

# MOTI QUASI UNIDIMENSIONALI

In generale, per caratterizzare in un punto le condizioni termofluidodinamiche di **un fluido a tre gradi estensivi di libertà** sono necessari **tre parametri**, di cui **due termodinamici** (scalari) ed **uno cinetico** (vettoriale).

Si vedrà che, **se il moto è unidimensionale, il parametro cinetico diventa anch'esso uno scalare**, per cui, ad es., la determinazione della **pressione, della temperatura e del modulo della velocità** del fluido in un punto (o in una sezione del condotto) caratterizza completamente lo stato termofluidodinamico del fluido in detto punto (o sezione).

Occorre, peraltro, osservare che **la scelta dei tre parametri, purché indipendenti tra loro** (il che comporta che almeno uno abbia un contenuto cinetico), **non è univoca** potendosi scegliere tra: la densità, la pressione, la temperatura l'energia interna, l'entalpia, il flusso di massa, l'entropia, la velocità, l'energia cinetica specifica del fluido, il numero di Mach etc..

Poiché la descrizione è di **tipo specifico** (per unità di massa, o di volume, e quindi con due gradi specifici di libertà termodinamici), e poiché si vuole caratterizzare lo stato in un punto, od in una sezione, tutti i suddetti parametri saranno necessariamente o **intensivi**, o **specifici**.

## DESCRIZIONE INTEGRALE E DIFFERENZIALE

Lo studio euleriano del moto di un fluido si può fare con due diversi approcci:

- il **differenziale** che utilizza le equazioni del bilancio scritte nel **volume di controllo elementare** (ad es., l'intorno infinitesimo di un punto);
- l' **integrale** che, invece, utilizza le stesse equazioni per un **volume finito**.

Beninteso, a differenza di quanto accade nella teoria cinetica, **entrambe queste descrizioni sono di tipo macroscopico** e cioè sviluppate nell'ambito dell'ipotesi del continuo.

La **principale differenza** tra le due descrizioni consiste nel fatto che, mentre l'approccio differenziale tende a descrivere il comportamento del fluido **punto per punto** del campo di moto, quello integrale porta essenzialmente in conto **sia quanto viene scambiato sulla superficie di controllo** del sistema studiato **che, in maniera globale, quanto accade nel volume di controllo**.

Poiché trascura il dettaglio del campo di moto, la **descrizione integrale è senz'altro più semplice e immediata**. Peraltro, occorre osservare che, non analizzando quanto avviene all'interno del volume di controllo, **l'approccio integrale conduce solo a informazioni di tipo globale**.

Inoltre, **la sua applicazione può dipendere da dati già noti** (ad es., sperimentalmente) che occorre dare **a priori** per risolvere il problema studiato.

## DESCRIZIONE INTEGRALE E DIFFERENZIALE

La **descrizione integrale** è particolarmente conveniente nei problemi che studiano il moto di un fluido all'interno di condotti (**fluidodinamica interna**), mentre nei problemi di **fluidodinamica esterna** si ricorre quasi sempre alla **descrizione differenziale**.

E' importante osservare che l'**approccio integrale** può condurre a risposte abbastanza accurate nel caso in cui il moto all'interno di un condotto può essere considerato **quasi unidimensionale**.

Si ricorda che, il moto in un condotto si definisce **quasi unidimensionale** quando **ciascun parametro** del moto (ad es., velocità, temperatura, pressione, etc.) **può essere considerato costante su ciascuna sezione permeabile normale all'asse del condotto** (mentre può essere, in generale, variabile da sezione a sezione permeabile).

Generalmente, un moto **quasi unidimensionale** viene ad essere, più semplicemente, chiamato moto **unidimensionale**.

## IPOTESI PER MOTI QUASI UNIDIMENSIONALI

Affinchè sia verificata **l'ipotesi di quasi unidimensionalità**, deve aversi:

$$\boxed{Re \gg 1} ; \quad \boxed{\frac{1}{A} \left( \frac{dA}{dx} \right)^2 \ll 1} \quad (\text{Fig. 1}) ; \quad \boxed{\frac{\Delta}{R} \ll 1} \quad (\text{Fig. 2})$$

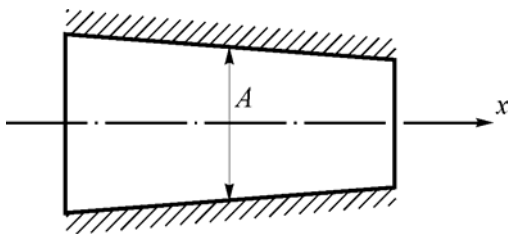


Fig. 1

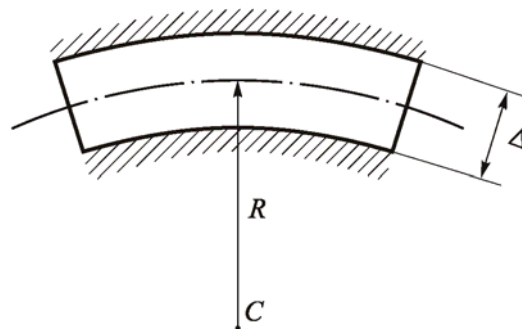
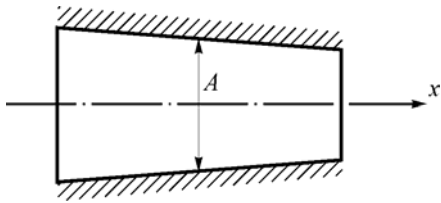


Fig. 2

La **prima condizione** garantisce che la zona in prossimità della parete, dove la velocità si deve necessariamente annullare per l'ipotesi del continuo, sia di estensione trascurabile rispetto a tutta la sezione del condotto.



$$\frac{1}{A} \left( \frac{dA}{dx} \right)^2 \ll 1$$

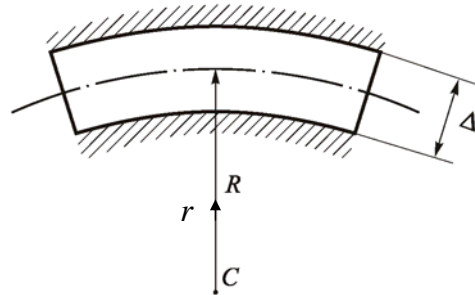
La **seconda condizione** garantisce una **variazione dell'area della sezione molto graduale** e, quindi, il poter considerare il vettore velocità praticamente **costante anche vettorialmente** in ciascuna sezione retta del condotto.

