponde alla pulsazione naturale ω_n dell'albero, il che conferma la conclusione di Dunkerley.

Dallo studio condotto si vede che quello della velocità critica è un fenomeno di risonanza. Quindi l'ampiezza R della deformata (figura 7) è tanto minore quanto maggiore è lo smorzamento e quanto minore è l'eccentricità ε . La forza che si scarica sui cuscinetti può quindi essere limitata con un accurato equilibramento statico.

Inoltre, analogamente a quanto visto per le vibrazioni forzate, l'ampiezza R di regime non viene raggiunta istantaneamente, ma cresce lentamente nel tempo. Quindi l'albero può ruotare alla velocità critica per brevi intervalli di tempo senza che si verifichino inconvenienti: questo passaggio è ovviamente necessario per superare la velocità critica.

Infatti l'albero può funzionare anche a velocità superiori a quella critica: in questo caso il centro di massa tende ad avvicinarsi all'asse di rotazione all'aumentare della velocità.

Benché il calcolo delle velocità critiche flessionali possa essere ricondotto a quello delle pulsazioni naturali delle vibrazioni trasversali, è necessario mettere in luce la fondamentale differenza fisica tra un albero che vibra e un albero che ruota. Nel primo caso l'albero si flette alternativamente dalle due parti, determinando nei vari punti della sezione sollecitazioni alternate di trazione e compressione, che possono provocare la fatica del materiale. Nel secondo caso invece il piano della deformata ruota alla stessa velocità dell'albero, che resta inflesso sempre nello stesso modo, e la sollecitazione è praticamente di tipo statico.

Elementi di dinamica dei rotori rigidi

Normalmente il termine rotore viene utilizzato per indicare la parte rotante di una macchina a regime assoluto come il motore elettrico, la turbina a vapore eccetera; tuttavia, in generale, si dice rotore qualunque organo meccanico che sia dotato di moto rotatorio intorno ad un asse come ad esempio le eliche, l'albero a gomiti di una macchina alternativa, le ruote di un veicolo eccetera.

Con il termine rigido si intende un rotore che ruoti ad una velocità inferiore ad un terzo della sua prima velocità critica flessionale e che, quindi, si comporti come un corpo rigido.

Sbilanciamento di un rotore

Malgrado ogni possibile accorgimento, in linea di principio non è possibile ottenere che un rotore sia perfettamente bilanciato; in altri termini, non è possibile, cioè, ottenere che la distribuzione della (o delle) massa del rotore stesso sia tale che esso ruoti intorno ad un asse che risulti essere baricentrico e principale di inerzia.

Sbilanciamento statico

Si consideri il rotore indicato schematicamente in fig.1.

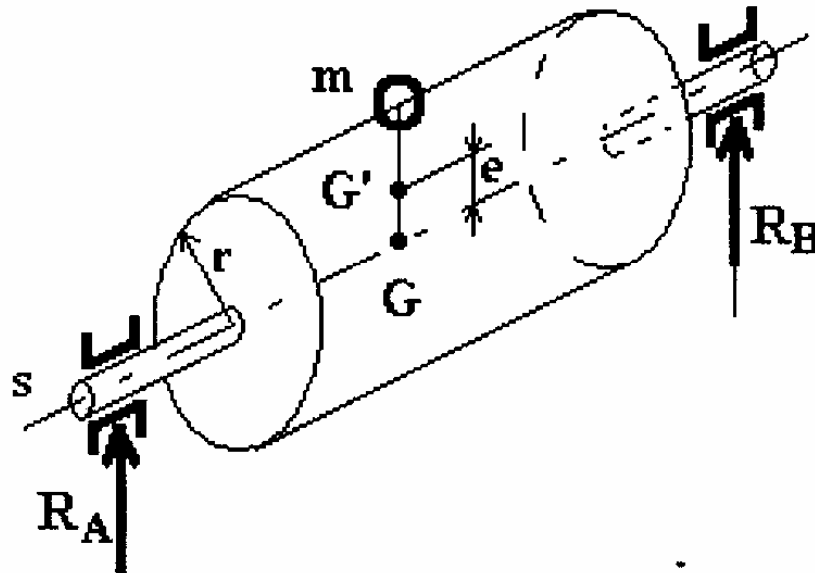


Fig.1

Esso è (idealmente) costituito da un cilindro idealmente bilanciato che ruoterebbe attorno ad un asse passante per il baricentro G (asse baricentrico) e principale di inerzia, sul quale è posta una massa m , di dimensioni trascurabili, ad una distanza r dall'asse di rotazione.

Per la presenza della massa m il baricentro del rotore si sposta lungo il raggio che congiunge il baricentro con la massa e si porta in una posizione indicata con G' ad una distanza e dalla posizione G . L'asse di rotazione non è, ora, più baricentrico e, se il rotore ruota ad una velocità ω , la massa m è sede di una forza di inerzia (centrifuga) pari a :

$$F_c = m r \omega^2 \quad (8.1)$$

Detta M la massa del rotore ed indicando con R_A ed R_B le reazioni (vincolari) dei due cuscinetti dovute alla presenza dello sbilanciamento, le equazioni cardinali della dinamica (v. par.2.7) si scrivono:

$$\begin{aligned} \vec{R}_A + \vec{R}_B + M e \omega^2 &= 0 \\ \vec{M}_G^{(e)} &= 0 \end{aligned}$$

Esso è (idealmente) costituito da un cilindro idealmente bilanciato che ruoterebbe attorno ad un asse passante per il baricentro G (asse baricentrico) e principale di inerzia, sul quale è posta una massa m , di dimensioni trascurabili, ad una distanza r dall'asse di rotazione.

Per la presenza della massa m il baricentro del rotore si sposta lungo il raggio che congiunge il baricentro con la massa e si porta in una posizione indicata con G' ad una distanza e dalla posizione G . L'asse di rotazione non è, ora, più baricentrico e, se il rotore ruota ad una velocità ω , la massa m è sede di una forza di inerzia (centrifuga) pari a :

$$F_c = m r \omega^2 \quad (8.1)$$

Detta M la massa del rotore ed indicando con R_A ed R_B le reazioni (vincolari) dei due cuscinetti dovute alla presenza dello sbilanciamento, le equazioni cardinali della dinamica (v. par.2.7) si scrivono:

$$\begin{aligned} \vec{R}_A + \vec{R}_B + M e \omega^2 &= 0 \\ \vec{M}_G^{(e)} &= 0 \end{aligned}$$

E' da osservare che nello scrivere le equazioni cardinali della dinamica si è omessa la forza peso del rotore che non ha influenza sulle condizioni di bilanciamento; pertanto, le reazioni dei cuscinetti sono quindi, come detto, quelle dovute solamente allo sbilanciamento. A ciascuna di queste ultime andrà sommata la reazione dovuta al peso del rotore per ottenere il carico agente su ciascun cuscinetto.

