

I. Tensori

1. Considerazioni generali

Le grandezze fisiche presentano un diverso grado di complessità. Nell'ordinario spazio tridimensionale alcune dette *scalari*, come la temperatura e la massa, sono misurabili con un unico numero, altre di tipo vettoriale, come il peso e la velocità, con 3 numeri, altre ancora, come la tensione in un corpo deformato, con 9 numeri e così via. Il celebre fisico e cristallografo Voigt per primo riconobbe a tutte le grandezze fisiche caratteri comuni, le raggruppò in un'unica famiglia e le chiamò *tensori*. Nella Tab.1 i tensori sono classificati secondo l'ordine.

tensori	numero delle componenti	notazione assoluta	notazione indiciale
di ordine zero o scalari	3^0	α	
del primo ordine o vettori	3^1	$\mathbf{a}$	a_i
del secondo ordine	3^2	$\mathbf{A}$	a_{ij}
del terzo ordine	3^3	$\mathbf{B}$	b_{ijh}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
dell'ennesimo ordine	3^n	$\mathbf{D}$	$d_{ij\dots s}$ $\underbrace{\hspace{1cm}}_{n \text{ indici}}$

Tab.1

Dalla Tab.1 deduciamo che, nello spazio ad n dimensioni, un tensore di ordine p ha n^p componenti. Inoltre è stata adottata la seguente notazione: una lettera latina o greca minuscola denota uno scalare, una minuscola grassetto un vettore, una maiuscola grassetto un tensore di ordine $n \geq 2$. La generica componente di un tensore di ordine n si indica con una lettera latina o greca minuscola seguita da n indici.

Rappresentare le grandezze fisiche in forma tensoriale è una diretta conseguenza della condizione fondamentale a cui tutte le leggi fisiche sono subordinate per essere valide: devono risultare indipendenti sia dal sistema delle unità sia dal sistema di coordinate scelti per descriverle matematicamente.

Le coordinate di un tensore dipendono dal sistema delle unità e, ad eccezione delle quantità scalari, dal sistema di riferimento: variano quando si passa da un sistema all'altro. Ad uno stesso tensore corrispondono infinite *n-ple* di numeri. Tali *n-ple*, non sono indipendenti; sono legate da relazioni dette *leggi di trasformazioni*, che ci consentono di determinare le componenti di un tensore in un dato sistema quando si conoscono le sue componenti in un altro sistema.

I tensori che appaiono in una determinata legge fisica, debbono obbedire alle stesse leggi di trasformazione e quindi devono soddisfare due richieste fondamentali:

a) avere la stessa dimensione; b) essere dello stesso ordine.

Se queste prescrizioni non sono rispettate, un semplice cambiamento del sistema di coordinate o del sistema delle unità renderà la legge fisica priva di senso.

Esercizio 1. *Quante componenti ha un tensore del 3° ordine nello spazio a due dimensioni? Scriverle in forma esplicita.*

2. Convenzione della somma

Secondo tale convenzione ogni espressione polinomiale del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = \sum_{i=1}^n a_ix_i, \quad (1)$$

può essere scritta nella forma abbreviata a_ix_i sopprimendo il simbolo di sommatoria. Ogni qual volta in un'espressione algebrica troviamo un termine con indici ripetuti, si sottintende una sommatoria da 1 a n rispetto a tale indice. Es.: nell'espressione $\varepsilon_{ijh}a_ib_jc_h$ gli indici ripetuti sono i, j, h quindi la sommatoria va effettuata da 1 a 3 rispetto a tutti e tre gli indici. Espandendo tale notazione abbreviata otteniamo un'espressione con 27 termini.

Esercizio 2. *Espandere le seguenti espressioni utilizzando la convenzione della somma: a) $u_i = \delta_{ij}u_j$; b) $a = u_ju_j$; c) $u_i = a_{ij}v_j$; d) $b_i = c_{ijh}a_{jh}$; e) $b_{ij} = c_{ijhk}a_{hk}$; con $i, j, \dots, k = 1, 2, 3$.*

Esercizio 3. *Riscrivere le precedenti relazioni in notazione assoluta.*

Esercizio 4. *Quali delle seguenti espressioni sono formalmente corrette? a) $a_i = c_{ijh}b_{jh} + d_{ij}$; b) $a_{ij} = b_{ijrs}t_{rs} + c_{hij}d_h$; c) $b_{ijhk} = a_{ih}b_{jk}$; d) $b_{ijhk} = a_{ijh}c_h + g_{ijk}d_k$.*

3. Spazi lineari

Fissato n , l'insieme dei tensori di ordine n è uno spazio lineare. Di seguito si riportano la definizione e alcune proprietà di questi spazi.

