

CONDIZIONI DI RISTAGNO DI UN FLUIDO

La condizione di ristagno (detta anche condizione totale) di una particella di fluido in moto è definita come la condizione TERMODINAMICA che la particella raggiungerebbe qualora venisse rallentata fino a velocità nulla con una trasformazione adiabatica, anergodica e isoentropica (omoenergetica e isoentropica).

La condizione di ristagno non è quindi associata né alla condizione di moto quasi unidimensionale, né a quella di moto quasi stazionario.

Le condizioni di ristagno *non rappresentano condizioni* che debbono essere necessariamente *presenti nel campo di moto* oggetto di studio.

Ad ogni stato termofluidodinamico del fluido è associato uno stato di ristagno. Ovviamente non è vero il contrario.

Lo stato di ristagno di un sistema semplice è uno stato termodinamico caratterizzato da due parametri termodinamici indipendenti tra loro (manca il cinetico). Lo stato termofluidodinamico, invece, è caratterizzato da tre parametri (due termodinamici più uno cinetico).

CONDIZIONI DI RISTAGNO DI UN FLUIDO

Dalla definizione di condizione di ristagno, applicando l'equazione di conservazione dell'energia:

$$\dot{m} \left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \right) + \dot{L} = \dot{m} \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 \right) + \dot{Q}$$

trascurando il termine gravitazionale e considerando il moto omoenergetico, per un fluido avente velocità V e livello entalpico h , *quando si rallenta il fluido sino a velocità nulla si raggiunge l'entalpia totale*, o di ristagno:

$$H = h + V^2/2$$

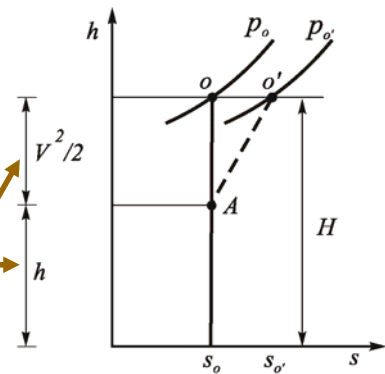
La quantità h è chiamata entalpia specifica sensibile, o statica.

La quantità H è chiamata entalpia specifica totale, o di ristagno.

Si possono definire, in generale, condizioni statiche di una corrente quelle misurate con uno strumento che si muove alla velocità del fluido, cioè con uno strumento rispetto al quale il fluido è fermo.

CONDIZIONI DI RISTAGNO DI UN FLUIDO

La relazione $H = h + V^2/2$ esprime in particolare il concetto che, **se una corrente** avente un'entalpia specifica h e una velocità V (punto A) **viene rallentata** fino a velocità nulla mediante una trasformazione adiabatica e anergodica (punto o), **la sua entalpia specifica aumenta della sua energia cinetica specifica** (per unità di massa) $V^2/2$.



Occorre notare che, nel rallentamento del fluido, la trasformazione espressa dalla $H = h + V^2/2$ potrebbe **non essere necessariamente isoentropica**, così come imposto dalla definizione di condizione di ristagno (punto o), **potendo l'entropia in questo caso solo aumentare per produzione**.

Non può, ovviamente, diminuire perché la trasformazione è adiabatica.

La sola condizione necessaria alla $H = h + V^2/2$ è, quindi, **l'omoenergeticità** della trasformazione.

La condizione di isoentropicità è, peraltro, necessaria per poter determinare tutti gli altri parametri termodinamici di ristagno (ad es. la $p_o \neq p_{o'}$).

CONDIZIONI DI RISTAGNO DI UN FLUIDO

$$H = h + V^2/2$$

Per **gas più che perfetto**, $h = c_p T$ e $c_p = \gamma R / (\gamma - 1)$, per cui si ha:

$$H = h \left[1 + \frac{(\gamma - 1)V^2}{2\gamma RT} \right]$$

Poiché, per un gas più che perfetto il quadrato della velocità del suono laplaciana è dato da:

$$a_L^2 = \gamma RT$$

ricordando la definizione del numero di Mach (laplaciano), si ottiene:

$$H = h \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

espressione che dà **l'entalpia totale in funzione di quella statica e del numero di Mach** per gas più che perfetto.