La **terza condizione** invece, ricordando l'equilibrio della particella in direzione radiale:

$$\left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=R} = \rho \frac{V^2}{R}$$

e approssimando la derivata con il corrispondente rapporto incrementale, diventa:

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho V^2} \cong 2 \frac{\Delta}{R} \ll 1$$



Condizione la quale impone che la **variazione della pressione statica nella generica sezione del condotto sia trascurabile rispetto al valore della pressione dinamica nella sezione stessa.**

## MOTI UNIDIMENSIONALI STAZIONARI

Nel seguito, non si parlerà più di moto **quasi unidimensionale e quasi stazionario** ma, più semplicemente, di **moto unidimensionale e stazionario**.

In definitiva, **l'applicazione del modello di moto unidimensionale e stazionario in un condotto** prevede che sia soddisfatta la seguente coppia di ipotesi:

- **Trascurabilità del termine instazionario**, cioè quello che è relativo alla variazione nel tempo della generica grandezza estensiva  $G$  nel volume di controllo  $V$ ;
- **Costanza del valore di tutte le grandezze termofluidodinamiche (tutti i parametri) su ciascuna superficie permeabile normale all'asse del condotto appartenente alla superficie esterna che delimita il volume di controllo** (mentre queste stesse grandezze possono, generalmente, variare da una sezione ad un'altra sezione permeabile).

## CONSERVAZIONE DELLA MASSA PER MOTI UNIDIMENSIONALI STAZIONARI

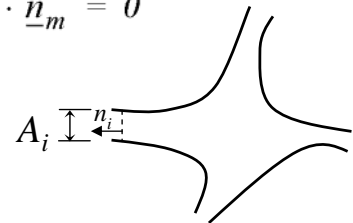
$$\cancel{\frac{d}{dt} \int_V \rho dV} + \int_D \rho \underline{V} \cdot \underline{n} dD = 0$$

Indicando con  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) **l'area di ciascuna superficie permeabile di  $D$**  (considerata piana per semplicità) sulla quale si verifica la costanza dei parametri, con  $\underline{n}_i$  **il versore della normale da essa uscente** e ricordando che **il termine instazionario deve annullarsi**, l'equazione di conservazione della massa diventa:

$$\begin{aligned} \int_D \rho \underline{V} \cdot \underline{n} dA &= \int_{A_1} \rho \underline{V} \cdot \underline{n} dA + \int_{A_2} \rho \underline{V} \cdot \underline{n} dA + \dots + \int_{A_m} \rho \underline{V} \cdot \underline{n} dA = \\ &= \rho_1 A_1 \underline{V}_1 \cdot \underline{n}_1 + \rho_2 A_2 \underline{V}_2 \cdot \underline{n}_2 + \dots + \rho_m A_m \underline{V}_m \cdot \underline{n}_m = 0 \end{aligned}$$

Ovvero, **più semplicemente**:

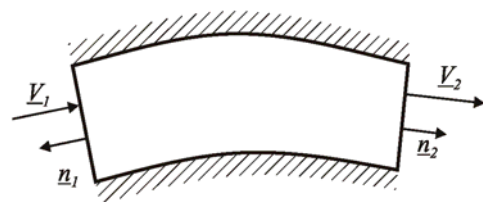
$$\boxed{\sum_{i=1}^m \rho_i A_i \underline{V}_i \cdot \underline{n}_i = 0}$$



## CONSERVAZIONE DELLA MASSA PER MOTI UNIDIMENSIONALI STAZIONARI

Se, in particolare, il sistema di controllo è una **porzione di condotto** e su ciascuna delle **due uniche superfici permeabili** della superficie di controllo del sistema (e necessariamente solo su ciascuna di esse) **è ipotizzabile sia la costanza (vettoriale) della velocità che della densità**, la formula precedente diventa:

**due sole superfici permeabili**



$$\sum_{i=1}^m \rho_i A_i \underline{V}_i \cdot \underline{n}_i = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\rho_1 A_1 \underline{V}_1 \cdot \underline{n}_1 + \rho_2 A_2 \underline{V}_2 \cdot \underline{n}_2 = 0}$$

Se inoltre, come in figura, **ciascuna superficie è ortogonale al corrispondente vettore velocità** si ha:

$$\underline{V}_1 \cdot \underline{n}_1 = -V_1$$

$$\boxed{\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2}$$

$$\underline{V}_2 \cdot \underline{n}_2 = V_2$$

e, cioè, la cosiddetta **portata di massa**  $\dot{m} = \rho VA$  **risulta costante**.

Va fatto esplicitamente notare che nel moto stazionario di un fluido in un condotto è sempre verificata la costanza della portata attraverso ciascuna sezione permeabile del condotto di area  $A$ . Però, l'eguaglianza precedente è esprimibile solo su quelle superfici per ciascuna delle quali si ipotizza la costanza sia di  $\rho$  che di  $\underline{V}$  (moto unidimensionale).