Definizione. Avendo indicato con R l'insieme dei numeri reali, uno spazio lineare su R è un insieme L dotato di due operazioni: la somma e il prodotto per un numero reale. La somma è una regola che ci consente di costruire per ogni due elementi $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in L$ un terzo elemento $\mathbf{z} \in L$ con le seguenti proprietà:

- 1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$ (*commutativa*);
- 2) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in L$ (*associativa*);
- 3) esiste un elemento $\mathbf{0} \in L$ (*elemento nullo*) tale che $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in L$;
- 4) per ogni $\mathbf{x} \in L$ esiste un elemento $\mathbf{y} \in L$ (*elemento inverso*) tale che $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Il prodotto è una regola, con la quale assegnato un elemento $\mathbf{x} \in L$ e un numero reale a , costruiamo un elemento $\mathbf{y} \in L$ detto prodotto di a per $\mathbf{x}$, con le seguenti proprietà:

- 5) $\forall a, b \in R$, $(a + b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}$ (*distributiva*);
- 6) $\forall a \in R$, $a(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y}$ (*distributiva*);
- 7) $\forall a, b \in R$, $(ab)\mathbf{x} = a(b\mathbf{x})$ (*associativa*);
- 8) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Gli elementi di uno spazio lineare L sono detti *vettori*, ma non vanno confusi con i vettori geometrici definiti nel paragrafo 4.

Esercizio 5. Verificare che sono spazi lineari:

- a) l'insieme $C(a, b)$ delle funzioni continue $y = y(t)$ definite nell'intervallo $[a, b]$ dove le operazioni di somma e di moltiplicazione per uno scalare sono quelle usuali dell'aritmetica.
- b) l'insieme dei numeri reali positivi R^+ intendendo per somma il prodotto usuale e per prodotto dell'elemento $\mathbf{x}$ per uno scalare λ , $\mathbf{x}^\lambda$.

Si può facilmente dimostrare che il vettore zero è unico; inoltre ogni elemento dello spazio vettoriale ha un unico inverso.

Dipendenza Lineare. Siano $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$ k vettori di L e $a_1, a_2, \dots, a_k$ k numeri reali. Il vettore

$$\mathbf{y} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \dots + a_k\mathbf{x}_k \quad (2)$$

è detto *combinazione lineare* dei vettori $\mathbf{x}_i$ $i = 1, \dots, k$. I numeri a_i sono i coefficienti della combinazione lineare. I k vettori $\mathbf{x}_i$ sono *linearmente*

dipendenti se esiste una loro combinazione lineare con coefficienti $a_1, a_2, \dots, a_k$ non tutti nulli tale che

$$a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 + \dots + a_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Se la (3) è possibile solo per $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$ allora i k vettori sono *linearmente indipendenti*.

Esempio: Nell'insieme $C(a, b)$ le funzioni

$$\mathbf{x}_1(t) = \sin^2 t, \quad \mathbf{x}_2(t) = \cos^2 t, \quad \mathbf{x}_3(t) = 1$$

sono linearmente dipendenti, mentre le funzioni $1, t, t^2, \dots, t^k$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 6. *Dimostrare i seguenti Lemma:*

Lemma 1 *Se una parte dei vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ sono linearmente dipendenti, allora l'intero sistema è linearmente dipendente.*

Lemma 2 *I vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ sono linearmente dipendenti se e solo se uno di essi può essere espresso come combinazione lineare degli altri.*

Basi e Componenti. Un sistema di vettori linearmente indipendenti $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ nello spazio lineare L è una *base* per L se ogni vettore $\mathbf{x} \in L$ si può scrivere nella forma

$$\mathbf{x} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \dots + a_n \mathbf{e}_n. \quad (4)$$

I coefficienti a_i sono unicamente determinati. Infatti se esiste un'altra espansione

$$\mathbf{x} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + \dots + b_n \mathbf{e}_n, \quad (5)$$

sottraendo termine a termine la (5) dalla (4) si ha

$$(a_1 - b_1) \mathbf{e}_1 + \dots + (a_n - b_n) \mathbf{e}_n = \mathbf{0}. \quad (6)$$

Essendo $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ linearmente indipendenti, la (6) è verificata se e solo se $a_i - b_i = 0$.