CONDIZIONI DI RISTAGNO DI UN FLUIDO

$$H = h \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

Questa relazione mostra che l'importanza relativa del termine cinetico rispetto a quello relativo all'entalpia sensibile, è misurata dal quadrato del numero di Mach.

In una corrente a basso numero di Mach ($M \ll 1$) l'entalpia di ristagno praticamente coincide con quella sensibile.

Ad esempio in una corrente di aria ($\gamma = 1.4$) a $M = 0.1$ (che a temperatura ambiente corrisponde ad una velocità di circa 120 km/h), l'entalpia di ristagno è superiore a quella sensibile di appena 0.002 (cioè il **2 per mille**).

Correnti di questo tipo vengono dette microsoniche, o iposoniche

In una corrente ad elevato numero di Mach, l'entalpia di ristagno risulta di gran lunga maggiore di quella sensibile, il cui contributo potrebbe essere, al limite, trascurato.

Ad esempio in una corrente di aria a $M = 10$, risulta che l'entalpia sensibile rappresenta appena il **4,8%** dell'entalpia totale (**1/21**).

Correnti di questo tipo vengono dette ipersoniche

CONDIZIONI DI RISTAGNO DI UN FLUIDO

Per un gas più che perfetto uguagliando le relazioni:

$$H = h + V^2 / 2$$

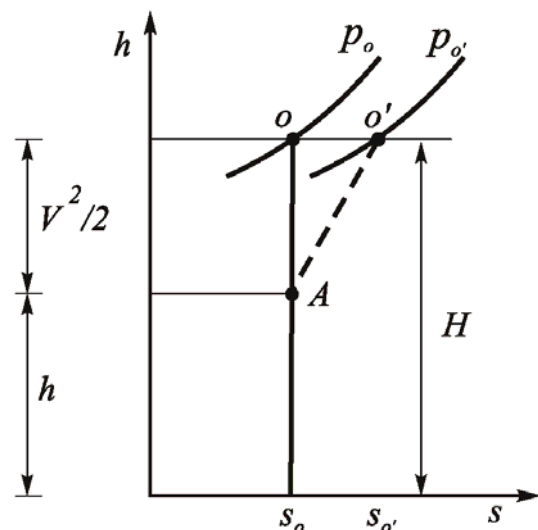
e

$$H = h \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

si ricava:

$$M^2 = \frac{V^2 / 2}{(\gamma - 1)h / 2}$$

Come già detto, il quadrato del numero di Mach può essere pertanto considerato proporzionale al rapporto tra l'energia cinetica ordinata $V^2/2$ e quella disordinata h .



CONDIZIONI DI RISTAGNO DI UN FLUIDO

Nel caso di **gas più che perfetto**, la **temperatura di ristagno**, o **totale**, T_o è immediatamente derivabile dalla relazione $H = h + V^2/2$ dividendo entrambi i membri per c_p :

$$T_o = T + V^2/2c_p$$

ovvero, in termini di numero di Mach, dalla relazione:

$$H = h \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

dividendo sempre per c_p , si ottiene:

$$T_o = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

Le considerazioni già fatte per l'entalpia totale (per bassi e alti numeri di Mach) possono essere identicamente riproposte per la temperatura di ristagno (o totale) T_o .

La temperatura T è detta **temperatura statica**, o **sensibile**, della corrente.

Quest'ultima può essere anche definita come **la temperatura misurata da un termometro che viaggia alla stessa velocità della corrente**.