Se detta relazione è applicabile ad una qualunque sezione retta del condotto (di area  $A$ ) si può ovviamente scrivere, sezione per sezione:

$$\dot{m} = \rho VA = GA = \text{cost}$$

relazione che può essere anche espressa nella forma:

$$\ln(\rho VA) = \ln \rho + \ln V + \ln A = \ln(\text{cost})$$

Differenziando la relazione precedente, si ottiene:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0$$

che rappresenta l'equazione della conservazione della massa in forma differenziale per un condotto nel quale un moto stazionario può essere considerato unidimensionale in qualunque sezione retta dello stesso.

## BILANCIO DELLA QUANTITA' DI MOTO PER MOTI UNIDIMENSIONALI STAZIONARI

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{V} dV + \int_D \rho \underline{V} \underline{V}_n dD + \int_D p \underline{n} dD - \int_D \underline{\tau}_d \cdot \underline{n} dD = \int_V \rho \underline{g} dV$$

Particolarizzando per il modello di moto in esame, l'equazione del bilancio della quantità di moto diventa (le  $A_i$  sono sempre le superfici permeabili):

$$\sum_{i=1}^m A_i (\rho_i \underline{V}_i \underline{V}_{ni} + p_i \underline{n}_i) + \underline{S} = \mathcal{M} \underline{g}$$

avendo tenuto presente che:

- il termine instazionario si annulla per il modello di moto in esame;
- la quantità  $\underline{S}$  rappresenta l'integrale di tutti gli sforzi superficiali ( $p$  e  $\tau_d$ , parte dissipativa e non, cioè sforzi viscosi e non) sulle superfici impermeabili del sistema; essa rappresenta pertanto la spinta totale del fluido su dette superfici (in quanto è positiva al primo membro);
- la quantità  $\mathcal{M}$  è la massa totale del sistema presente nel volume di controllo e, quindi,  $\mathcal{M}g$  rappresenta la forza peso agente sul fluido;

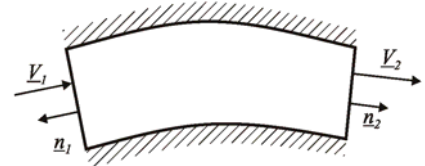
➤ su tutte le superfici permeabili  $A_i$ , i termini relativi agli sforzi viscosi sono stati ritenuti nulli;

Infatti, la **componente tangenziale** degli sforzi viscosi sulle superfici permeabili è identicamente nulla per l'ipotesi di unidimensionalità;

Va fatto poi notare che, per trascurare la **componente normale** su dette superfici, deve anche essere **trascurabile il termine che rappresenta la parte dissipativa della componente normale dello sforzo viscoso**.

Ciò è sempre vero per **moto incompressibile**, o è ipotizzabile se la **velocità del fluido varia debolmente nella sua stessa direzione** (come in un moto quasi unidimensionale).

$$\sum_{i=1}^m A_i (\rho_i \underline{V}_i \underline{V}_{mi} + p_i \underline{n}_i) + \underline{S} = \mathcal{M} \underline{g}$$



Se il condotto ha due sole superfici permeabili, si ha:

$$\dot{m} (\underline{V}_2 - \underline{V}_1) + p_1 A_1 \underline{n}_1 + p_2 A_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = \mathcal{M} \underline{g}$$

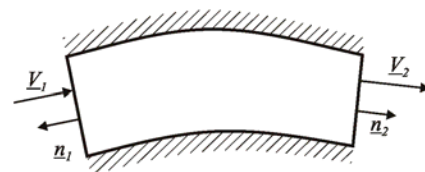
Se inoltre ciascuna delle due superfici permeabili è ortogonale al vettore velocità, si ha:

$$(p_1 + \rho_1 V_1^2) A_1 \underline{n}_1 + (p_2 + \rho_2 V_2^2) A_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = \mathcal{M} \underline{g}$$

$$(p_1 + \rho_1 V_1^2) A_1 \underline{n}_1 + (p_2 + \rho_2 V_2^2) A_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = \mathcal{M} \underline{g}$$

Introducendo la quantità:

$$I = p + \rho V^2$$



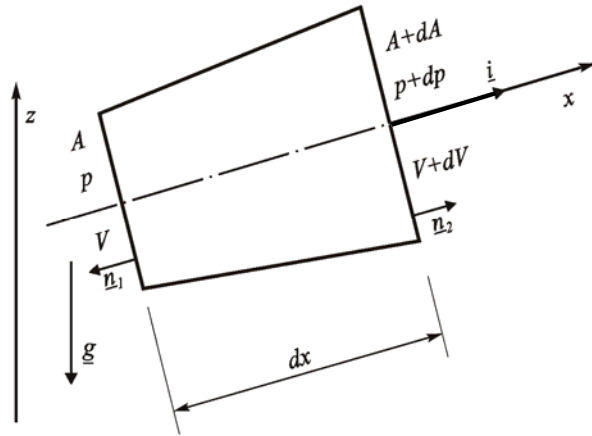
che viene detta **impulso specifico**, si può ricavare l'ulteriore forma:

$$I_1 A_1 \underline{n}_1 + I_2 A_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = \mathcal{M} \underline{g}$$

L'impulso specifico rappresenta il flusso di quantità di moto nelle sue parti convettiva ( $\rho V^2$ , o macroscopica) e diffusiva ( $p$ , o microscopica) reversibile (non dissipativa).

Più propriamente, l'impulso specifico  $I$  è il **modulo della componente vettoriale del flusso di quantità di moto** (nelle sue due parti dette) che attraversa la superficie di normale  $\underline{n}$  avente la stessa direzione (ma non necessariamente lo stesso verso) di  $\underline{V}$ .