Esempio: Nello spazio delle matrici $[A]_{2 \times 2}$, le matrici

$$[A]^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [A]^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [A]^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [A]^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

formano una base.

Nello spazio $C(a, b)$ non esiste una base secondo la precedente definizione.

Oss.: L'importanza del concetto di base consiste nel fatto che quando essa è assegnata, la somma e il prodotto per uno scalare diventano le ordinarie operazioni di addizione e moltiplicazione tra numeri. Infatti posto

$$\mathbf{x} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \dots + a_n \mathbf{e}_n; \quad \mathbf{y} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + \dots + b_n \mathbf{e}_n,$$

la somma di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è data da

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (a_1 + b_1) \mathbf{e}_1 + \dots + (a_n + b_n) \mathbf{e}_n$$

e la moltiplicazione di $\mathbf{x}$ per uno scalare λ è data da

$$\lambda \mathbf{x} = \lambda a_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda a_n \mathbf{e}_n.$$

Dimensione dello spazio. La *dimensione* di uno spazio lineare L coincide col massimo numero di vettori linearmente indipendenti. Se n è tale numero, $n + 1$ vettori di L sono linearmente dipendenti. Lo spazio in tale caso si dice n -dimensionale. Se il numero dei vettori linearmente indipendenti è arbitrariamente grande, lo spazio ha infinite dimensioni.

Lo spazio delle matrici $[A]_{2 \times 2}$ ha quattro dimensioni; mentre nello spazio $C(a, b)$ possiamo trovare un numero arbitrariamente grande di vettori linearmente indipendenti e quindi tale spazio ha infinite dimensioni. In uno spazio L di n dimensioni esiste una base di n vettori; viceversa se in L esiste una base allora la dimensione di L è uguale al numero dei vettori della base.

Trasformazioni lineari Siano L e L' due spazi lineari. Una trasformazione lineare è una funzione A che associa ad ogni vettore $\mathbf{x} \in L$ un vettore $\mathbf{x}' \in L'$,

$$A\mathbf{x} = \mathbf{x}',$$

e verifica le condizioni:

$$1) A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L;$$

$$2) A(\lambda \mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in L \text{ e } \forall \lambda \in R.$$

Esempio: Si consideri il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = x'_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = x'_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = x'_3, \end{cases} \quad (7)$$

Posto

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4); \quad \mathbf{x}' \equiv (x'_1, x'_2, x'_3)$$

il sistema (7) può essere scritto nella forma

$$[A]\mathbf{x} = \mathbf{x}'.$$

In questo caso la matrice $[A]$ è una trasformazione lineare che fa corrispondere ad ogni vettore $\mathbf{x}$ dello spazio 4-dimensionale L , un vettore $\mathbf{x}'$ dello spazio tridimensionale L' .

4. Punti e Vettori

Punti. Non abbiamo una definizione di punto, che pertanto deve essere accettato come nozione primitiva. Denotiamo con E l'insieme dei punti geometrici dello spazio euclideo tridimensionale.

Vettori. Un *vettore* è la differenza tra due punti

$$\mathbf{u} = Q - P \quad (8)$$

e si rappresenta graficamente con una freccia (Fig.1).

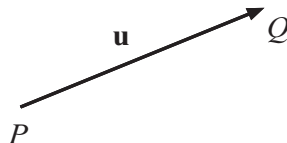


Fig.1

Riscrivendo la (8) nella forma

$$Q = P + \mathbf{u},$$

possiamo anche dire che la somma di un punto ed un vettore è un punto.

Per precisare che il vettore $\mathbf{u}$ è *applicato* nel punto P useremo la notazione $(P, \mathbf{u})$. Se si prescinde dal particolare punto di applicazione il vettore $\mathbf{u}$ si dice *libero*. Con V indichiamo l'insieme dei vettori.

Prodotto scalare. Il prodotto scalare è un'operazione definita in V che ad ogni coppia di vettori fa corrispondere un numero reale. Il prodotto scalare si indica con un punto ed ha le seguenti proprietà:

- 1) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$ (*commutativa*);
- 2) $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$ (*distributiva*);
- 3) $\lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \lambda \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ per ogni numero reale λ ;
- 4) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0$ per $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ per $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Al punto 4) $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo. Se $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$, i vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono detti *ortogonali*. Il vettore nullo è l'unico ad essere ortogonale ad ogni altro elemento dello spazio.