Le equazioni cardinali della dinamica, nella forma nella quale sono state scritte esprimono rispettivamente che :

- il risultante delle forze esterne (in questo caso la reazione dei cuscinetti) è pari alla forza di inerzia dovuta al moto del baricentro la cui accelerazione (centripeta) è pari ad $e \cdot \omega^2$
- il risultante dei momenti delle forze di inerzia rispetto al baricentro è nullo.

Tali condizioni sono indicate come sbilanciamento statico; questa denominazione scaturisce dal fatto che la presenza dello sbilanciamento può essere evidenziata anche senza mettere in rotazione il rotore; se si

dispone il rotore su cuscinetti che esercitino attrito trascurabile, v. fig.2, la forza peso, per eccentricità del baricentro genera un momento attorno all'asse del rotore che tenderà a farlo ruotare finché la congiungente il baricentro con l'asse di rotazione non sarà allineata con la verticale.

E' ancora da osservare che se si confronta la 8.1 con la prima equazione cardinale della dinamica, poiché, naturalmente, risulta:

$$\vec{R}^{(e)} = F_c$$

ne segue che:

$$M e \omega^2 = m r \omega^2$$

da cui si ricava l'eccentricità e del baricentro dovuta allo sbilanciamento:

$$e = r M/m \quad (8.2)$$

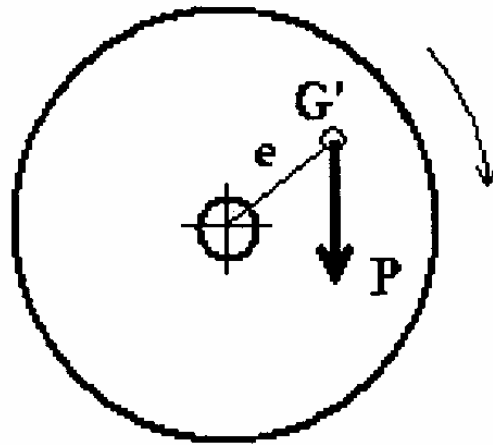


Fig. 2

Sbilanciamento dinamico

Si consideri il rotore indicato schematicamente in fig. 8.3. Esso è costituito da un cilindro idealmente bilanciato che ruota attorno ad un asse passante per il baricentro G e principale di inerzia, sul quale sono state poste due masse m_1 ed m_2 , di dimensioni trascurabili, uguali tra di loro entrambe poste ad una distanza r dall'asse di rotazione ed ad una uguale distanza assiale d dal baricentro.

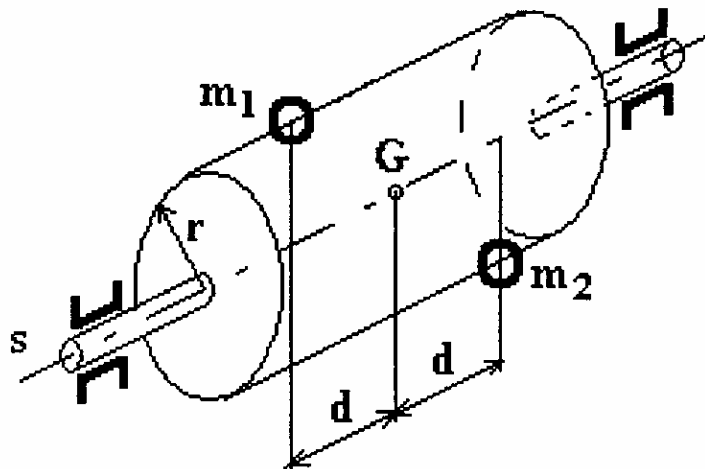


fig. 8.3

La presenza delle masse non cambia la posizione del baricentro del rotore e pertanto esso ruoterà ancora intorno ad un asse baricentrico ma tale asse non sarà più principale di inerzia.

Nella fig. 8.4 è riportata una vista del rotore di fig. 8.3, rappresentata in un piano contenente l'asse di rotazione e le due masse.

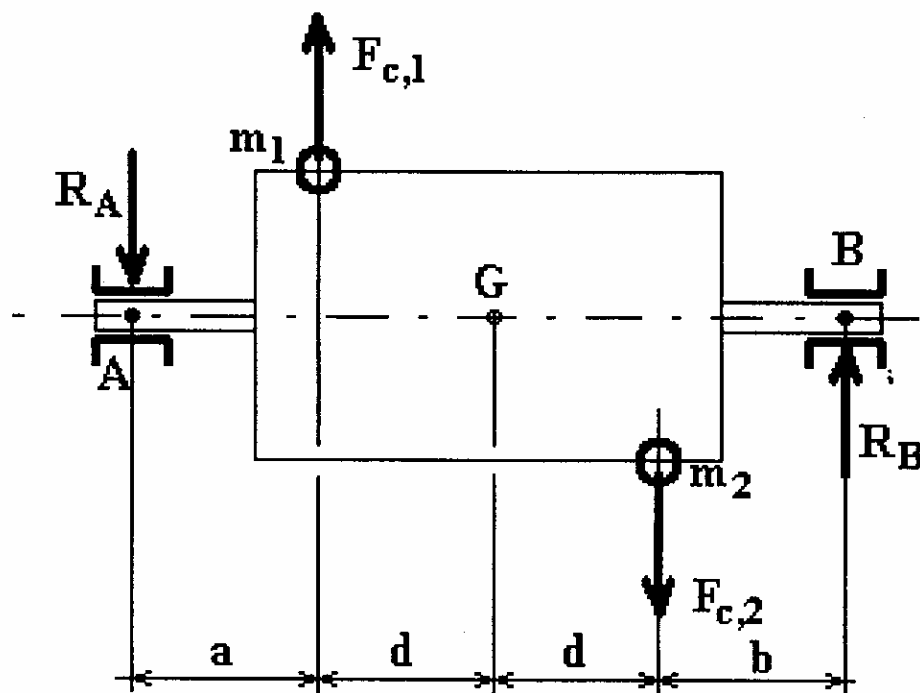


Fig. 8.4

E' evidente che essendo:

$$F_{c1} = - F_{c2}$$

risulti:

$$R^{(e)} = R_A + R_B = 0$$

Dove con R_A ed R_B si sono indicate le reazioni (vincolari) dei due cuscinetti, dovute alla presenza dello sbilanciamento. Il risultante dei momenti delle forze di inerzia rispetto al baricentro (scelto dunque come polo dei momenti) vale:

$$M_G = 2 F_c d$$

Le equazioni cardinali della dinamica per il rotore dinamicamente sbilanciato si scrivono dunque:

$$\vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{F}_{c,1} + \vec{F}_{c,2} = 0$$

$$\vec{R}_A (a + d) + \vec{R}_B (d + b) + \vec{F}_{c,1} d + \vec{F}_{c,2} d = 0$$

Da quanto visto a proposito di un rotore dinamicamente sbilanciato si può concludere che:

- il risultante delle forze esterne ed il risultante delle forze di inerzia sono entrambi nulli.
- il risultante dei momenti delle forze di inerzia rispetto al baricentro è diverso da zero.