Si consideri, ora, il **tratto elementare di condotto** rappresentato nella figura a lato, delimitato da due sezioni permeabili normali all'asse  $x$  e di **lunghezza infinitesima  $dx$** , per cui il tratto stesso può essere praticamente considerato **diritto**. Applicando la:



$$\dot{m}(V_2 - V_1) + p_1 A_1 n_1 + p_2 A_2 n_2 + \underline{S} = \mathcal{M} \underline{g}$$

e **proiettandola lungo la direzione dell'asse del condotto  $x$** , si ottiene:

$$- \dot{m}V + \dot{m}(V + dV) - pA + (p + dp)(A + dA) + dS_x = \rho A dx \underline{g} \cdot \underline{i}$$

La spinta elementare  $dS_x$ , nelle sue **due parti dissipativa e non**, vale:

$$dS_x = -pdA + \tau_p P dx$$

dove  $P$  è il **perimetro della superficie permeabile** e  $\tau_p$  è lo **sforzo tangenziale alla parete impermeabile**, supposto anch'esso **unidimensionale**.

$$- \dot{m}V + \dot{m}(V + dV) - pA + (p + dp)(A + dA) + dS_x = \rho A dx \underline{g} \cdot \underline{i}$$

$$- \cancel{\dot{m}V} + \dot{m}V + \dot{m} dV - \cancel{pA} + \cancel{pA} + dpA + \cancel{pdA} + dpdA + dS_x = \rho A dx \underline{g} \cdot \underline{i}$$

Tenendo presente che:

$$\underline{g} \cdot \underline{i} dx = dx \underline{g} \cdot \underline{i} = -gdz$$

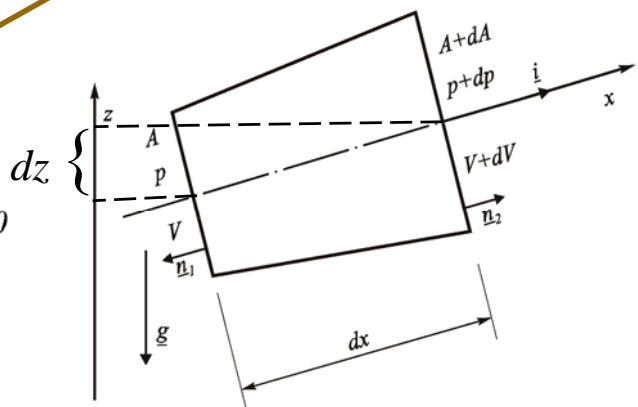
e trascurando i differenziali di ordine superiore al primo, si ottiene:

$$\dot{m}dV + Adp + \rho gAdz + \tau_p P dx = 0$$

Ovvero, dividendo per l'area  $A$  e introducendo il **diametro idraulico o equivalente** ( $D_e = 4A/P$ ) si ha infine:

$$dp + \rho VdV + \rho g dz + 4\tau_p \frac{dx}{D_e} = 0$$

che rappresenta **l'equazione del bilancio della quantità di moto in forma differenziale** per un condotto nel quale il moto, oltre che **stazionario**, può essere considerato **unidimensionale su ciascuna sezione retta**.



Nel caso in cui lo sforzo tangenziale alla parete  $\tau_p$  sia trascurabile ( $\tau_p = 0$ , **moto non viscoso**, e cioè quando  $Re \rightarrow \infty$ ), l'equazione precedente diventa la cosiddetta **equazione di Bernoulli in forma differenziale**:

$$dp + \rho V dV + \rho g dz + 4\tau_p \frac{dx}{D_e} = 0 \quad \rightarrow \quad dp + \rho V dV + \rho g dz = 0$$

che, integrata, dà luogo **all'equazione di Bernoulli per moti stazionari, non viscosi, compressibili**:

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = cost$$

Per un moto in cui siano trascurabili le variazioni di densità, e cioè **per un moto incompressibile** ( $\rho = cost$ ), si ha infine:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = cost$$

che rappresenta **l'equazione di Bernoulli per moti stazionari, non viscosi, incompressibili**. Purché siano rispettate le ipotesi fatte, le equazioni precedenti sono applicabili anche quando il moto non è proprio unidimensionale, ad esempio lungo una linea di corrente.

## TEOREMA DI BERNOULLI

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = cost$$

**Dimensioni: energia/massa**

$$p + \rho \frac{V^2}{2} + \rho g z = cost$$

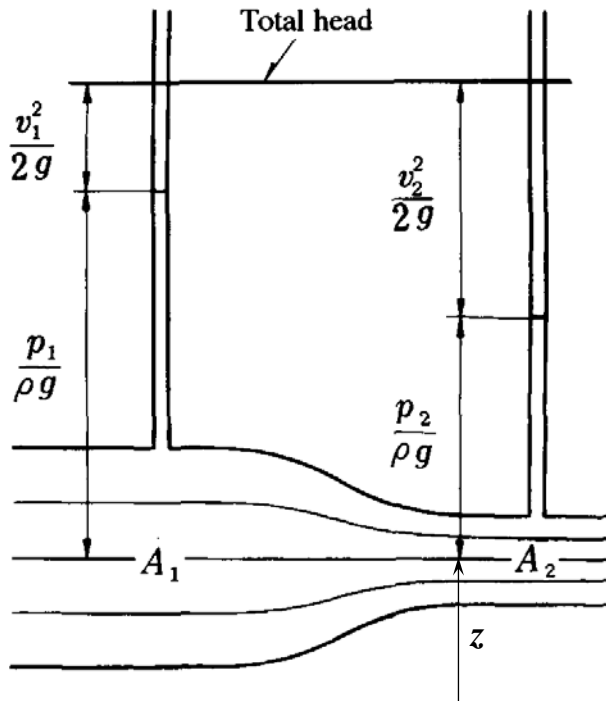
**Dimensioni: pressioni**

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = cost$$

**Dimensioni: altezze**

## TEOREMA DI BERNOULLI

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = \text{cost}$$



### Daniel Bernoulli (1700–82)

Mathematician born in Groningen in the Netherlands. A good friend of Euler. Made efforts to popularise the law of fluid motion, while tackling various novel problems in fluid statics and dynamics. Originated the Latin word *hydrodynamica*, meaning fluid dynamics.