Lemma 3 *Se 3 vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ non nulli sono tra loro ortogonali, allora sono linearmente indipendenti.*

Infatti, se fossero dipendenti, esisterebbero 3 costanti non tutte nulle tali che

$$a_1 \mathbf{a} + a_2 \mathbf{b} + a_3 \mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (9)$$

Moltiplicando scalarmente entrambi i membri della (9) per $\mathbf{a}$ abbiamo

$$a_1 \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0. \quad (10)$$

La (10) è verificata se e solo se $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, in contrasto con l'ipotesi fatta.

Il *modulo* di un vettore $\mathbf{a}$ è il numero non negativo

$$a = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \quad (11)$$

Il modulo di $\mathbf{a}$ si denota anche con $|\mathbf{a}|$. Un vettore di modulo 1 si dice *unitario* o *normalizzato*. Moltiplicando il vettore non nullo $\mathbf{a}$ per $1/a$ si ottiene il vettore unitario $\mathbf{m} = \mathbf{a}/a$.

Siano $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ tre vettori unitari e mutuamente ortogonali ossia

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{per } i = j \\ 0 & \text{per } i \neq j \end{cases} . \quad (12)$$

La (12) si può riscrivere nella forma

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad (13)$$

dove δ_{ij} è il delta di Kronecker ossia un operatore con due indici che assume due valori 1 e 0:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} .$$

Scelto un punto O detto origine, l'insieme $O\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ costituisce un sistema di coordinate cartesiane. Per il Lemma 3 i vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sono linealmente indipendenti e formano una base in V . Ogni vettore $\mathbf{a}$ può essere rappresentato nella forma

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3. \quad (14)$$

I numeri a_i sono le componenti cartesiane di $\mathbf{a}$. Notiamo che

$$a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i. \quad (15)$$

Utilizzando la (13) il prodotto scalare tra i vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ si esplicita in

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \quad (16)$$

Analogamente si ricava che il modulo del vettore $\mathbf{a}$ è

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Esercizio 7. a) Trovare un vettore di modulo 5 ortogonale ad $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$. b) Trovare il vettore unitario $\mathbf{m}$ tale che $\mathbf{a} = a\mathbf{m}$.

Vettore posizione. Il vettore

$$\mathbf{r} = P - O$$

è detto *vettore posizione* del punto P . Posto

$$\mathbf{r} = x_1^P \mathbf{e}_1 + x_2^P \mathbf{e}_2 + x_3^P \mathbf{e}_3,$$

le componenti x_1^P, x_2^P, x_3^P di $\mathbf{r}$ si definiscono le coordinate cartesiane del punto P .

Angoli tra vettori. L'angolo θ tra due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è definito da

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{uv} \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (17)$$

Posto $\mathbf{u} = u\mathbf{m}$ e $\mathbf{v} = v\mathbf{n}$ si ha

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = \cos \theta. \quad (18)$$

Dalla (18) deduciamo che le componenti m_i di un vettore unitario $\mathbf{m}$ sono uguali ai coseni degli angoli che $\mathbf{m}$ forma con i vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (Fig.2).

Siano α, β, γ tali angoli, abbiamo

$$m_1 = \mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_1 = \cos \alpha, \quad m_2 = \mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_2 = \cos \beta, \quad m_3 = \mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_3 = \cos \gamma \quad (19)$$

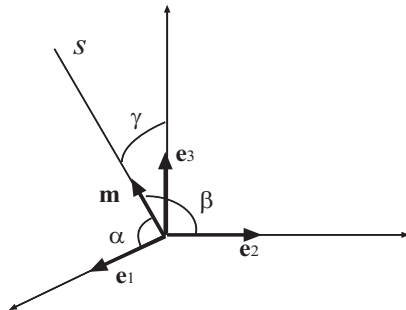


Fig.2

Oss.: I coseni degli angoli α, β e γ sono anche i *coseni direttori* della retta orientata s . Essi coincidono con le componenti di $\mathbf{m}$.

Esercizio 8 Determinare i coseni direttori della retta di equazione $x_1 - 2x_2 + 1 = 0$ orientata nel verso delle x_1 crescenti.