CONDIZIONI DI RISTAGNO DI UN FLUIDO

Dalla relazione fondamentale entropica per un gas più che perfetto:

$$s - s_o = c_v \ln \left(\frac{u}{u_o} \right) + R \ln \left(\frac{v}{v_o} \right)$$

per una trasformazione isoentropica: $\Delta s = s - s_o = 0$

e, ricordando che $u = c_v T$, si ricava:

$$\frac{v}{v_o} = \frac{\rho_o}{\rho} = \left(\frac{T_o}{T} \right)^{c_v/R} = \left(\frac{T_o}{T} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

per cui, sostituendo nella formula precedente, la relazione:

$$T_o = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

si ottiene l'espressione della **densità di ristagno**, o **totale**, ρ_o in funzione di quella **statica**:

$$\rho_o = \rho \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

CONDIZIONI DI RISTAGNO DI UN FLUIDO

Sostituendo nella:

$$\frac{v}{v_o} = \frac{\rho_o}{\rho} = \left(\frac{T_o}{T}\right)^{c_v/R} = \left(\frac{T_o}{T}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

la prima equazione di stato $p = \rho RT$ di un gas più che perfetto, si ottiene il rapporto tra la **pressione di ristagno**, o **totale**, p_o e la **pressione statica** p della corrente:

$$\frac{p_o}{p} = \left(\frac{T_o}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad T_o = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)$$

ovvero:

$$p_o = p \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Anche **la pressione statica p è quella misurata da un manometro che viaggia alla stessa velocità della corrente.**

FATTORE DI COMPRESSIBILITA'

Sviluppando in **serie di Mac-Laurin** l'espressione della pressione di ristagno:

$$p_o = p \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \dots$$

per bassi numeri di Mach ($M \ll 1$), si ottiene:

$$x \ll 1$$

$$p_o = p \left(1 + \frac{\gamma}{2} M^2 + \frac{\gamma}{8} M^4 + \frac{\gamma(2-\gamma)}{48} M^6 + \dots\right)$$

od in altra forma:

$$p_o - p = \frac{\gamma}{2} p M^2 \left(1 + \frac{M^2}{4} + \frac{2-\gamma}{24} M^4 + \dots\right)$$

Poiché la quantità:

$$\gamma p M^2 / 2 = \rho V^2 / 2$$

si ha:

$$p_o - p = \rho \frac{V^2}{2} \left(1 + \frac{M^2}{4} + \frac{2-\gamma}{24} M^4 + \dots\right)$$

FATTORE DI COMPRESSIBILITA'

$$p_o - p = \rho \frac{V^2}{2} \left(1 + \frac{M^2}{4} + \frac{2-\gamma}{24} M^4 + \dots \right)$$

Per $M \ll 1$, questa formula coincide con quanto si ricaverebbe dall'applicazione dell'equazione di Bernoulli (per moti incompressibili) senza il termine $\rho g z$:

$$p_o - p = \rho \frac{V^2}{2}$$

Si può, quindi, concludere che un moto omoenergetico (adiabatico e anergodico) e isoentropico, (ipotesi fatte per le condizioni di ristagno) si può considerare incompressibile se il suo numero di Mach è basso.

La quantità $\rho V^2 / 2$ è chiamata pressione dinamica della corrente.

Il rapporto:

