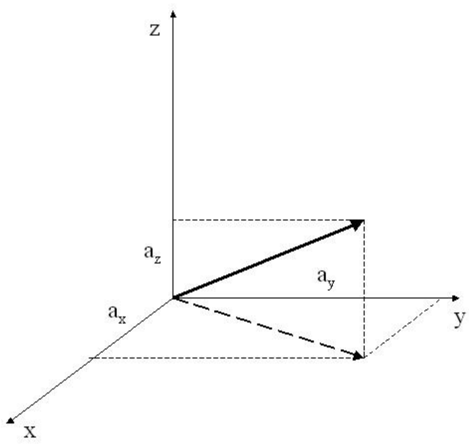
1 I vettori

Esistono quantità che non possono essere espresse con una sola misura. Ad esempio lo spostamento di un corpo é completamente definito solo misurandone la lunghezza, la direzione ed il verso. Lo spostamento è una grandezza vettoriale. Altri esempi di grandezze vettoriali sono la velocità, la forza e l'accelerazione.

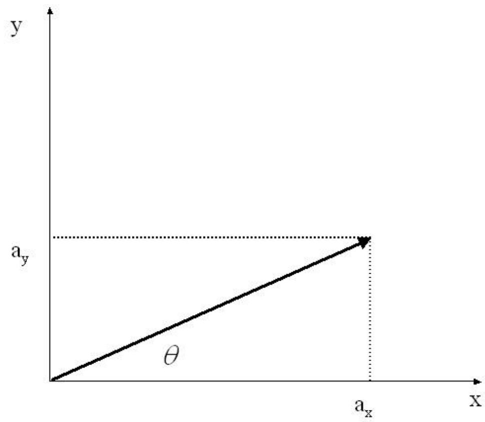
In genere un vettore si indica con una lettera a cui è sovrapposta una freccia, $\vec{a}$. Il vettore è completamente definito assegnandone la lunghezza (detta anche intensità o modulo) $|a|$, la sua retta di azione, ed il suo verso di percorrenza. Nel caso del vettore spostamento il modulo (intensità) rappresenta la distanza tra i punti iniziale e finale occupati dal corpo mentre la sua retta di azione ed il verso coincidono con la direzione ed il verso in cui il corpo viene spostato. E' possibile mostrare che, in modo del tutto equivalente, un vettore è specificato dalle sue componenti in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (Fig.1):

$$\vec{a} \equiv (a_x, a_y, a_z) \tag{1}$$



Componenti di un generico vettore posizione

L' equivalenza delle due rappresentazioni di un vettore può essere dimostrata facilmente nel caso di vettori che si tovano in un piano. Per fissare le idee consideriamo che il nostro vettore si trovi nel piano x-y. In questo caso il vettore ha le sole componenti x ed y diverse da 0. Le due componenti del vettore, a_x ed a_y, sono legate per mezzo della trigonometria (vedi Fig. 2) al modulo del vettore $|a|$ ed all' angolo θ che il vettore forma con l' asse x (nota che la conoscenza dell' angolo θ fornisce allo stesso tempo la retta di azione del vettore ed il verso di percorrenza).



Decomposizione del vettore $\overrightarrow{a}$ in componenti e relazione con modulo, direzione e verso.

In formule si ha

$$a_x = |a| \cos\theta, \qquad a_y = |a| \sin\theta \tag{2}$$

Allo stesso modo è possibile ricostruire il modulo del vettore e l' angolo θ se si conoscono le componenti. Infatti è facile verificare che le equazioni (2) possono essere invertite ottenendo

$$\begin{aligned} \sqrt{a_x^2 + a_y^2} &= \sqrt{|a|^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = |a| \\ \tan\theta &= \frac{a_y}{a_x} \end{aligned}$$

Esercizi proposti:

- Graficare un vettore bidimensionale di componenti $\vec{a} \equiv (3,7)$ e calcolare l' angolo che esso forma con l' asse delle ascisse.