$$V = v$$

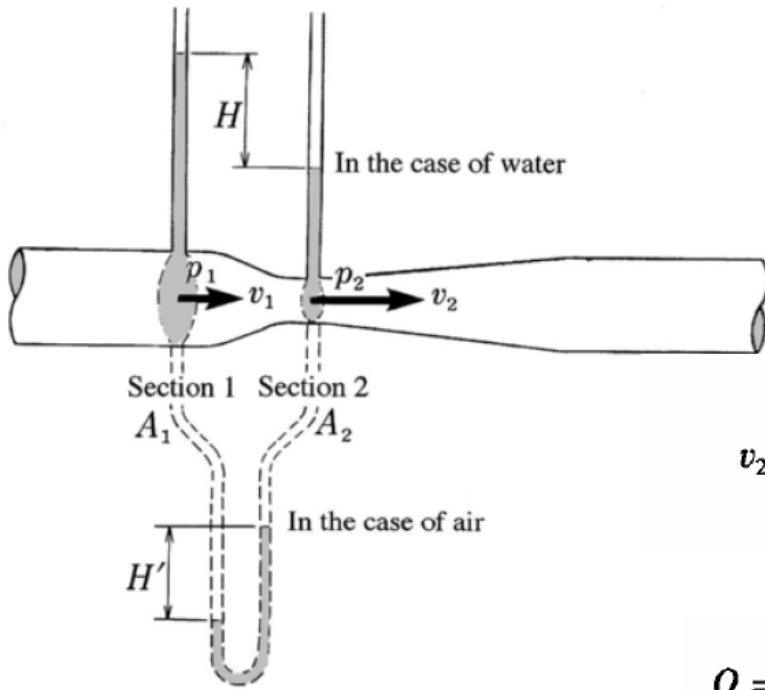
## VENTURI



### Giovanni Battista Venturi (1746–1822)

Italian physicist. After experiencing life as a priest, teacher and auditor, finally became a professor of experimental physics. Studied the effects of eddies and the flow rates at various forms of mouthpieces fitted to an orifice, and clarified the basic principles of the Venturi tube and the hydraulic jump in an open water channel.

## TUBO VENTURI



$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

$$z_1 = z_2$$

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g}$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \sqrt{2g \frac{p_1 - p_2}{\rho g}}$$

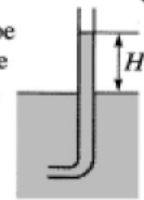
$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = H$$

$$Q = A_2 v_2 = \frac{A_2}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \sqrt{2gH}$$

$$Q = C \frac{A_2}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \sqrt{2gH}$$

*C* coefficiente di efflusso legato alla presenza di perdite di carico

'As expected, whenever the tube faces into the flow, water in the tube goes up. From its height, the flow velocity can be computed.'



## TUBO DI PITOT



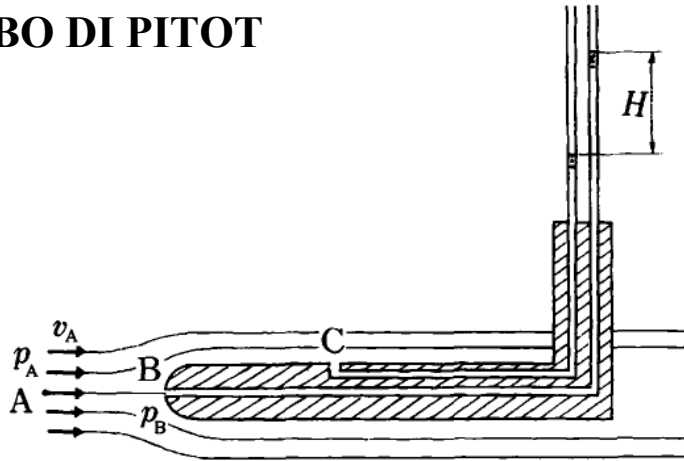
## TUBO DI PITOT

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = \text{cost}$$

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} = \frac{p_B}{\rho g}$$

$$\frac{p_C}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} = \frac{p_B}{\rho g}$$

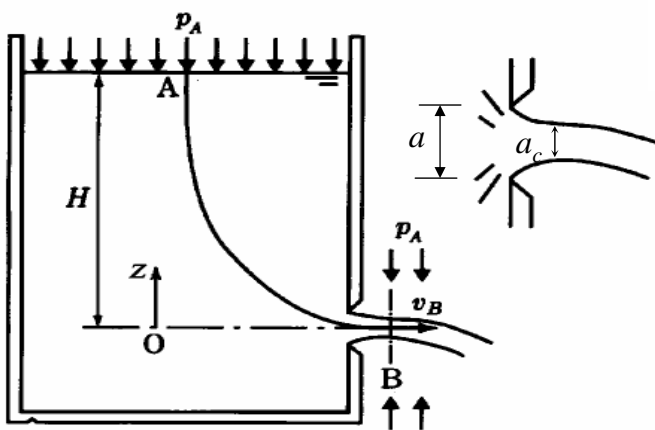
$$(p_B - p_C) / \rho g = H$$



$$V_A = \sqrt{\frac{2(p_B - p_C)}{\rho}}$$

$$V_A = \sqrt{2gH}$$

## TEOREMA DI TORRICELLI



$$\frac{p_A}{\rho g} + \cancel{\frac{v_A^2}{2g}} + z_A = \frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} + \cancel{z_B}$$

$$v_A = 0 \text{ and } z_A = H.$$

$$z_B = 0.$$

$$\frac{p_A}{\rho g} + H = \frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g}$$