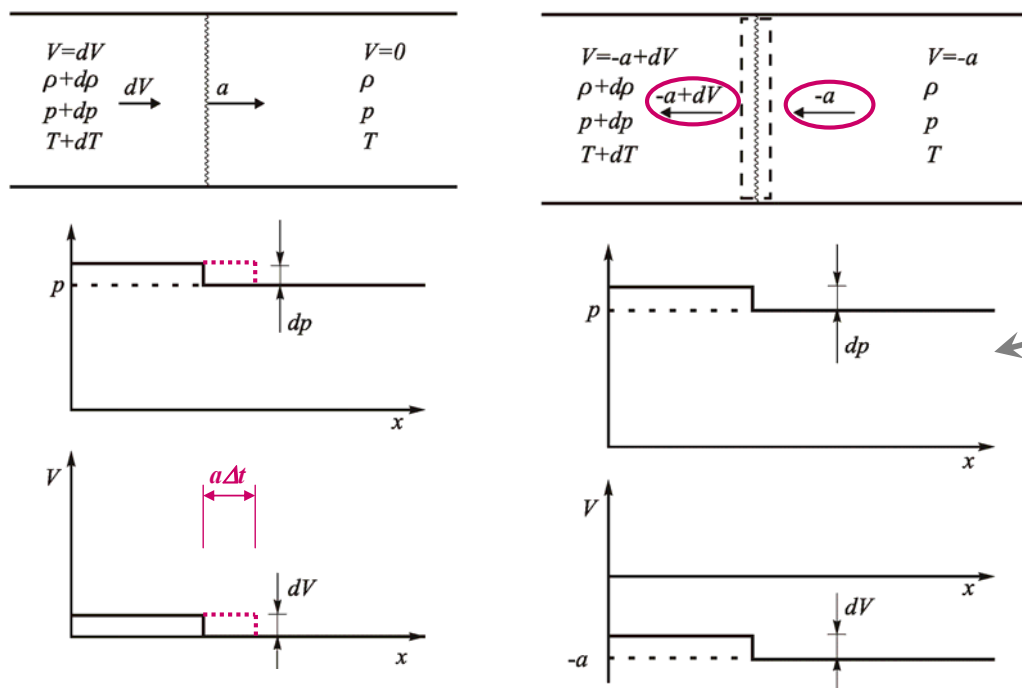
$$F_c = \frac{p_o - p}{\rho V^2 / 2} = \left(1 + \frac{M^2}{4} + \frac{2-\gamma}{24} M^4 + \dots \right)$$

è definito come fattore di compressibilità del moto.

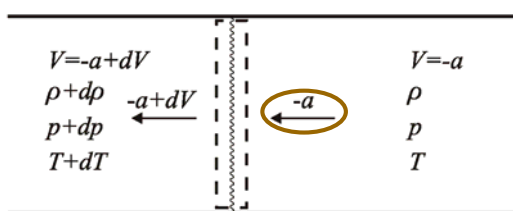
Per moti incompressibili ($M \ll 1$) si ha, ovviamente, $F_c = 1$.

VELOCITA' DI PROPAGAZIONE DEI PICCOLI DISTURBI DI PRESSIONE

Un piccolo disturbo di pressione viaggia in un condotto alla velocità a (verso destra) attraverso un fluido in quiete. In un nuovo sistema di riferimento, avente una velocità a rispetto al primo, il disturbo di pressione si può fermare.



VELOCITA' DI PROPAGAZIONE DEI PICCOLI DISTURBI DI PRESSIONE



L'equazione di **conservazione della massa**, per moti stazionari, in forma differenziale:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = 0$$

tenendo conto che $V = -a$, dà luogo a:

$$(a) \quad dV = a \frac{d\rho}{\rho}$$

Trascurando la forza peso, l'equazione del **bilancio della quantità di moto**:

$$dp + \rho V dV = 0$$

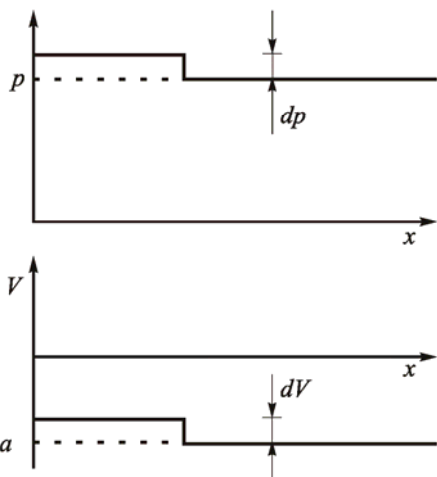
tenendo ancora conto che $V = -a$, conduce a:

$$(b) \quad dp = \rho a dV$$

Eliminando tra la (a) e la (b) la quantità dV , si ottiene:

$$a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$$

dV positivo (**corrente che accelera**) dà dp e $d\rho$ positivi (**compressione**) e viceversa.