2 Moto di un punto matriale

Tutte le volte che le dimensioni di un corpo materiale sono trascurabili rispetto alle distanze che il corpo percorre nel suo moto possiamo considerarlo come un punto materiale, cioè come un oggetto senza dimensioni. Il moto di un punto materiale è completamente descritto se è nota la sua posizione al trascorrere del tempo. In altre parole se il vettore posizione $\overrightarrow{r}$, che descrive la posizione del corpo (punto materiale), è noto ad ogni istante nell' intervallo di tempo in cui consideriamo il moto. Assegnato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, il vettore posizione $\overrightarrow{r}$ del corpo è dato attraverso le sue componenti che risultano variare al trascorrere del tempo. Le tre funzioni del tempo che descrivono come le componenti del vettore posizione variano col tempo ci forniscono una rappresentazione del moto (*equazioni del moto*):

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}$$

2.1 Esempi di moti lungo una retta.

2.1.1 Moto uniforme.

Poichè il moto si svolge lungo una retta esso può essere descritto da un' unica componente (in questo caso il vettore posizione ha una sola componente diversa da 0). Assumiamo che la dipendenza dal tempo di questa componente sia data dalla seguente funzione :

$$x(t) = a + bt \tag{3}$$

Cerchiamo di convincerci che effettivamente la (3) descrive un moto a velocità costante e cerchiamo di ricavare il significato dei coefficienti a e b. Nella funzione precedente a rappresenta la posizione del corpo al tempo $t = 0$; infatti sostituendo $t = 0$ nella eq.(3) si ottiene $x(0) = a$. Inoltre b é la velocità costante del corpo; infatti, in modo del tutto generale, la velocità è definita come la derivata della funzione che ne rappresenta il moto

$$v = \frac{d}{dt}x(t) = b$$

La definizione di velocità come derivata é del tutto comprensibile se si ricorda che la derivata informa di quanto rapidamente i valori di una funzione si modificano al variare della variabile indipendente. Nel nostro caso, essendo per definizione

$$\frac{d}{dt}x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

essa ci informa di quanto il corpo si è spostato nell' intervallo di tempo Δt (preso sempre più piccolo) e ritroviamo il concetto intuitivo di velocità come rapporto tra lo spostamento ed il tempo impiegato a percorrerlo. Se si considera un intervallo di tempo Δt finito e non consideriamo il $\lim_{\Delta t \to 0}$ si ottiene la velocità media nell' intervallo Δt. Nel caso del moto uniforme la velocità media risulta costante (non dipende da Δt) e coincide con v. Dalla definizione di derivata risulta che la velocità di un corpo è la pendenza della retta tangente alla curva che ne rappresenta il moto.

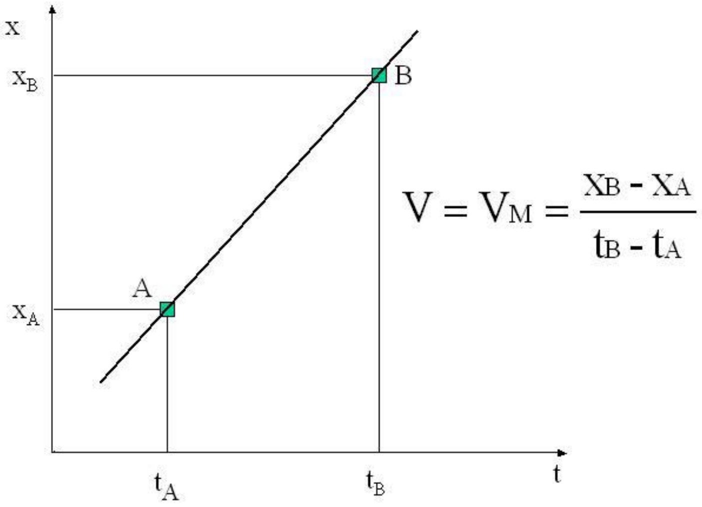


Fig.3

Data l' interpretazione dei coefficienti a e b ricavata precedentemente l' eq.(3) può essere riscritta come segue

$$x = x_0 + vt \tag{4}$$

dove abbiamo posto $x_0 = a$ e $v = b$ per ovvii motivi mnemonici (Fig.3). La velocità v del corpo ha le dimensioni $[v] = \frac{lunghezza}{tempo}$ mentre x ed x_0 sono lunghezze; se si utilizza il sistema di misura internazionale la velocità é misurata in metri su secondo$\frac{m}{s}$. E' utile ricordare che il secondo membro dell' equazione (3) contiene la somma di due termini: l' analisi dimensionale ci assicura che ognuno di essi deve avere le dimensioni di una lunghezza, cioè deve avere le stesse dimensioni del primo membro.