$$v_B = \sqrt{2gH}$$

*Coefficient of contraction* Ratio  $C_c$  of area  $a_c$  of the smallest section of the discharging flow to area  $a$  of the small hole is called the coefficient of contraction, which is approximately 0.65:

$$a_c = C_c a$$

*Coefficient of velocity* The velocity of spouting flow at the smallest section is less than the theoretical value  $\sqrt{2gH}$  produced by the fluid velocity and the edge of the small hole. Ratio  $C_v$  of actual velocity  $v$  to  $\sqrt{2gH}$  is called the coefficient of velocity, which is approximately 0.95:

$$v = C_v v_B = C_v \sqrt{2gH}$$

$$Q = C_c a C_v v_B = C_c C_v a \sqrt{2gH} \quad \text{setting } C_c C_v = C \rightarrow \boxed{Q = C a \sqrt{2gH}}$$

Un canale a sezione circolare di diametro  $D = 26\text{cm}$  è attraversato da una corrente d'aria ( $\rho = 1.23\text{Kg/m}^3$ ). Se la portata vale  $2.5\text{Kg/sec}$ . Calcolare la differenza di quota  $H$  misurata da un manometro ad U (liquido manometrico acqua) collegato ad un tubo di Pitot immerso nella corrente

$$\text{Area} = \pi D^2/4 = 3.14*0.26*0.26/4 = 0.0531\text{m}^2$$

$$\text{Portata} = VA\rho \rightarrow V = \text{portata}/A/\rho = 2.5/0.0531/1.23 = 38.3\text{m/s}$$

$$\text{Delta } p = \rho V^2/2 = 1.23*38.3*38.3/2 = 902\text{Pa}$$

$$\begin{aligned} \text{Delta } p = \rho_{\text{manometro}} * g H &\rightarrow H = \text{Delta } P / \rho_{\text{manometro}} / g = \\ &= 902/1000/9.81 = \\ &= 0.0919\text{m} = 91.9\text{mm} \end{aligned}$$

Su un serbatoio contenente aria alla pressione di  $1.3\text{ata}$  ad alla temperatura di  $300\text{K}$ , viene praticato un foro. Se il foro è molto piccolo rispetto alle dimensioni del serbatoio possiamo assumere che la pressione del serbatoio cambi molto lentamente e quindi considerare il moto quasi stazionario. Calcolare la velocità all'uscita del foro per una pressione ambiente di  $1\text{ata}$ .

$$\text{Delta } P = 1.3-1 = 0.3\text{atm} = 0.3*101300 = 30390\text{Pa}$$

$$\begin{aligned} \text{Densità aria serbatoio} &= \text{pressione serb}/(R T) \text{ (legge dei gas)} = \\ &= 1.3*101300/287/300 = 1.53 \text{ Kg/m}^3 \end{aligned}$$

$$V = \text{radq}(2 * \text{Delta } P / \text{densita aria}) = \text{radq}(2 * 30390/1.53) = 199 \text{ m/s}$$

*Il risultato è approssimato perché non tiene conto della compressibilità*

Alla base di un diga è presente una valvola che viene aperta quando il livello è troppo alto. Nell' ipotesi che il battente sulla valvola si mantiene costante e che le perdite della valvola siano trascurabili, per  $H= 500m$ :

Quanto vale la velocità all'uscita della valvola ?

Quanto vale la portata volumetrica che esce dalla valvola se l'area di uscita è di  $0.300 m^2$  ?

$$v = C_v v_B = C_v \sqrt{2gH} = 0.95 \cdot \text{radq}(2 \cdot 9.81 \cdot 500) = 94.1 m/s$$

$$Q = C_a \sqrt{2gH} = 0.6 \cdot 0.3 \cdot \text{radq}(2 \cdot 9.81 \cdot 500) = 17.82 m^3/sec$$

## CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA PER MOTI UNIDIMENSIONALI STAZIONARI

Con procedimento analogo agli altri due casi precedenti:

$$\sum_{i=1}^m \rho_i V_{ni} A_i \left( h_i + \frac{V_i^2}{2} + g z_i \right) + \int_D \underline{J}_q \cdot \underline{n} dD - \int_D (\underline{\tau}_d \cdot \underline{V}) \cdot \underline{n} dD = 0$$

- Questa equazione è valida se, e solo se, il moto è stazionario rispetto ad un sistema di riferimento inerziale ed è unidimensionale su ciascuna delle superfici permeabili del sistema;
- l'integrale relativo al flusso di energia nel modo calore deve essere esteso a tutte le superfici del sistema, permeabili e non, in quanto, pur essendo la temperatura costante su ciascuna superficie permeabile, sono consentiti gradienti di temperatura (e quindi flussi di calore) in direzione normale alla superficie. Essi saranno comunque deboli, e quindi trascurabili, per la debole variazione di area. Poiché la normale  $\underline{n}$  è orientata verso l'ambiente, l'integrando risulta positivo se è anch'esso diretto verso l'ambiente (flusso termico uscente);
- il secondo integrale è diverso da zero, a condizione che la velocità della superficie di controllo sia diversa da zero (potenza d'elica).

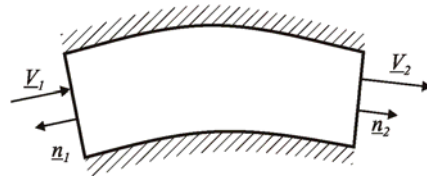
## CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA PER MOTI UNIDIMENSIONALI STAZIONARI

$$\sum_{i=1}^m \rho_i V_{ni} A_i \left( h_i + \frac{V_i^2}{2} + gz_i \right) + \int_D \underline{J}_q \cdot \underline{n} dD - \int_D (\underline{\tau}_d \cdot \underline{V}) \cdot \underline{n} dD = 0$$

Ponendo:

$$\int_D \underline{J}_q \cdot \underline{n} dD = -\dot{Q} \quad ; \quad \int_D (\underline{\tau}_d \cdot \underline{V}) \cdot \underline{n} dD = -\dot{L}$$

e, se il volume di controllo è un condotto con due sole superfici permeabili, si ottiene infine:



$$\dot{m} \left( h_2 + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \right) + \dot{L} = \dot{m} \left( h_1 + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 \right) + \dot{Q}$$

che rappresenta l'equazione di conservazione dell'energia per moti unidimensionali, stazionari, in condotti.

## CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA PER MOTI UNIDIMENSIONALI STAZIONARI

$$\dot{m} \left( h_2 + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \right) + \dot{L} = \dot{m} \left( h_1 + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 \right) + \dot{Q}$$

In un moto che sia **adiabatico** ( $\dot{Q} = 0$ ) e **anergodico** ( $\dot{L} = 0$ ), le quantità in parentesi non cambiano valore.

Un moto di questo tipo si definisce **omoenergetico**.

Sarebbe più corretto definirlo **omoentalpico** (*totale*, dove l'entalpia totale rappresenta la quantità in parentesi), ma poiché **nei sistemi aperti l'entalpia totale prende il posto dell'energia totale** è consuetudine usare ancora l'aggettivo **omoenergetico**. Per un moto omoenergetico si ha:

$$\dot{m} \left( h_2 + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \right) = \dot{m} \left( h_1 + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 \right)$$

In condizioni di omoenergeticità, se il moto è unidimensionale su ciascuna superficie permeabile, si ha quindi:

$$h + V^2 / 2 + gz = cost$$

## CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA PER MOTI UNIDIMENSIONALI STAZIONARI

$$h + V^2 / 2 + gz = \text{cost}$$

In termini differenziali (considerando  $g = \text{cost}$ ):

$$dh + VdV + gdz = 0$$

Dalla definizione di entalpia, ricordando che  $dh = Tds + dp/\rho$ , si ha:

$$Tds + dp/\rho + VdV + gdz = 0$$

Per un **moto adiabatico** si ha  $\delta_e s = 0$ . Se poi, in particolare, **sono nulle** le forze di attrito e comunque **le altre cause di produzione di entropia**, sarà anche  $\delta_i s = 0$  e quindi  $ds = 0$ . Con questa ipotesi, l'equazione precedente, che rappresenta **l'equazione di conservazione dell'energia per un moto omoenergetico e isoentropico**, diventa :

$$dp/\rho + VdV + gdz = 0$$

che **coincide con la già trovata equazione di Bernoulli in forma differenziale**.

Si può concludere, pertanto, che, **in questo caso, l'equazione di conservazione dell'energia non fornisce alcuna ulteriore condizione vincolante sull'evoluzione del fluido**.

## CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA PER MOTI UNIDIMENSIONALI STAZIONARI

$$\dot{m} \left( h_2 + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \right) + \dot{L} = \dot{m} \left( h_1 + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 \right) + \dot{Q}$$

Dividendo per la portata massica

$$h_2 + V_2^2 / 2 + gz_2 + \ell = h_1 + V_1^2 / 2 + gz_1 + q$$

dove  $\ell$  e  $q$  rappresentano rispettivamente **l'energia scambiata nel modo lavoro e nel modo calore per unità di massa** del fluido evolvente.

Come detto, **il contributo dovuto all'energia gravitazionale si sopporta, in generale, trascurabile**, il che equivale, ad esempio, a considerare:

$$z_1 \cong z_2$$

Introducendo la quantità  $H = h + V^2/2$  detta **entalpia specifica totale** o **di ristagno** (della quale si parlerà estensivamente in seguito), si ottiene:

$$\dot{m} \Delta H = \dot{Q} - \dot{L}$$

L'equazione:

$$\dot{m} \Delta H = \dot{Q} - \dot{L}$$

rappresenta il **principio di conservazione dell'energia per un sistema aperto** nel caso di moto unidimensionale e stazionario. Essa ricorda molto da vicino il primo principio della termodinamica  $\mathcal{M}\Delta u = \Delta U = Q - L$ , che è il **principio di conservazione dell'energia per un sistema chiuso**.

Le differenze sostanziali sono:

- il primo principio tratta essenzialmente (in un sistema **chiuso**) un processo **instazionario** (infatti, si ha una variazione di  $U$  all'interno della massa di controllo) mentre la precedente relazione conserva l'energia (in un sistema **aperto**) in un processo **stazionario**;
- la **massa**  $\mathcal{M}$  che compare nel primo principio è quella contenuta nel sistema, mentre, nella relazione in alto, la  $\dot{m}$  è la **massa che attraversa il sistema nella unità di tempo**;
- l'**energia interna specifica**  $u$  è sostituita dall'**entalpia totale specifica**  $H$ .