VELOCITA' DI PROPAGAZIONE DEI PICCOLI DISTURBI DI PRESSIONE

La **velocità di propagazione dei piccoli disturbi di pressione newtoniana (isoterma)** è definita dalla relazione:

$$a_N^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T = RT \quad (\text{gas perfetto})$$

La **velocità di propagazione dei piccoli disturbi di pressione laplaciana (isoentropica)** è definita dalla relazione:

$$a_L^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \gamma RT \quad (\text{gas perfetto})$$

Si hanno, quindi, almeno **due** diverse velocità caratteristiche di propagazione dei piccoli disturbi di pressione.

Delle due, la velocità che riguarda le presenti applicazioni è quella **laplaciana**.

Attenzione: Per ricavare le due velocità non si è fatta alcuna ipotesi sul modello di gas, quindi le formule riquadrate sono valide **qualunque sia il modello di gas utilizzato**.

VELOCITA' DI PROPAGAZIONE DEI PICCOLI DISTURBI DI PRESSIONE

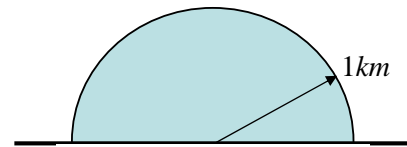
Del fatto che il **suono** sia un **piccolo disturbo di pressione** ci si può facilmente convincere con un aneddoto riportato in una delle edizioni della Enciclopedia Britannica.

Se in una notte di agosto si ha la ventura di passeggiare in aperta campagna, si può sentire a lungo un grillo cantare. In effetti è dimostrato che, in assenza di rumori di fondo, si può ascoltare il canto del grillo **a più di un chilometro di distanza**. Ciò significa che il grillo mette in movimento almeno tutta l'aria racchiusa in una **semisfera di raggio un chilometro**.

Questa semisfera ha un **volume** $2\pi R^3/3$ che può essere approssimato con $2R^3$ (dove R è il raggio della semisfera) e che quindi risulta $2 \times 10^9 m^3$.

Poiché la densità dell'aria alla temperatura di $20^\circ C$ (siamo in agosto) ed alla pressione di una atmosfera è pari a circa $1.2 kg/m^3$, risulta che il grillo mette in movimento con il suo canto una **massa** pari a $2.4 \times 10^9 kg$ di aria (due milioni quattrocentomila tonnellate).

Quindi, i disturbi di pressione derivanti dal suono devono essere decisamente piccoli poiché la potenza sonora emessa dal **violino** del grillo è necessariamente limitata.



INFLUENZA DEL NUMERO DI MACH IN UN CONDOTTO AD AREA VARIABILE

Si consideri, ora, un **moto quasi unidimensionale, quasi stazionario, omoenergetico e isoentropico attraverso un condotto ad area variabile**.

Si sta quindi considerando il moto di un fluido attraverso un condotto che presenta variazioni della sua area trasversale.

Ricordando l'espressione per la velocità di propagazione dei piccoli disturbi di pressione (del suono) laplaciana (isoentropica):

$$a_L^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$$

l'equazione di conservazione della massa in forma differenziale per moti unidimensionali e stazionari:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0$$

può essere scritta nella forma:

$$\frac{1}{a^2} \frac{dp}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0$$

INFLUENZA DEL NUMERO DI MACH IN UN CONDOTTO AD AREA VARIABILE

Si ricorda che la forma differenziale dell'equazione generale del bilancio della quantità di moto per moti unidimensionali e stazionari è la seguente:

$$dp + \rho V dV + \cancel{\rho g dz} + \cancel{4\tau_p \frac{dx}{D_e}} = 0$$

e tenendo presente che, per il particolare problema in esame, nella fattispecie si può porre:

$$\tau = g = 0$$

(poiché si trascurano sia le forze viscosse che quelle gravitazionali), si ottiene:

$$\frac{dp}{\rho} = -V dV$$

INFLUENZA DEL NUMERO DI MACH IN UN CONDOTTO AD AREA VARIABILE

Sostituendo questa relazione:

$$\frac{dp}{\rho} = -V dV$$

nella equazione prima trovata:

$$\frac{1}{a^2} \frac{dp}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0$$

e ricordando la definizione del numero di Mach (laplaciano), si ottiene infine [la relazione che lega la variazione di velocità a quella di area](#):

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V} (M^2 - 1)$$

Attenzione: Anche per ricavare l'ultima relazione non è stata fatta alcuna ipotesi sul modello di gas per cui essa è valida **qualunque sia il modello di gas utilizzato**.