2.1.2 Moto uniformemente accelerato.

Un secondo esempio di moto unidimensionale é dato dal moto descritto dalla funzione di secondo grado

$$x = at^2 + bt + c \tag{5}$$

che rappresenta una parabola nel tempo. Le proprietà del moto possono essere estratte dall' analisi delle proprietà matematiche della funzione (5). Come detto nel caso del moto uniforme la velocità di un corpo è data dalla derivata della funzione che ne descive il moto; si ottiene

$$v = \frac{d}{dt}x(t) = 2at + b.$$

A differenza di quanto ottenuto nel caso del moto uniforme la velocità, in questo caso, risulta dipendente dal tempo.

Proviamo ad interpretare le costanti presenti nelle espressioni precedenti. Se indichiamo con $t = 0$ l' istante a partire dal quale cominciamo l' osservazione del moto si ha $x(t = 0) = x_0 = c$ ed, analogamente, $v(t = 0) = v_0 = b$ dove abbiamo indicato con x_0 e v_0 la posizione e la velocità iniziale del corpo, rispettivamente. Per completare l' interpretazione delle costanti presenti nell' espressione (5) dobbiamo introdurre il concetto di accelerazione. Essa rappresenta una misura della rapidità con cui varia la velocità ed è, quindi, definita come la derivata della funzione che rappresenta la velocità del corpo

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t).$$

Come già discusso nel caso della velocità la derivata di una funzione corrisponde ad una procedura di limite

$$\frac{d}{dt}v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Se si considera un Δt finito si ottiene l'accelerazione media. Vale la pena di notare che, se la velocità è costante, l'accelerazione essendone la derivata, è nulla. Il calcolo dell' accelerazione per il moto descritto dalla (5) porge

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}(2at + b) = 2a$$

Il moto in questione, essendo caratterizzato da accelerazione costante è noto come *moto uniformemente accelerato.* In generale esso è descritto a partire dal valore costante dell' accelerazione; denominando con a_0 il suo valore si ha:

$$\begin{aligned} a(t) &= 2a = a_0 \\ v(t) &= a_0 t + v_0 \\ x(t) &= \frac{a_0}{2}t^2 + v_0 t + x_0 \end{aligned}$$

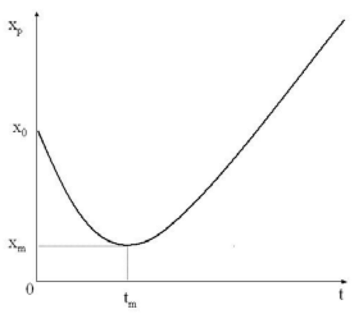


Fig.4a

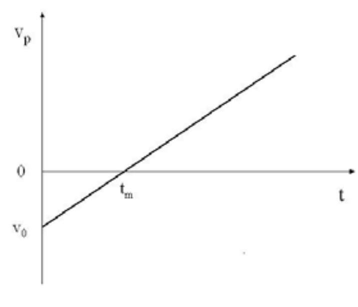


Fig.4b

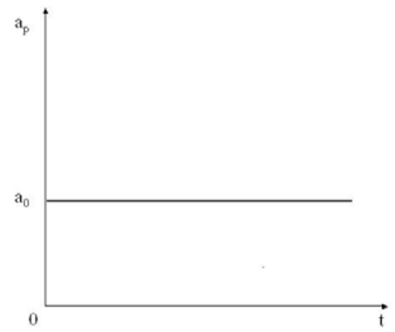


fig.4c

Nelle Figure 4a-4c presentiamo un esempio di moto uniformemente accelerato. Nella Fig.4a si é riportato il valore della componente x dello spostamento in funzione del tempo. Si deduce che il moto descritto dalla parabola nel piano (x-t) consiste nello spostamento del corpo dalla posizione iniziale $x = x_0$ alla posizione $x = x_m < x_0$ che viene raggiunta al tempo $t = t_m$ e, successivamente, verso valori sempre crescenti di x. Dalla Fig.4b si può notare che fino al tempo t_m la velocità del corpo risulta negativa indicando che il moto procede da valori più grandi di x a valori più piccoli, mentre per $t > t_m$ la velocità è positiva indicando che la posizione del corpo assume valori sempre crescenti di x. Va notato che nell' istante t_m la velocità del corpo è nulla. Infine, come detto precedentemente, dalla Fig.4c si osserva che l' accelerazione si mantiene costante e risulta sempre positiva.