Alcune considerazioni possono essere fatte se si scrivono le relazioni di equilibrio dei momenti delle forze che agiscono sul rotore rispetto ai due poli A e B (centri dei due cuscinetti). Nello scrivere tali relazioni si considereranno, per convenzione, con il segno + i momenti orari e con il segno – quelli antiorari.

Se si considerano solo le forze dovute allo sbilanciamento si ottiene:

$$\text{Rispetto al polo A: } - F_{c1} a + F_{c2} (a+2d) = F_c 2d$$

$$\text{Rispetto al polo B: } F_{c2} (b+2d) - F_{c1} b = F_c 2d$$

Come si può osservare il risultante dei momenti è identico per ciascuno dei tre poli scelti (G, A e B) ciò verifica il teorema secondo il quale: “Se

un sistema di forze ha risultante nullo, il risultante dei momenti di tali forze è indipendente dal polo rispetto al quale si calcolano i momenti”.

Se si considerano anche le reazioni dei cuscinetti si ottiene:

- Rispetto al polo A:

$$- F_{c1} a + F_{c2} (a+2d) - R_B (a+2d+b) = 0$$

Da cui si può ricavare la reazione del cuscinetto B dovuta allo sbilanciamento:

$$R_B = \frac{F_c 2d}{a + 2d + b}$$

- Rispetto al polo B:

$$- F_{c1} a + F_{c2} (a+2d) - R_B (a+2d+b) = 0$$

Da cui si può ricavare la reazione del cuscinetto A dovuta allo sbilanciamento:

$$R_A = \frac{F_c 2d}{a + 2d + b}$$

Come si può osservare dalle due precedenti relazioni, le reazioni (dovute allo sbilanciamento) dei due cuscinetti sono uguali in modulo (ma opposte in verso) come doveva essere perché sul sistema agisce una coppia di forze a risultante nullo.

Esempio:

In fig. 8.5 è riportato, schematicamente, un rotore il cui baricentro non giace sull'asse di rotazione. Sono noti:

La massa del rotore: $m = 10 \text{ kg}$

La eccentricità del baricentro: $e = 2 \text{ mm}$

Le distanze assiali del baricentro dalla mezzzeria dei cuscinetti:
 $a = 100 \text{ mm}$; $b = 200 \text{ mm}$

La velocità di rotazione $n = 2865 \text{ giri/min}$

Determinare le reazioni sugli appoggi dovute allo sbilanciamento

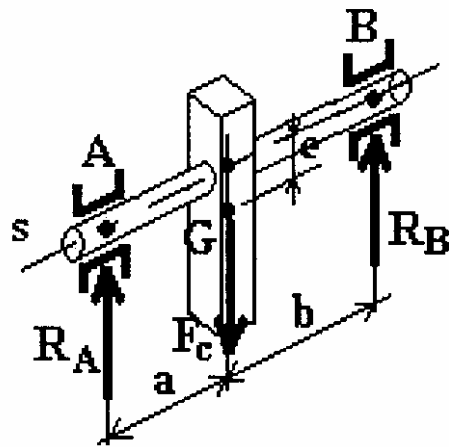


Fig. 8.5

Si calcola innanzi tutto l'ampiezza della forza di inerzia centrifuga:

$$F_c = m e \omega^2 = 10 \cdot 2 \cdot 10^{-3} (2865 \cdot 2\pi/60)^2 = 1800 \text{ N}$$

Le reazioni sui cuscinetti si calcolano scrivendo le equazioni di equilibrio intorno alle mezzerie dei cuscinetti:

$$F_c a - R_B (a+b) = 0$$

$$-F_c b + R_A (a+b) = 0$$

Da cui si ricavano:

$$R_B = F_c a/(a+b) = 1800 \cdot 100/300 = 600 \text{ N}$$

$$R_A = F_c b/(a+b) = 1800 \cdot 200/300 = 1200 \text{ N}$$

CENNI SUL BILANCIAMENTO DI UN ROTORE

Un rotore “reale” ruota attorno ad un asse che non è mai né baricentrico, né principale di inerzia, esso risulterà dunque sbilanciato sia staticamente che dinamicamente; ciò è dovuto o al fatto che il rotore stesso ha costruttivamente una distribuzione di masse che lo porta ad essere sbilanciato oppure, *se anche* ~~quando~~ ~~pure~~ esso fosse idealmente simmetrico rispetto all’asse di rotazione, inevitabili errori costruttivi e disuniformità della densità del materiale del quale è costituito lo renderebbero sbilanciato sia staticamente che dinamicamente.

Bilanciamento di un rotore rigido

In fig. 8.6 è riportato, schematicamente, un rotore sbilanciato sia staticamente che dinamicamente.