Prodotto vettoriale Il prodotto vettoriale si indica con il simbolo $\times$, ed è un'operazione che associa a due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ un vettore $\mathbf{c}$

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (20)$$

con la seguente regola:

$$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1. \quad (21)$$

Facendo uso del *simbolo di permutazione* ε_{ijk} la (20) si può scrivere nella forma

$$\mathbf{c} = \varepsilon_{ijh} a_j b_h \mathbf{e}_i. \quad (22)$$

Il simbolo di permutazione è un operatore a 3 indici che assume 3 valori: 0, 1, -1:

$$\varepsilon_{ijh} = \begin{cases} 0 & \text{se due o più indici sono ripetuti} \\ 1 & \text{per permutazioni pari degli indici} \\ -1 & \text{per permutazioni dispari degli indici.} \end{cases}$$

Valgono le seguenti proprietà:

- 1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (*la proprietà commutativa non è verificata*).
- 2) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ (*distributiva*).
- 3) $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ per ogni numero reale λ .

Inoltre è di immediata verifica che $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Introducendo la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ si ha

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijh} \mathbf{e}_h. \quad (23)$$

Spesso per il prodotto vettoriale si utilizza anche la scrittura

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}.$$

Vogliamo dimostrare che il vettore $\mathbf{c}$ è ortogonale ad $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, ha modulo uguale all'area del parallelogramma formato dai due vettori e verso tale che la terna $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ sia levogira (Fig. 3). Tenendo conto delle relazioni (16) e (22) si ha

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = c_i a_i = \varepsilon_{ijh} a_i a_j b_h = 0.$$

Analogamente si dimostra che $\mathbf{c}$ è ortogonale a $\mathbf{b}$. Poi utilizzando l'Esercizio 15c si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \sqrt{(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})} = \sqrt{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2} \\ &= \sqrt{u^2 v^2 (1 - \cos^2 \varphi)} = uv \sin \varphi = \text{area } A. \end{aligned}$$

Si osserva che se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono allineati area $A = 0$ e quindi $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

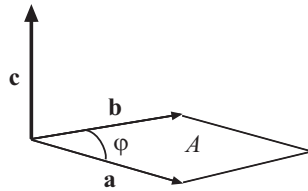


Fig.3

Esercizio 9 Assegnati i vettori $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ trovare: a) l'angolo α tra i due vettori, b) l'angolo β ($< \frac{\pi}{2}$) tra le diagonali del parallelogramma costruito con i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, c) l'area del parallelogramma.

Esercizio 10 Trovare l'area del triangolo i cui vertici sono posti nei punti $P \equiv (1, 1, 1)$, $Q \equiv (2, 0, 0)$, $R \equiv (2, 1, 0)$.

Esercizio 11 Trovare il vettore $\mathbf{c}$ di modulo 3, ortogonale ai vettori $\mathbf{a} = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{b} = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ tale che la terna $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ sia antioraria. Verificare che i 3 vettori sono linearmente indipendenti.

Esercizio 12 Dimostrare che $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = -2\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Esercizio 13 Assegnati i vettori $\mathbf{a} = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{c} = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, verificare che $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

Dall'esercizio precedente si deduce che la proprietà associativa non è valida in generale. Le parentesi sono necessarie altrimenti la scrittura $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ risulta ambigua.

Prodotto misto L'operazione $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ è denominata prodotto misto. Il risultato è il numero.

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \varepsilon_{ijh} a_i b_j c_h, \quad (24)$$

Il secondo membro della (24) è il determinante della matrice

$$[M] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Quindi il prodotto misto è nullo se i tre vettori sono linearmente dipendenti. Il prodotto misto dei vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ fornisce

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_h = \varepsilon_{ijh}. \quad (25)$$

Anche a questa operazione possiamo attribuire un significato geometrico: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ è uguale in valore assoluto al volume del parallelepipedo costruito con i 3 vettori (Fig.4)

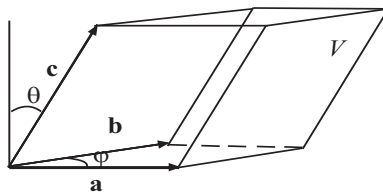


Fig.4

Utilizzando le relazioni (17), (23) si pone

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}| = |abc \sin \varphi \cos \theta| = \text{vol } V.$$

Infatti $ab \sin \varphi = \text{area } A$ e $c \cos \theta = h$. Anche in questo caso osserviamo che se i vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sono complanari $\text{vol } V = 0$ e quindi $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$.