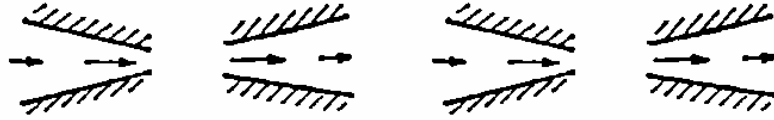
INFLUENZA DEL NUMERO DI MACH IN UN CONDOTTO AD AREA VARIABILE

Vediamo cosa succede

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V} (M^2 - 1)$$

Moto Subsonico
 $M < 1$

Moto Supersonico
 $M > 1$



dA	\rightarrow	-	+	-	+
dV	\rightarrow	+	-	-	+

- in un **moto subsonico** ($M^2 < 1$) il fluido **accelera** ($dV > 0$) **in un condotto convergente** ($dA < 0$) mentre **decelera** ($dV < 0$) **in un condotto divergente** ($dA > 0$). Si ha quindi lo stesso comportamento di un moto incompressibile (moto iposonico);
- in un **moto supersonico** ($M^2 > 1$) il fluido **accelera** ($dV > 0$) **in un condotto divergente** ($dA > 0$) mentre **decelera** ($dV < 0$) **in un condotto convergente** ($dA < 0$).

INFLUENZA DEL NUMERO DI MACH IN UN CONDOTTO AD AREA VARIABILE

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V} (M^2 - 1)$$



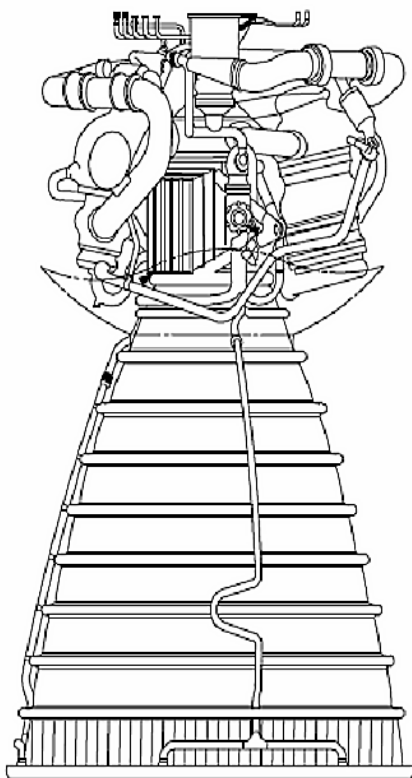
- **se** $M^2 = 1$ deve necessariamente essere $dA = 0$ cioè la sezione retta del condotto deve avere **un punto di stazionarietà**, in particolare un minimo, o un massimo.

È facile convincersi che, **per raggiungere** $M^2 = 1$, il condotto deve presentare una **sezione di minimo**. Infatti, se la sezione presentasse un massimo, una corrente subsonica che si muovesse verso detta sezione decelererebbe, mentre una corrente supersonica accelererebbe, senza mai poter raggiungere $M^2 = 1$.

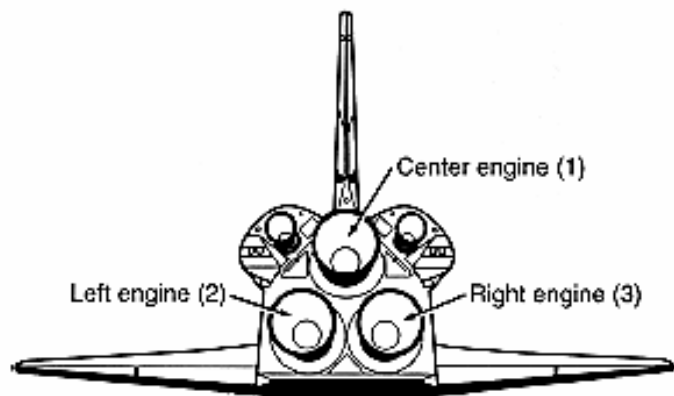
- Quando $M^2 = 1$, si può avere sia $dV = 0$, che $dV \neq 0$, e cioè **il passaggio da moto subsonico a supersonico, o viceversa**;