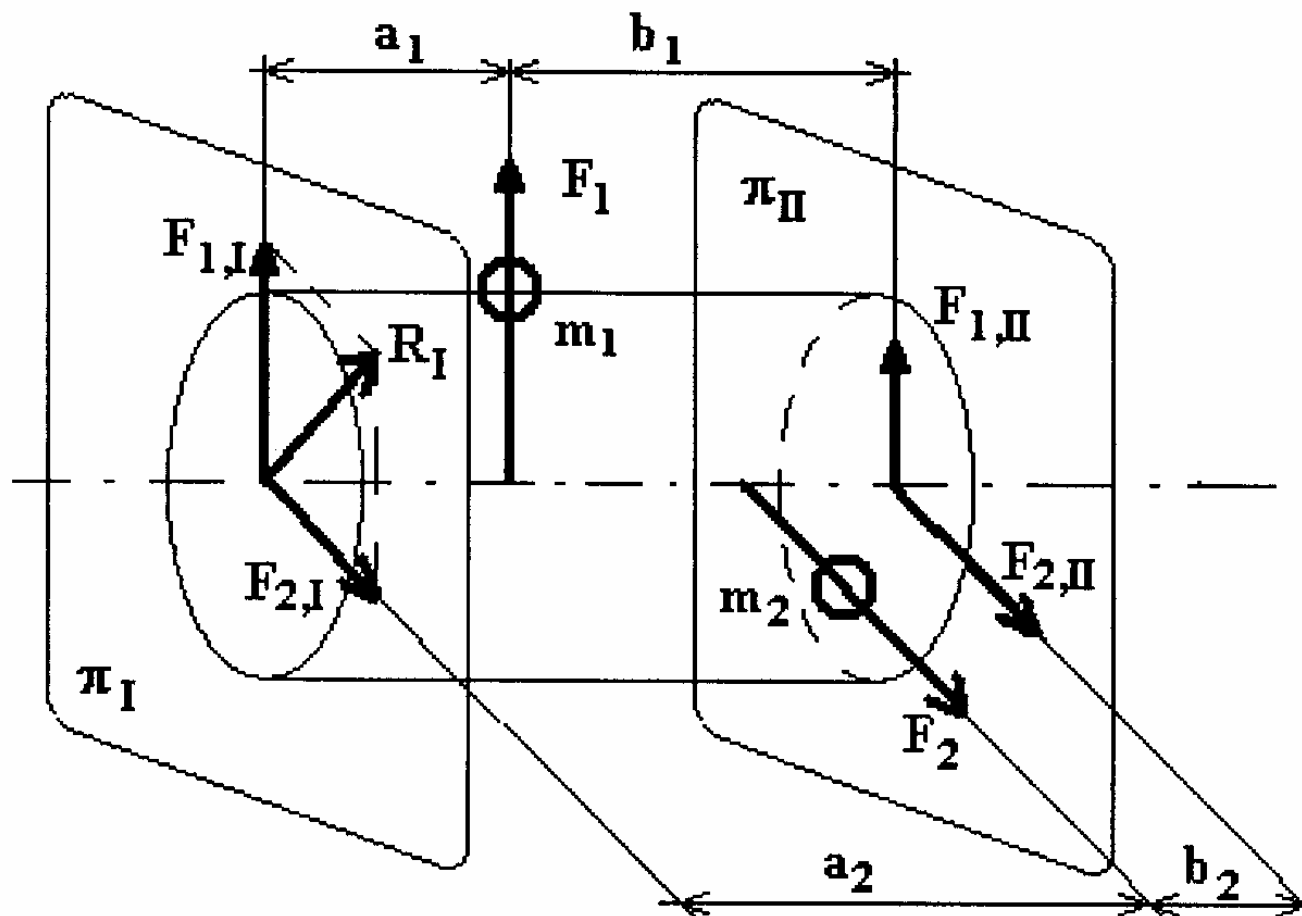


Fig. 8.6

Si considerino due piani π_1 e π_2 , normali all'asse di rotazione, a ciascuna delle forze centrifughe si possono sostituire due forze giacenti nei piani determinate in modo analogo a quanto si è fatto per le reazioni degli appoggi:

$$F_{1,I} = F_1 b_1 / (a_1 + b_1)$$

$$F_{1,II} = F_1 a_1 / (a_1 + b_1)$$

$$F_{2,I} = F_2 b_2 / (a_2 + b_2)$$

$$F_{2,II} = F_2 a_2 / (a_2 + b_2)$$

Infine, in ciascuno dei due piani si può quindi considerare una sola forza pari al risultante delle due forze ottenute dalle precedenti reazioni, come mostrato nella fig. 8.6.

Quanto osservato consente di concludere che qualunque sia lo sbilanciamento di un rotore le forze centrifughe dovute allo

sbilanciamento del rotore stesso esso sono equivalenti a due forze poste in due piani normali all'asse di rotazione e scelti arbitrariamente. Se allora in ciascuno di tali piani viene aggiunta una massa equilibratrice tale da generare durante la rotazione una forza uguale ed opposta alla risultante delle forze dovute allo sbilanciamento in quel piano, si ottiene il risultato di equilibrare il rotore. In definitiva quindi, è possibile bilanciare un rotore mediante l'aggiunta di due sole masse equilibratrici in due piani scelti arbitrariamente; tali piani vengono detti piani di correzione. Ad analogo risultato si perviene asportando due masse negli stessi piani ma, ciascuna, nella stessa direzione della risultante delle forze dovute allo sbilanciamento in quel piano.

La determinazione delle masse equilibratrici da aggiungere (o da asportare dal rotore) e della loro posizione viene fatta mediante le macchine equilibratrici, mentre la posizione dei piani di correzione viene stabilita dal costruttore del rotore che indica in quali piani è possibile aggiungere masse o asportarle senza compromettere la funzionalità del rotore stesso.

Sbilanciamento residuo

La precisione delle operazioni di bilanciamento, cioè il risultato che si ottiene nel voler ottenere che il rotore giri intorno ad un asse baricentrico e principale di inerzia, dipendono dalla macchina bilanciatrice, dall'operatore e dalla cura che viene posta all'operazione stessa. In ogni caso, però, dopo le operazioni di bilanciamento, per quanto precise esse siano, il rotore presenterà comunque uno sbilanciamento residuo; quest'ultimo viene quantificato in termini di eccentricità residua del baricentro.

E' facile immaginare che la precisione nel bilanciamento richiesta dipenda dalla velocità di rotazione del rotore e dal tipo di applicazione dello stesso; se uno sbilanciamento eccessivo è certamente intollerabile, non avrebbe senso, però, impiegare inutilmente risorse per ottenere una precisione di bilanciamento non necessaria.

La norma ISO 1940 fissa quale sia la precisione richiesta a seconda della applicazione. Qui di seguito è riprodotta parte della tabella dei livelli di qualità del bilanciamento.

Balance quality grades for various groups of representative rigid rotors

Balance Quality Grades G	e- ω (mm/s)	ROTOR TYPES—GENERAL EXAMPLES
G 40	40	Car wheels, wheel rims, wheel sets, drive shafts. Crankshaft-drives of elastically mounted fast four-cycle engines (gasoline or diesel) with six or more cylinders. Crankshaft-drives for engines of cars, trucks, and locomotives.
G 16	16	Drive shafts (propeller shafts, cardan shafts) with special requirements. Parts of crushing machinery. Parts of agricultural machinery. Individual components of engines (gasoline or diesel) for cars, trucks, and locomotives. Crankshaft-drives of engines with six or more cylinders under special requirements. Slurry or dredge pump impeller.
G 6.3	6.3	Parts or process plant machines. Marine main turbine gears (merchant service). Centrifuge drums. Fans. Assembled aircraft gas turbine rotors. Fly wheels. Pump impellers. Machine-tool and general machinery parts. Normal electrical armatures. Individual components of engines under special requirements.
G 2.5	2.5	Gas and steam turbines, including marine main turbines (merchant service). Rigid turbo-generator rotors. Rotors. Turbo-compressors. Machine-tool drives. Medium and large electrical armatures with special requirements. Small electrical armatures. Turbine driven pumps.
G 1	1	Tape recorder and phonograph (gramophone) drives. Grinding-machine drives. Small electrical armatures with special requirements.
G 0.4	0.4	Spindles, disks, and armatures of precision grinders. Gyroscopes.