Esercizio 14 Posto $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{c} = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$ trovare $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

Esercizio 15 *Provare che sono valide le relazioni:*

a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} + \mathbf{a}) = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

c) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$.

Regole grafiche La somma di due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ si effettua secondo la *regola del parallelogramma*. Si costruisce un parallelogramma i cui lati sono paralleli ai vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Il vettore somma $\mathbf{w}$ è parallelo alla diagonale principale (Fig.5).

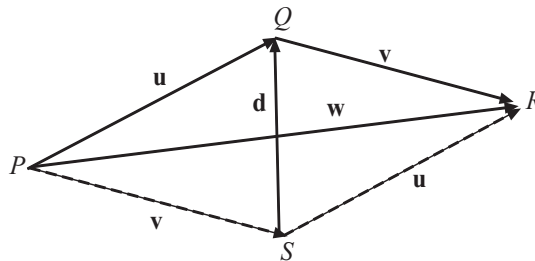


Fig.5

Infatti siano P, Q, R e S i vertici del parallelogramma, si ha

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (Q - P) + (R - Q) = R - P = \mathbf{w}.$$

Il vettore differenza è parallelo all'altra diagonale

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (Q - P) - (S - P) = Q - S = \mathbf{d}.$$

La regola del parallelogramma può essere generalizzata per sommare più di due vettori (Fig. 6).

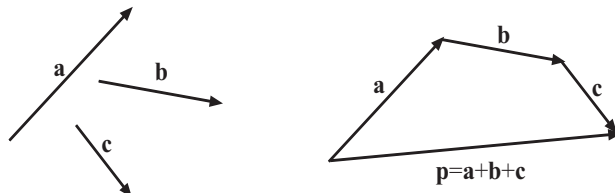


Fig.6

La costruzione in Fig.6 è anche detta *poligono dei vettori*.

Il prodotto $\lambda \mathbf{u}$ è un vettore parallelo ad $\mathbf{u}$ di modulo λu (Fig. 7).



Fig.7

Esercizio 16 Assegnati i vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ in Fig.8, costruire graficamente il vettore $\mathbf{g} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$.

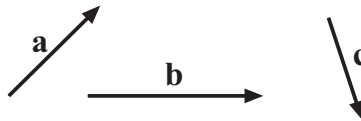


Fig.8

Esercizi supplementari

Esercizio 17 Dimostrare che R_3 è uno spazio lineare

Esercizio 18 Assegnati i vettori $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{y} = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{z} = -\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ ed $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, trovare α, β, γ tali che

$$\mathbf{u} = \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} + \gamma \mathbf{z}.$$

Esercizio 19 Verificare che i vettori $\mathbf{x} = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{z} = 2\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 + \frac{5}{2}\mathbf{e}_3$ sono linearmente dipendenti.

Esercizio 20 Determinare i coseni direttori della retta

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 1 = 0 \\ x_1 - 5 = 0. \end{cases}$$

Esercizio 21 Trovare il volume del parallelepipedo i cui lati sono paralleli ai vettori $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Esercizio 22 Trovare la costante α tale che i vettori $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{c} = 3\mathbf{e}_1 + \alpha\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3$ siano complanari.

Esercizio 23 Determinare l'equazione della retta a) passante per i punti $P \equiv (0, -1, 1)$ e $Q \equiv (1, 2, 1)$, b) passante per il punto $P \equiv (0, -1, 1)$ e parallela al vettore $\mathbf{u} \equiv -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$.

Esercizio 24 Trovare la distanza del punto $P \equiv (3, -2, 2)$ dalla retta congiungente i punti $Q \equiv (2, 1, 2)$ ed $R \equiv (3, -1, 4)$.

Esercizio 25 Determinare l'equazione del piano passante per i punti $P \equiv (2, 0, 0)$, $Q \equiv (0, 1, 0)$, $R \equiv (0, 0, -2)$.

Esercizio 26 Dimostrare che il vettore $\mathbf{n} \equiv a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3$ è ortogonale al piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$.

Esercizio 27 Determinare l'equazione della sfera di raggio 3 e centro in $P \equiv (2, 2, 1)$.