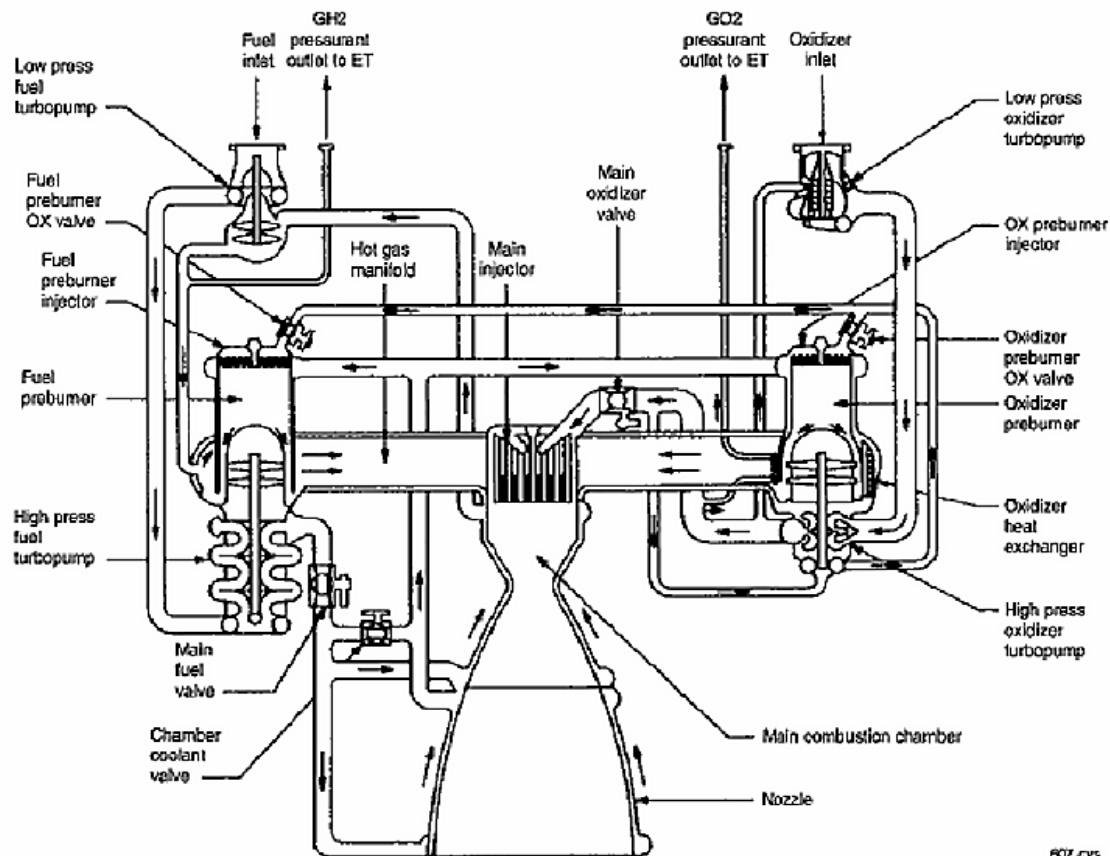
Space Shuttle as seen from its back with fired engines