Nella prima colonna è riportato il livello di qualità del bilanciamento G, nella seconda colonna il valore del prodotto $e \cdot \omega$, nella terza colonna le applicazioni cui è destinato il rotore.

Le norme prescrivono inoltre che nel caso il bilanciamento venga effettuato in due piani di correzione, il valore massimo della eccentricità e del baricentro sia pari alla metà di quello che si calcola con i dati desunti dalla tabella.

Esempio:

Per un rotore di un piccolo motore elettrico che gira ad una velocità di 3000 giri/min, si determini l'eccentricità del baricentro.

Dalla terza colonna della tabella (*Small electrical armatures*) si ricava che la qualità di bilanciamento richiesta è la G 2.5 per cui risulta $e \cdot \omega = 2,5$; poiché la velocità angolare è pari a:

$$\omega = 3000 \cdot 2\pi/60 = 314 \text{ rad/s}$$

risulta:

$$e = 2,5/314 = 0,00796 \text{ mm} \cong 8 \text{ } \mu\text{m}$$

Le operazioni di bilanciamento dovranno quindi garantire che in ogni piano di correzione l'eccentricità residua del baricentro non superi il valore di $4 \text{ } \mu\text{m}$.

CENNI SUI GIROSCOPI

Introduzione

Si consideri un rotore che gira intorno ad un asse che coincide con l'asse z di una terna cartesiana, come mostrato in fig.1; se risulta $I_{xx} = I_{yy}$, se cioè risulta che il momento di inerzia rispetto ad un asse normale all'asse di rotazione è identico a quello calcolato rispetto ad un qualsiasi altro asse normale all'asse di rotazione, il rotore è detto a struttura giroscopica rispetto all'asse di rotazione.

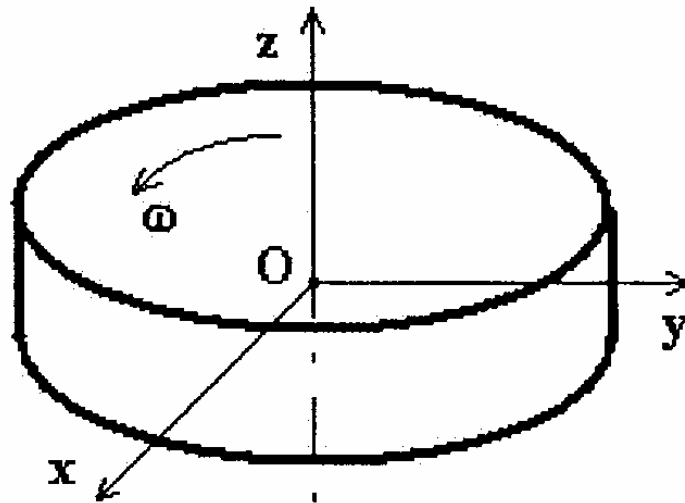


fig. 9.1

Tutti i solidi a simmetria cilindrica sono a struttura giroscopica rispetto all'asse di simmetria, lo sono le eliche a tre pale rispetto all'asse di rotazione, mentre non lo sono le eliche a due pale (v. fig. 9.2).

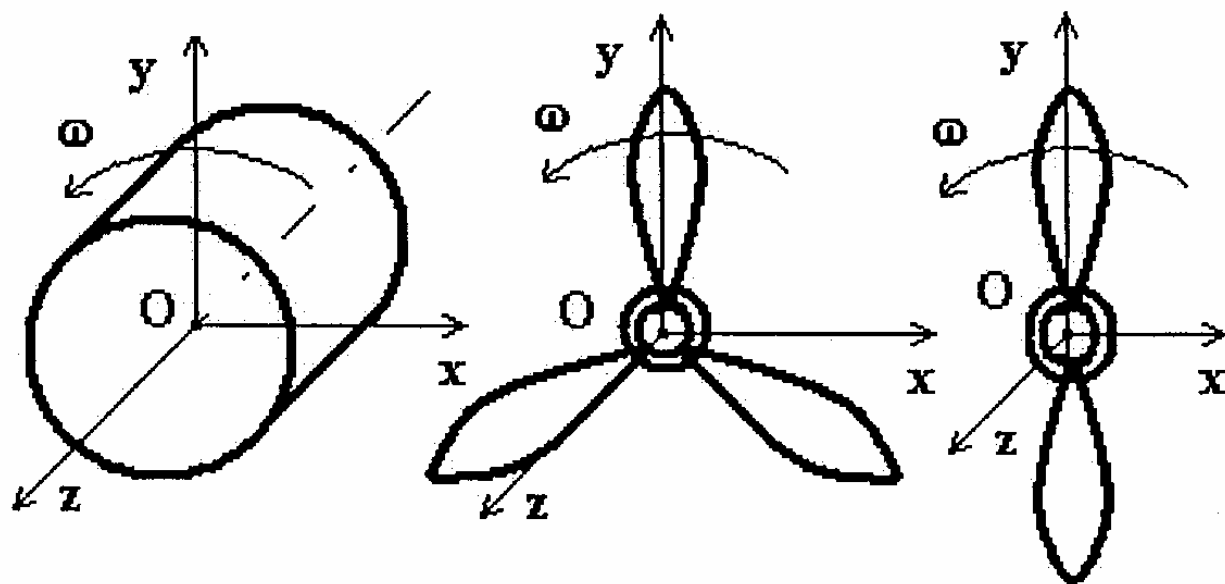


Fig. 9.2

Se un rotore a struttura giroscopica è montato su di un mobile, per effetto del moto del mobile stesso, il rotore “reagisce” con un momento delle forze di inerzia detto coppia (o momento) di inerzia giroscopica.

Coppie di inerzia giroscopiche

La coppia di inerzia giroscopica può essere determinata in modo semplice se si fanno delle ipotesi semplificative:

- La velocità Ω di rotazione del rotore è molto più grande della velocità di rotazione ω del mobile sul quale è montato
- La massa del rotore è molto più piccola di quella del mobile così che la coppia di inerzia giroscopica non altera il moto del mobile.

Tali ipotesi semplificative nella pratica sono largamente verificate, infatti un rotore gira ad una velocità di alcune migliaia o decine di migliaia di giri al minuto mentre il moto di rotazione del mobile non supera, generalmente le poche unità di giri al minuto; inoltre il rotore è generalmente molto piccolo rispetto al mobile sul quale è montato.

Si consideri un rotore a struttura giroscopica mostrato schematicamente in fig. 9.3; esso ruota rispetto ad un telaio T con velocità Ω attorno all'asse z di una terna solidale al telaio T.