Esercizio 28 Interpretare geometricamente la trasformazione lineare

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

di V in V .

5. Tensori del 2° ordine

Un tensore del secondo ordine $\mathbf{A}$ è una trasformazione lineare di V in V ,

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{v}. \quad (26)$$

Nell'insieme dei tensori del 2° ordine, detto *Lin*, introduciamo le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare con le seguenti proprietà

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (\alpha\mathbf{A})\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{u}).$$

Siano inoltre $\mathbf{O}$ e $\mathbf{I}$ rispettivamente il *tensore nullo* e il *tensore identità* tali che

$$\mathbf{O}\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{I}\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in V.$$

Si deduce che l'insieme Lin è uno spazio lineare. Le componenti a_{ij} di un tensore $\mathbf{A}$ sono definite da

$$a_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} \mathbf{e}_j, \quad (27)$$

Se $i = j$ si dicono *normali*, di *taglio* se $i \neq j$. Dalla (27) ricaviamo che le componenti del tensore $\mathbf{O}$ sono tutte nulle, mentre δ_{ij} sono le componenti del tensore $\mathbf{I}$.

Le 9 componenti a_{ij} di un tensore possono essere ordinate in forma di matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = [A].$$

Ogni tensore del 2° ordine può essere rappresentato da una matrice 3×3 ed ogni matrice 3×3 è un tensore del 2° ordine. Questa coincidenza ($\mathbf{A} = [A]$) ci consente di trattare i tensori come matrici, di sommare e moltiplicare due tensori così come si effettua la somma e il prodotto di due matrici e di applicare ai tensori le definizioni che sono proprie della teoria delle matrici quadrate. Nel seguito, non essendoci possibilità di confusione, per tensore si intende tensore del 2° ordine.

Siano a_{ij} le componenti di un tensore $\mathbf{A}$, il tensore $\mathbf{A}^T$ di componenti a_{ji} si dice il *trasposto* di $\mathbf{A}$. Notiamo che

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T, \quad (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}, \quad (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad (28)$$

Spesso faremo uso della seguente relazione

$$\mathbf{A} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{v}. \quad (29)$$

Un tensore $\mathbf{A}$ è *simmetrico* se $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, *emisimmetrico* se $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$. In quest'ultimo caso le componenti normali sono nulle. Denotiamo con *Sym* e *Skw* rispettivamente l'insieme dei tensori simmetrici ed emisimmetrici.

Un generico tensore $\mathbf{A}$ è somma di un tensore simmetrico $\mathbf{A}_S$ e di uno emisimmetrico $\mathbf{A}_E$. Infatti posto

$$\mathbf{A}_S = \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T), \quad \mathbf{A}_E = \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T),$$

si ha

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_S + \mathbf{A}_E. \quad (30)$$

La decomposizione (30) è unica.

Tra i tensori emisimmetrici e i vettori esiste una corrispondenza biunivoca. Ad ogni tensore emisimmetrico $\mathbf{W}$ corrisponde un unico vettore $\mathbf{w}$ tale che

$$\mathbf{W}\mathbf{u} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in V \quad (31)$$

e viceversa. Infatti sia

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix},$$

ad esso corrisponde il vettore $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2 + \gamma \mathbf{e}_3$, detto il *vettore assiale* di $\mathbf{W}$. Si ha inoltre che

$$\mathbf{W}\mathbf{v} = 0$$

per ogni vettore $\mathbf{v}$ parallelo a $\mathbf{w}$ ($\mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}$).

Ad ogni tensore $\mathbf{A}$ si possono associare due scalari: la traccia e il determinante,

$$\text{tr} \mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad \det \mathbf{A} = \varepsilon_{ijh} a_{1i} a_{2j} a_{3h}.$$

La traccia è un operatore lineare. Infatti

$$\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr} \mathbf{A} + \text{tr} \mathbf{B}, \quad \text{tr}(\alpha \mathbf{A}) = \alpha (\text{tr} \mathbf{A}). \quad (32)$$

Le proprietà (32) non sono verificate dal determinante che pertanto non è un operatore lineare. Valgono inoltre le seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned} \text{tr} \mathbf{A}^T &= \text{tr} \mathbf{A}, & \text{tr}(\mathbf{AB}) &= \text{tr}(\mathbf{BA}) \\ \det \mathbf{A}^T &= \det \mathbf{A}, & \det(\mathbf{AB}) &= \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (33)$$