Dalle osservazioni precedenti emerge che il moto uniformemente accelerato è completamente descritto dai coefficienti a_0, v_0 e x_0.

Esercizi proposti:

- Graficate la posizione e la velocità in funzione del tempo di un corpo sottoposto ad accelerazione costante ($= 2.5m/s^2$, $v_0 = 3.0m/s$, $x_0 = 1.5m$)

- Discutete qualitativamente come si modifica il grafico della posizione in funzione del tempo nei seguenti casi: a) $a_0 < 0$ e $v_0 < 0$; b) $a_0 < 0$ e $v_0 > 0$.

2.2 Esempi di moti nel piano

2.2.1 Il moto di un proiettile

La descrizione del moto in più dimensioni discende in modo diretto da quanto detto fin qui. Infatti, possiamo ripetere l' analisi precedente per ognuna delle diverse componenti del vettore $\overrightarrow{r}_p$ che rappresenta la posizione del corpo. Il moto complessivo verrà poi determinato dalla natura vettoriale di $\overrightarrow{r}_p$. Per chiarire questo aspetto consideriamo il caso di un moto che avviene in un piano in modo tale che la componente x del vettore posizione descriva un moto uniforme mentre la componente y un moto uniformemente accelerato. Le equazioni del moto saranno quindi

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_x t \\ y(t) &= \frac{a_0}{2}t^2 + v_{y0}t + y_0 \end{aligned} \tag{6}$$

dove v_x è la velocità (costante) lungo la direzione x, v_{y0} è la velocità iniziale ($t = 0$) lungo la direzione y ed, infine a_0 è l' accelerazione (costante) lungo la direzione y. La composizione dei moti delle componenti del vettore $\overrightarrow{r}_p$ origina nel piano ($x-y$) il moto del corpo. Infatti ad ogni istante t, attraverso le eqs.(6), è possibile conoscere le coordinate del punto P che individua la posizione del corpo. A partire dalle (6) è possibile, ad esempio, ricostruire la *traiettoria* del corpo, cioè *l' insieme di tutti i punti del piano attraversati dal corpo durante il moto.* Ricavando la variabile t dalla prima eq. delle (6) si ha

$$t = \frac{x - x_0}{v_x}$$

e sostituendola nella seconda delle due equazioni si ottiene

$$y = y_0 + \frac{a_0}{2}\left(\frac{x - x_0}{v_x}\right)^2 + v_{y0}\left(\frac{x - x_0}{v_x}\right)$$

che rappresenta l' equazione di una parabola nel piano $x - y$ (Fig.5).

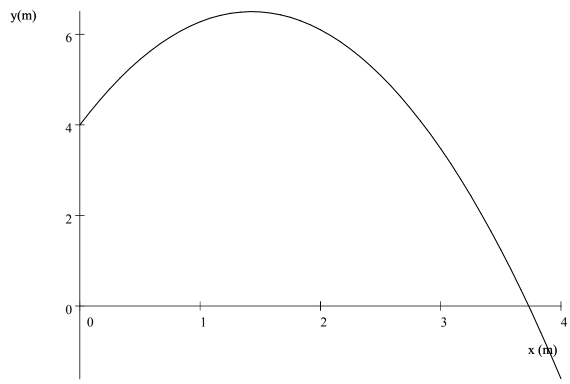


Fig.5

L' equazioni (6) originano un moto che descrive una traiettoria parabolica. Questo si verifica, ad esempio, nel caso del moto di un corpo materiale nel campo gravitazionale della terra. Infatti, è noto che un corpo sulla terra risente di un' accelerazione costante rivolta verso il basso lungo la verticale (direzione y nella figura) dovuta all' attrazione che la terra esercita su tutti i corpi dotati di massa. Nella direzione orizontale (direzione x nella figura), invece, il campo gravitazionale non esercita nessuna accelerazione ed il corpo materiale si muove con velocità costante.