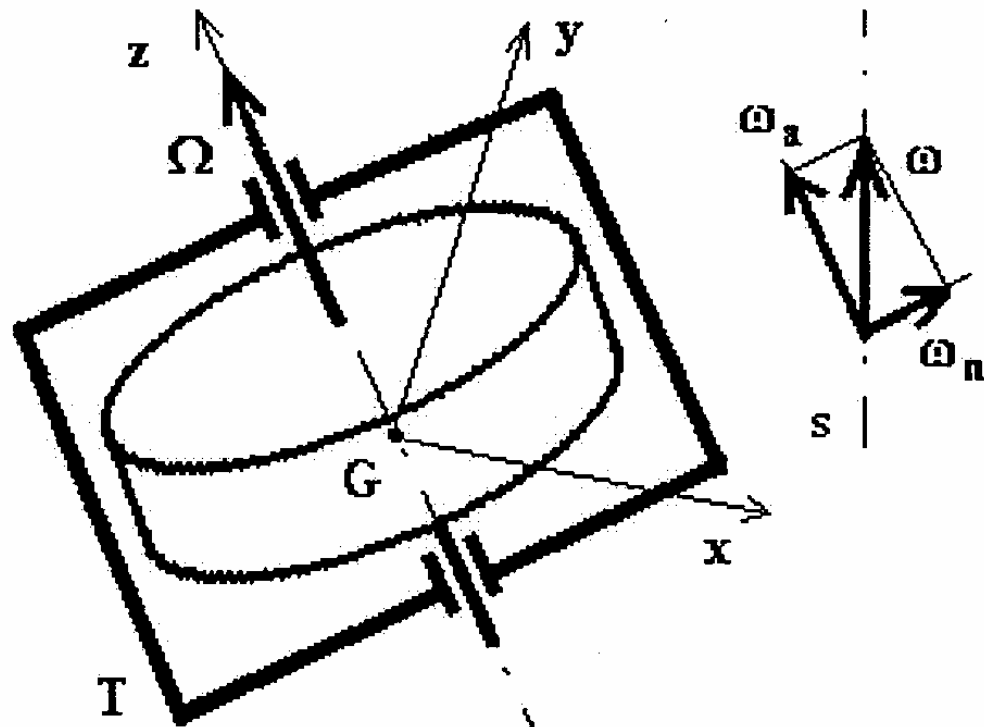


Fig. 9.3

Il telaio è montato rigidamente su di un mobile che, muovendosi, lo costringe a ruotare con velocità ω intorno ad un'asse s .

Per effetto di tale moto di rotazione (detto precessione) il vettore Ω muterà in intensità direzione e verso.

Dalla seconda equazione cardinale della dinamica, detta K_o la quantità di moto del rotore:

$$\vec{K}_o = I_{zz} \Omega$$

si ricava che il momento delle forze di inerzia è uguale alla variazione della quantità di moto del rotore:

$$\vec{M}^{(i)} = \frac{d\vec{K}_o}{dt} = \frac{d}{dt} I_{zz} \vec{\Omega}$$

Poiché il rotore è a struttura giroscopica, durante il suo moto di rotazione rispetto al telaio I_{zz} è costante; poiché inoltre generalmente è $\Omega \gg \omega$, risulta che la variazione nel tempo della quantità di moto è dovuta essenzialmente alla variazione di direzione del vettore Ω . Per tali motivi si può scrivere:

$$\vec{M}^{(i)} = \frac{d}{dt} I_{zz} \vec{\Omega} \wedge \vec{\omega}$$

(9.1)

Se si indica con ω_n la componente della velocità di rotazione ω del mobile in direzione normale all'asse di rotazione del rotore, risulta che la coppia di reazione giroscopica è data (v. fig. 9.4) da un vettore la cui direzione è normale al piano individuato dai vettori Ω ed ω_n , il cui verso è tale da vedere il vettore Ω sovrapporsi al vettore ω_n , ed il cui modulo è dato da:

$$M^{(i)} = I_{zz} \Omega \omega_n$$

(9.2)

A tale momento, la cui espressione è esatta nella misura in cui sono verificate le ipotesi semplificative sopra elencate, si oppone il telaio con un momento (reazione vincolare) uguale ed opposto.

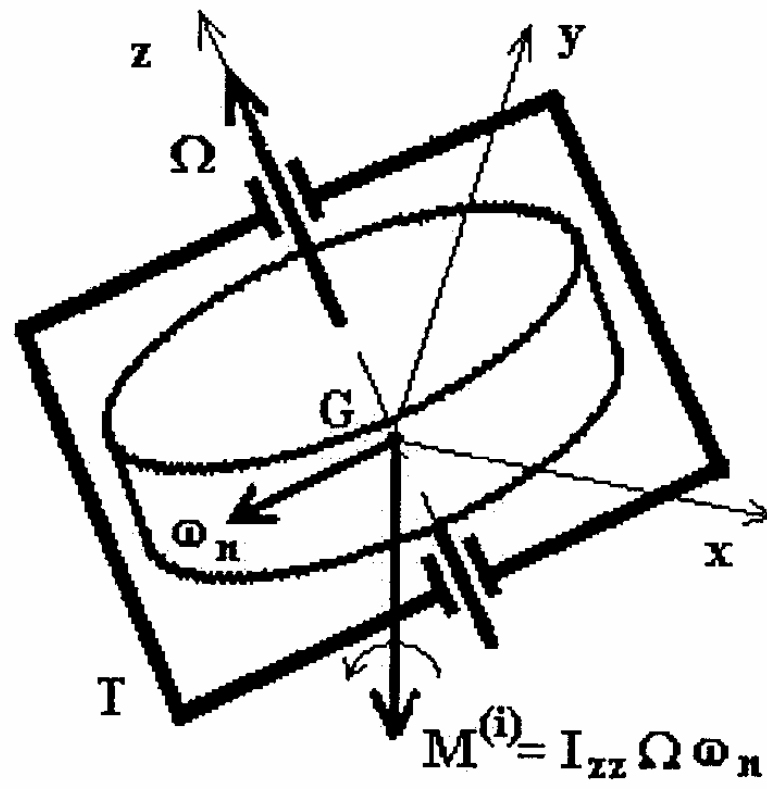


fig.9.4

Fenomeni giroscopici elementari

Si consideri un rotore a struttura giroscopica montato come mostrato schematicamente in fig. 9.5. Il rotore è libero di ruotare intorno ad un asse 1 rispetto ad un telaio T_1 che può ruotare intorno ad un asse 2, ortogonale al precedente, rispetto ad un telaio T_2 ; quest'ultimo può ruotare intorno ad un asse 3, ortogonale agli assi 1 e 2, rispetto ad un telaio T_3 . Tale sistema di telai mobili consente all'asse di rotazione del rotore di assumere qualunque orientamento nello spazio e prende il nome di triplice sospensione cardanica; il rotore a struttura giroscopica così montato prende il nome di giroscopio. Tale nome, dal greco antico, significa: "vedo la rotazione" e fu coniato da Léon Foucault (1819-1868) perché, mediante esso, è possibile visualizzare il moto di rotazione terrestre.