Il *tensore inverso* di $\mathbf{A}$ è l'unico tensore $\mathbf{A}^{-1}$ tale che

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (34)$$

L'inverso di $\mathbf{A}$ è dato da

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \text{agg} \mathbf{A}^T. \quad (35)$$

Si deduce che $\mathbf{A}$ è invertibile se e solo se $\det \mathbf{A} \neq 0$. Si ha

$$\det \mathbf{A}^{-1} = (\det \mathbf{A})^{-1}, \quad (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}, \quad (\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{A}^{-T}. \quad (36)$$

Inoltre l'inverso di un tensore simmetrico è simmetrico, un tensore emisimmetrico non è invertibile.

Un'interessante interpretazione geometrica del determinante di un tensore discende dalla seguente relazione

$$\det \mathbf{A} = \frac{\mathbf{Au} \cdot \mathbf{Av} \times \mathbf{Aw}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}} \quad (37)$$

dove $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono tre vettori non complanari. La relazione (37) si dimostra tenendo conto delle equazioni (29), (35), (36) e del risultato dell'Esercizio 33. Infatti

$$\begin{aligned} \mathbf{Au} \cdot \mathbf{Av} \times \mathbf{Aw} &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}^T \text{agg} \mathbf{A} (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \\ (\det \mathbf{A}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{A}^{-T} (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= (\det \mathbf{A}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Indichiamo con V e con $\mathbf{A}(V)$ rispettivamente i parallelepipedi formati dai vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e dai vettori $\mathbf{Au}$, $\mathbf{Av}$ e $\mathbf{Aw}$ (Fig.9).

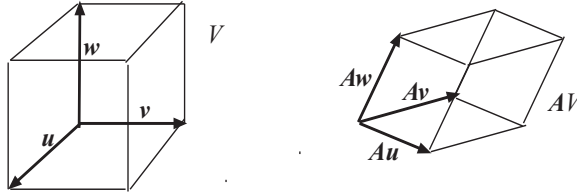


Fig.9

Essendo $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}| = \text{vol} V$ e $|\mathbf{Au} \cdot \mathbf{Av} \times \mathbf{Aw}| = \text{vol} \mathbf{A}(V)$, dalla (37) si ottiene

$$|\det \mathbf{A}| = \frac{\text{vol} \mathbf{A}(V)}{\text{vol} V}. \quad (38)$$

Esercizio 29. *Assegnato il tensore*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

e il vettore $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ trovare il vettore $\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u}$.

Esercizio 30. Sia $\mathbf{A}$ il tensore dell'esercizio 29, trovare $\mathbf{A}^T, \mathbf{A}_S, \mathbf{A}_E$. Verificare inoltre che $\mathbf{A} = \mathbf{A}_S + \mathbf{A}_E$.

Esercizio 31. Dimostrare la relazione (29).

Esercizio 32. Qual'è il vettore assiale $\mathbf{a}$ del tensore $\mathbf{A}_E$ dell'esercizio 30? Verificare che $\mathbf{A}_E\mathbf{a} = 0$.

Esercizio 33. Dimostrare che la relazione $\mathbf{A}\mathbf{u} \times \mathbf{A}\mathbf{v} = \text{agg}\mathbf{A}(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ è valida.

Esercizio 34. Trovare il tensore inverso di

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Prodotto scalare In *Lin* possiamo introdurre l'operazione di prodotto scalare, che assegna ad ogni coppia di tensori $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ uno scalare con la seguente regola

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_{ij}b_{ij}. \quad (39)$$

Se $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, in conformità a quanto detto per i vettori, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono ortogonali. La (39) ci consente di definire il modulo di un tensore

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} = \sqrt{a_{ij}a_{ij}}.$$

Valgono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}, \\ \mathbf{A} \cdot (\alpha\mathbf{B}) &= \alpha(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \geq 0 \quad (= 0 \text{ per } \mathbf{A} = \mathbf{O}). \end{aligned} \quad (40)$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}), \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \text{tr}\mathbf{A}, \\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{BC}) &= (\mathbf{B}^T \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{AC}^T) \cdot \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (41)$$

Il prodotto scalare tra un tensore simmetrico $\mathbf{S}$ ed uno emisimmetrico $\mathbf{E}$ è zero

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (42)$$