Esercizi proposti:

- Calcolare la distanza raggiunta da un proiettile (gittata) lanciato da terra con una velocità iniziale di $200m/s$ nella direzione che forma un angolo $\alpha = 30$ con l' orizzontale.

- In riferimento all' esercizio predente calcolare l' altezza massima raggiunta dal proiettile e la gittata in funzione dell' angolo α.

2.2.2 Il moto circolare uniforme.

Consideriamo il moto di un corpo che segue una traiettoria circolare. Ci troviamo in una situazione diversa da quella descritta nel caso del moto di un proiettile. In quel caso, infatti, abbiamo presupposto di conoscere l' accelerazione a cui il corpo è sottoposto ed abbiamo ricostruito la traiettoria usando le nostre conoscenze di cinematica (Fig.6).

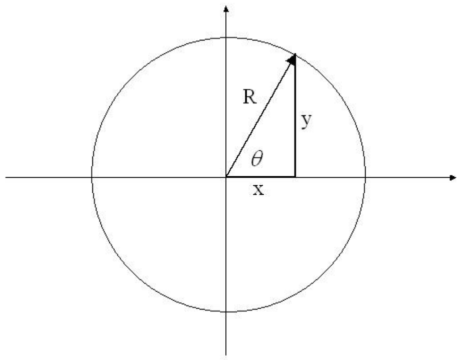


Fig.6

Nel caso del moto circolare la conoscenza della traiettoria ci permette di ottenere immediatamente le equazioni del moto:

$$\begin{aligned} x(t) &= R\cos(\theta(t)) \\ y(t) &= R\sin(\theta(t)) \end{aligned}$$

dove R è il raggio della circonferenza e $\theta(t)$ è l' angolo che individua la posizione del corpo al tempo t. Il caso del moto circolare uniforme corrispode a considerare, in analogia col caso del moto rettilineo uniforme, la seguente legge oraria per l' angolo θ

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0. \tag{7}$$

Nell' equazione (7) ω è la velocità angolare (le cui dimensioni sono l' inverso di un tempo) e θ_0 rappresenta l' angolo formato dal corpo all' istante $t = 0$. Conoscendo le equazione del moto possiamo ricavare le componenti della velocità vettoriale

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = -R\omega\sin(\theta(t)) \\ v_y(t) &= \frac{dy(t)}{dt} = R\omega\cos(\theta(t)) \end{aligned}$$

da cui risulta che il modulo della velocità si mantiene costante, infatti

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\omega$$

Sottolineamo che la direzione del vettore velocità è tangente alla circonferenza come risulta chiaro dall' osservazione che $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{r} = 0$. Questa proprietà che abbiamo ricavata nel caso del moto circolare uniforme è, in realtà, verificata per qualunche moto: il vettore velocità risulta sempre perpendicolare alla traiettoria.

Analogamente possiamo calcolare le componenti dell' accelerazione

$$\begin{aligned} a_x(t) &= \frac{dv_x(t)}{dt} = -R\omega^2 \cos(\theta(t)) = -\omega^2 x(t) \\ a_y(t) &= \frac{dv_y(t)}{dt} = -R\omega^2 \sin(\theta(t)) = -\omega^2 y(t) \end{aligned}$$

da cui si ricava che, ad ogni istante di tempo, il vettore accelerazione ha la stessa direzione e verso opposto del vettore posizione. L' accelerazione é, quindi, centripeta, rivolta verso il centro della circonferenza ed il suo modulo assume il valore

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\omega^2 = \frac{|\overrightarrow{v}|^2}{R}.$$

Esercizi proposti:

- Calcolare la velocità e l' accelerazione di un moto circolare uniformemente accelerato la cui dipendenza dell' angolo ϑ dal tempo t è data da $\theta(t) = \alpha t^2 + \omega t + \theta_0$
- .Mostrare che l' accelerazione calcolata nell' esercizio precedente ha una componenete centripipeta ed una tangenziale.

2.2.3 Sommario

1. Definizione di Vettori
2. Equazioni del moto
3. Definizione di velocità e di velocità media
4. Definizione di accelerazione ed accelerazione media
5. Moto uniforme
6. Moto uniformemente accelerato