E' giusto ricordare che il Foucault fu il primo, tra l'altro, ad avere l'intuizione che un giroscopio, con opportuni accorgimenti, potesse mostrare la direzione del nord terrestre, potendo, così, sostituire la bussola magnetica.

Il giroscopio montato su triplice sospensione cardanica consente, innanzi tutto, di osservare alcuni fenomeni che sono alla base delle moderne applicazioni dei giroscopi stessi.

La tenacia dell'asse giroscopico

Si immagini di applicare una piccola forza al telaio T_1 come indicato in fig. 9.5 tale da generare un momento attorno all'asse 2 di poco maggiore al momento delle forze di attrito nei cuscinetti rispetto ai quali il telaio T_1 può ruotare rispetto al telaio T_2 ; si osserverà quanto segue:

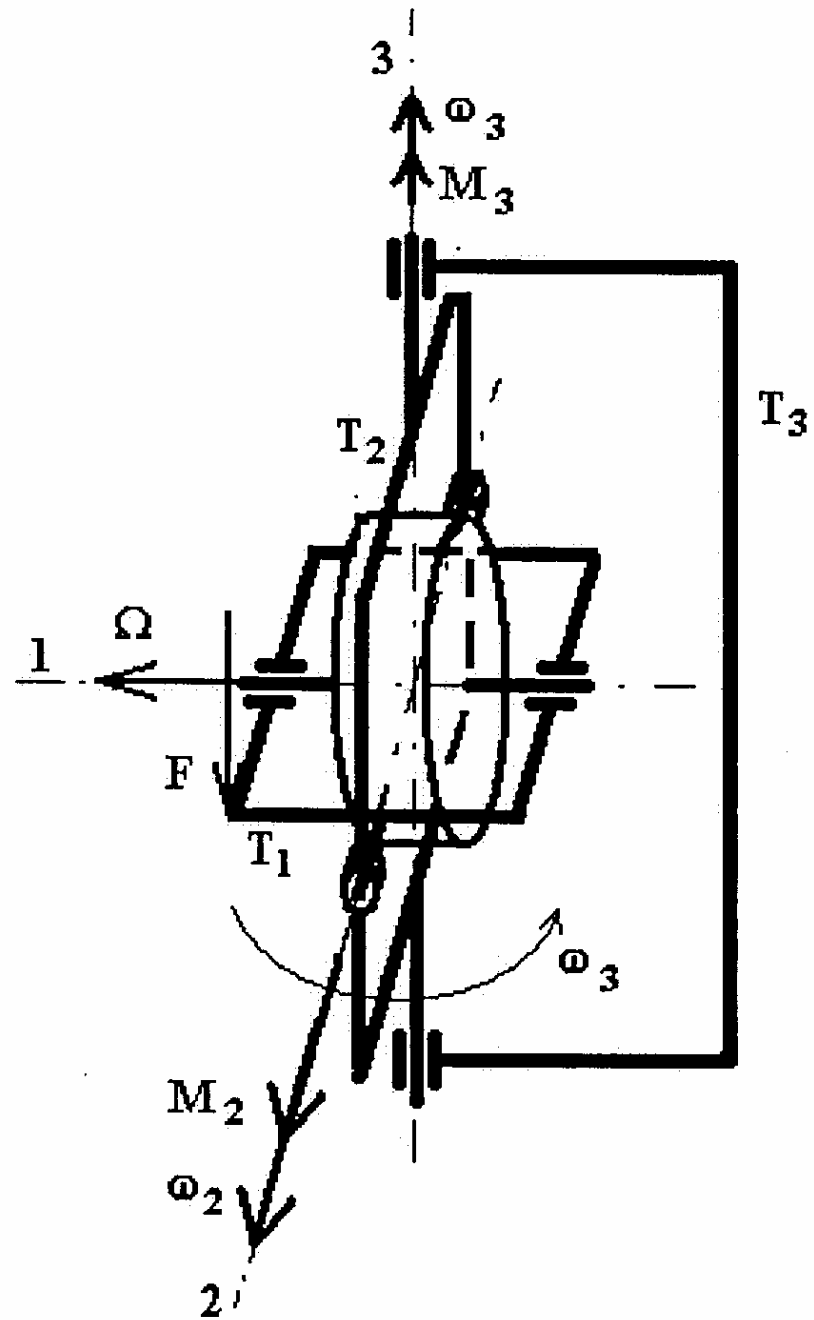


Fig. 9.5

Se il rotore è fermo il telaio ruoterà in senso orario, in figura, rispetto al telaio T_2 , come ci si può facilmente aspettare.

Se invece il rotore ruota intorno al suo asse di rotazione con una velocità Ω relativamente elevata, il telaio resta fermo. Avviene cioè che il rotore si oppone a che la direzione del suo asse di rotazione venga cambiata. Questo fenomeno prende il nome di tenacia dell'asse giroscopico.

La tendenza al parallelismo

Come si è visto, il momento della forza F (indicato con M_2 in fig.9.5), (se il rotore ruota ad una velocità sufficientemente elevata) non genera una rotazione del telaio T_2 con velocità ω_2 intorno all'asse 2. Si osserverà, invece, una rotazione del telaio T_3 con velocità ω_3 intorno all'asse 3. Quindi, per effetto della perturbazione intorno all'asse 2, si genera un momento M_3 intorno all'asse 3 che fa ruotare il telaio con velocità ω_3 intorno a tale asse.

Come visto a proposito della coppia giroscopica, la direzione della “risposta” ω_3 è ortogonale al piano formato dal vettore Ω e dal vettore della perturbazione M_3 (ω_3) ed il suo verso è quello che vede il vettore Ω sovrapporsi al vettore della perturbazione. Ciò è mostrato nella fig.9.5. Tale fenomeno è detto tendenza al parallelismo.