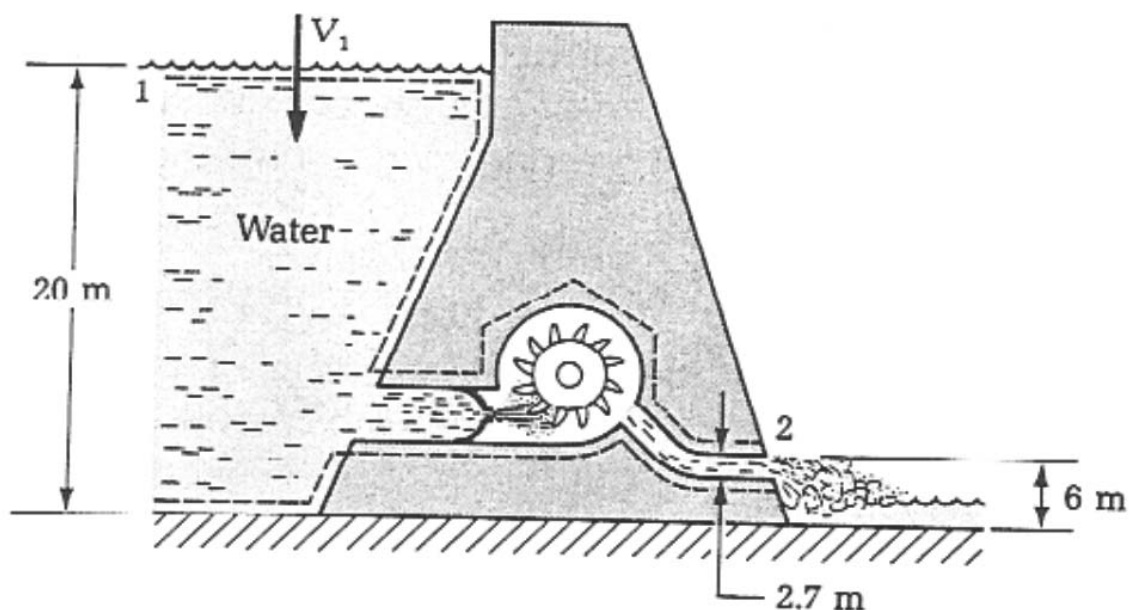
In una **macchina** per la quale siano trascurabili gli scambi di energia nel modo calore ( $\dot{Q} = 0$ ) con l'ambiente esterno:

$$\dot{m} \Delta H = -\dot{L}$$

In uno **scambiatore di calore**, nel quale non vi siano scambi di energia nel modo lavoro ( $\dot{L} = 0$ ) con l'ambiente esterno:

$$\dot{m} \Delta H = \dot{Q}$$

### Esempio



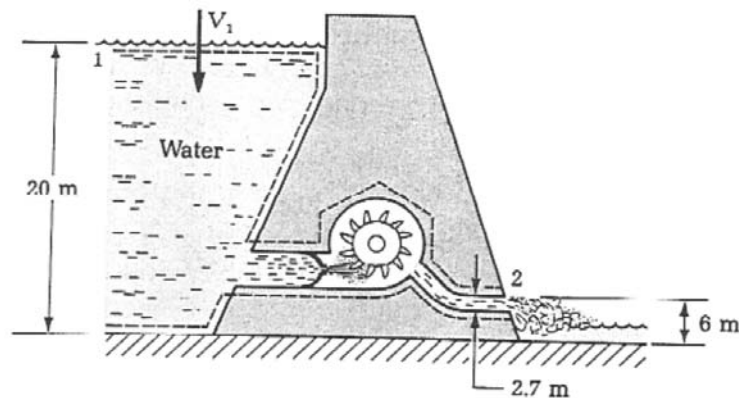
Determinare la potenza della turbina quando è attraversata da una portata volumetrica pari a  $Q = 30 \text{ m}^3/\text{s}$

$$\dot{m} \left( h_2 + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \right) + \dot{L} = \dot{m} \left( h_1 + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 \right)$$

Particolarizzando nel nostro caso

$$\dot{m} \left( u_2 + p_2/\rho + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \right) + \dot{L} = \dot{m} \left( u_1 + p_1/\rho + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 \right)$$

$$-\dot{L} = \dot{m} \left( p_2/\rho + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \right) - \dot{m} \left( p_1/\rho + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 \right)$$



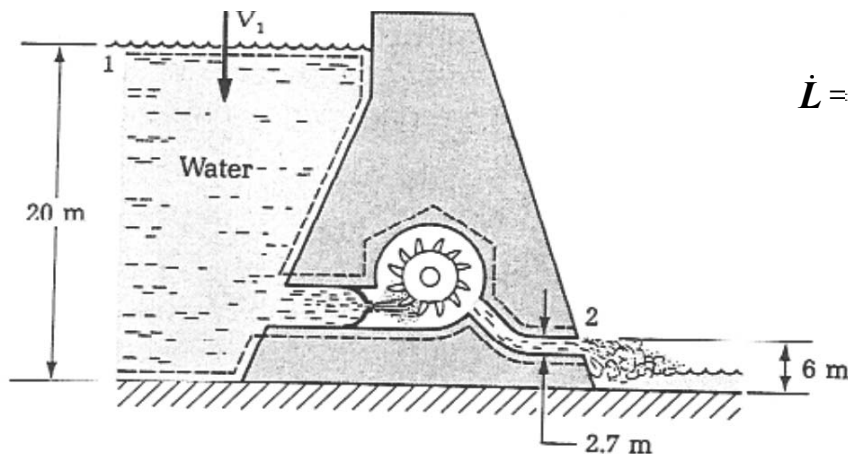
$$-\dot{L} = \dot{m} \left( \cancel{p_2/\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \right) - \dot{m} \left( \cancel{p_1/\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 \right)$$

$$\dot{m} = \rho A_1 V_1 = \rho A_2 V_2 = \rho Q = (1000 \text{ kg/m}^3) (30 \text{ m}^3/\text{s}) = 30000 \text{ kg/s}$$

$$p_1 = p_2 = P_{atm}$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{30}{\pi (2.7)^2 / 4} \text{ m/s} = 5.24 \text{ m/s} \quad V_1 \approx 0. \quad z_1 = 20 \text{ m} \quad z_2 = 6 \text{ m}.$$

$$-\dot{L} = (30000 \text{ kg/s}) \left[ \frac{(5.24)^2}{2} + 9.81(6) - 9.81(20) \right] = (30000 \text{ kg/s}) (-123.6 \text{ N.m/kg})$$



$$\dot{L} = 3\,708\,000 \text{ N.m/s} = +3.7 \text{ MW}$$