Space Shuttle Main Engine

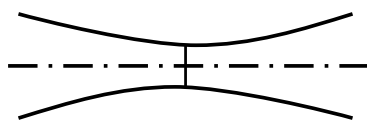


Main Engine Numbering System



Main Engine Schematic

INFLUENZA DEL NUMERO DI MACH IN UN CONDOTTO AD AREA VARIABILE



$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V} (M^2 - 1)$$

- La condizione $dA = 0$ (**gola del condotto**, quando l'area è minima) può comportare $dV \neq 0$ solo se $M^2 = 1$, potendosi comunque avere, anche per $M^2 = 1$, $dV = 0$.
- Il punto $M^2 = 1$ (che comporta $dA = 0$) è quindi un **punto di biforcazione** della soluzione e cioè del comportamento del fluido in quanto lo stesso può **sia passare da moto subsonico a supersonico, ovvero ritornare ancora subsonico, che passare da moto supersonico a subsonico, ovvero ritornare ancora supersonico;**
- **In un condotto convergente ($dA < 0$), un moto subsonico (risp. supersonico) può solo accelerare (risp. decelerare) fino a $M = 1$.**



INFLUENZA DEL NUMERO DI MACH IN UN CONDOTTO AD AREA VARIABILE

Per un gas più che perfetto sarà in seguito ricavata la relazione:

$$\frac{dV}{V} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1} \frac{dM}{M}$$

che sostituita nell'equazione:

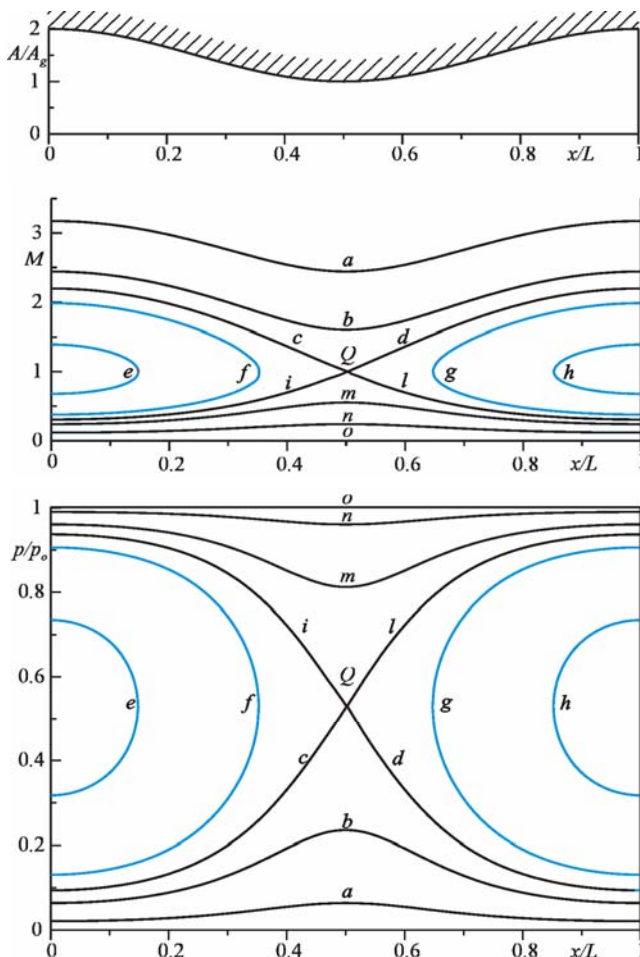
$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V} (M^2 - 1)$$

diventa:

$$\frac{dA}{A} = \frac{M^2 - 1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

Dato ora un ugello convergente divergente di cui sia nota la distribuzione dell'area della sua sezione retta $A = A(x)$ in funzione della ascissa x fissata lungo l'asse del condotto, si ha.

$$\frac{dM}{dx} = \frac{M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)}{(M^2 - 1) A(x)} \frac{dA(x)}{dx}$$



INFLUENZA DEL NUMERO DI MACH IN UN CONDOTTO AD AREA VARIABILE

$$A/A_g = 0.5 \cos(2\pi x/L) + 1.5$$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)}{(M^2 - 1) A(x)} \frac{dA(x)}{dx}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Le curve colorate non rappresentano soluzioni del problema perché non connettono gli stati a monte con quelli a valle e prevedono $M = 1$ non nella sezione di gola.