Permanenza dell'asse giroscopico

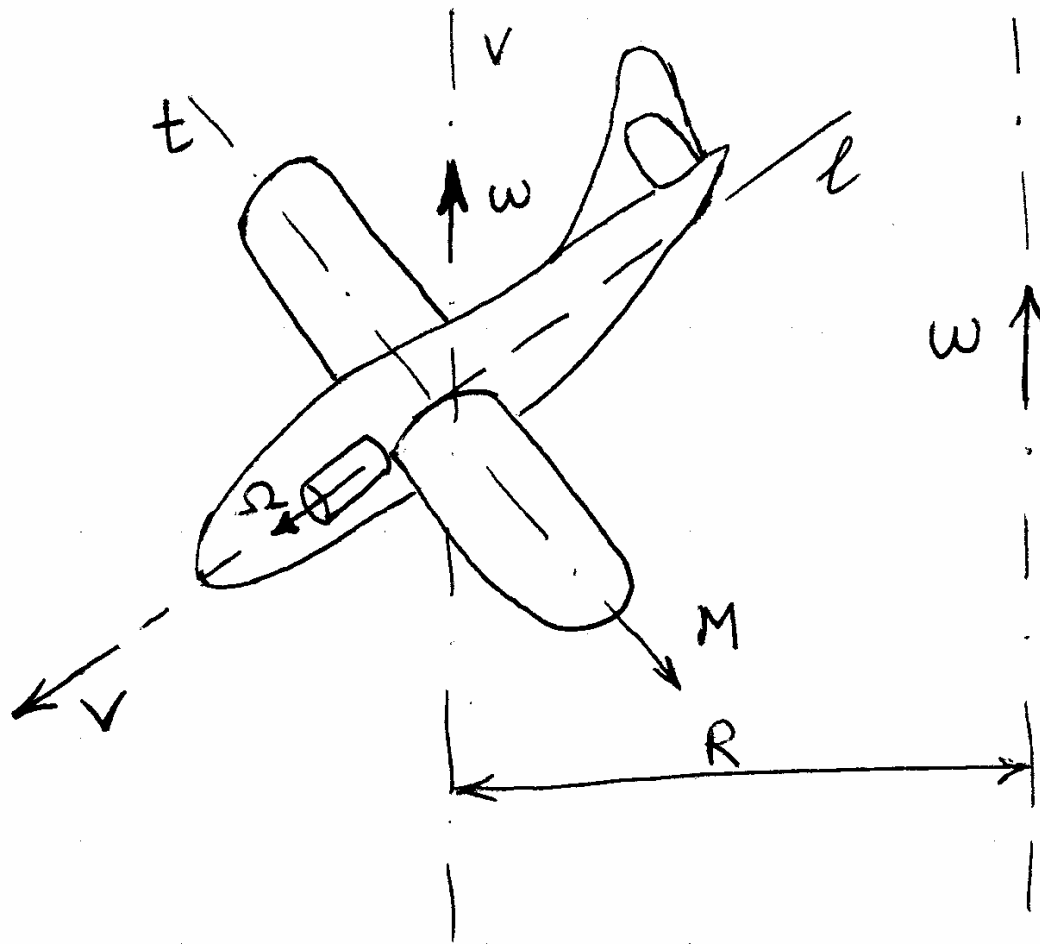
Se si muove il telaio T_3 , comunque si vari il suo orientamento nello spazio, l'asse del rotore rimarrà parallelo a se stesso. Tale fenomeno è permanenza dell'asse giroscopico.

E' da osservare che, per la presenza di piccole coppie di attrito nei cuscinetti dei telai, il moto relativo dei telai stessi introduce delle coppie perturbatrici intorno agli assi 2 e 3 per cui, dopo pochi movimenti del telaio T_3 , l'asse del rotore perderà il suo allineamento iniziale.

Esempio

Un aeromobile procede ad una velocità $V=80\text{km/h}$ e compie una virata descrivendo un arco di cerchioni raggio $R= 3000\text{m}$ intorno ad un asse verticale.

Determinare la coppia di reazione giroscopica della quale è sede il rotore di una turbomacchina il cui momento di inerzia di massa è $I = 1 \text{ kgm}^2$, e ruota attorno ad un asse parallelo all'asse longitudinale I del velivolo con velocità di rotazione pari a 10000 giri/min .



Con i dati a disposizione si calcola:

$$\begin{aligned}\Omega &= 2\pi/60 \cdot 10000 = 1000 \text{ rad/s} \\ V &= 800 \cdot 1000 / 3600 = 222.2 \text{ m/s} \\ \omega &= V / R = 222.2 / 3000 = 0.74 \text{ rad / s}\end{aligned}$$

Da cui si ottiene:

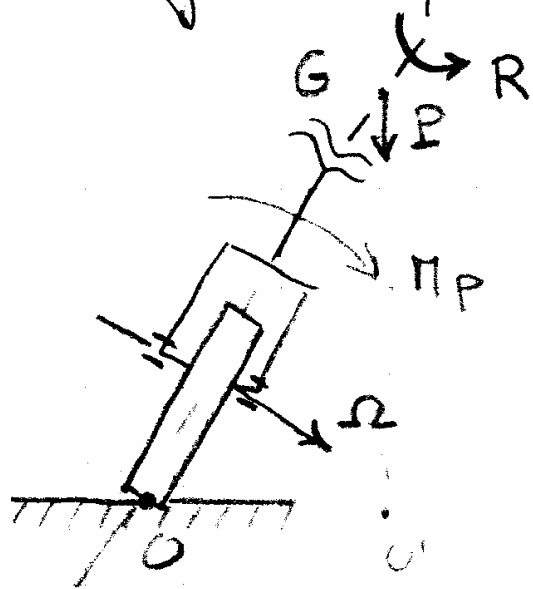
$$M = I\Omega\omega = 1 \cdot 1000 \cdot 0.74 \sim 741 \text{ Nm}$$

Questo momento si trasmette all'aeromobile attraverso i supporti del rotore, agisce intorno all'asse trasversale t del velivolo (ortogonale al piano degli assi I e V) e tende a far sovrapporre l'asse I (vettore Ω) all'asse V della perturbazione ω . Per effetto della virata verso sinistra, dato il verso di Ω , il velivolo tenderà ad abbassare il muso, cioè a picchiare.

Applicazioni dei giroscopi

• La bicicletta

Si consideri la ruota anteriore di una bicicletta e la sua forcella, come mostrato in figura.



Sia G la posizione del baricentro del sistema costituito dalla bicicletta e dal conducente. Se la verticale passante per G non incontra il punto di appoggio O , il momento M_P delle forze peso tende a far cadere la bicicletta.

Per effetto di questo momento M_P sulla ruota anteriore si desta una reazione giroscopica

indicate con R in figure, che tende a far ruotare
le forcelle intorno all'asse di sterzo S , in modo
che il vettore Ω tende a sovrapporsi all'asse (oriz-
zontale) della perturbazione M_p . La bicicletta ruote-
rà, quindi, nel verso che vede il punto O spostarsi
verso il punto O' , proiezione sul suolo di G .

La bussola giroscopica

La bussola giroscopica è stata inventata all'inizio del secolo scorso per superare alcuni inconvenienti della bussola magnetica. Quest'ultima è, essenzialmente, costituita da un ago magnetico libero di ruotare intorno ad un asse verticale che, immerso in un campo magnetico, si dispone parallelamente alle linee di forza di quest'ultimo. Poiché le linee di forza del campo magnetico terrestre hanno all'incirca la direzione nord-sud, il nord magnetico è prossimo al nord geografico e la bussola indicherà quest'ultimo con un'accuratezza.