

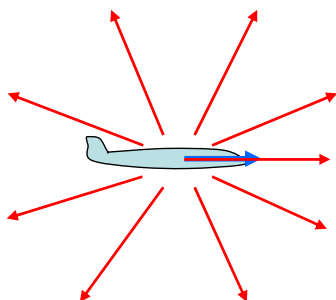
ONDE D'URTO NORMALI E OBLIQUE

E' stato visto in precedenza che *i piccoli disturbi di pressione si propagano alla velocità del suono.*

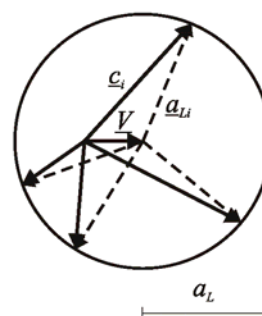
Ad esempio, *nel caso di un oggetto che si muova a velocità subsonica in aria ferma, i disturbi di pressione* causati dalla sua presenza, poiché viaggiano più velocemente dell'oggetto, *riescono a raggiungere tutti i punti del fluido prima che arrivi l'oggetto stesso.*

L'aria si deve *aprire* per far passare l'oggetto).

Alternativamente, *in un sistema di riferimento inerziale per il quale l'oggetto è fermo ed è investito da una corrente subsonica, questi disturbi riescono a risalire la corrente* in quanto essi viaggiano verso monte più velocemente di quanto quest'ultima viaggi verso valle.



Velocità delle molecole nel caso subsonico



ONDE D'URTO NORMALI E OBLIQUE

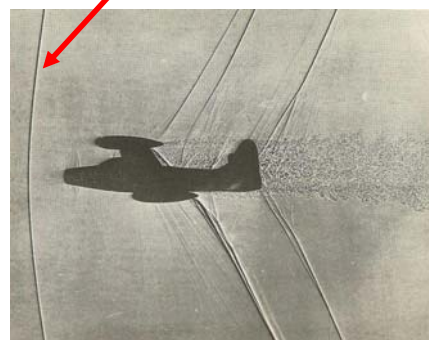
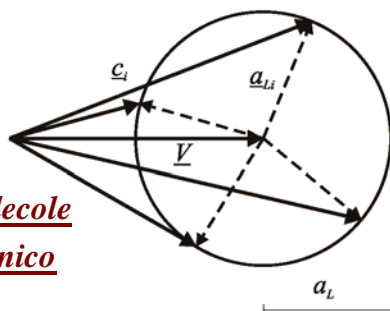
Nel caso, invece, in cui *l'oggetto si muova a velocità supersonica, sempre in aria ferma, arriva prima l'oggetto e poi i disturbi di pressione.* L'aria non può, quindi, essere avvisata da questi ultimi che l'oggetto sta arrivando.

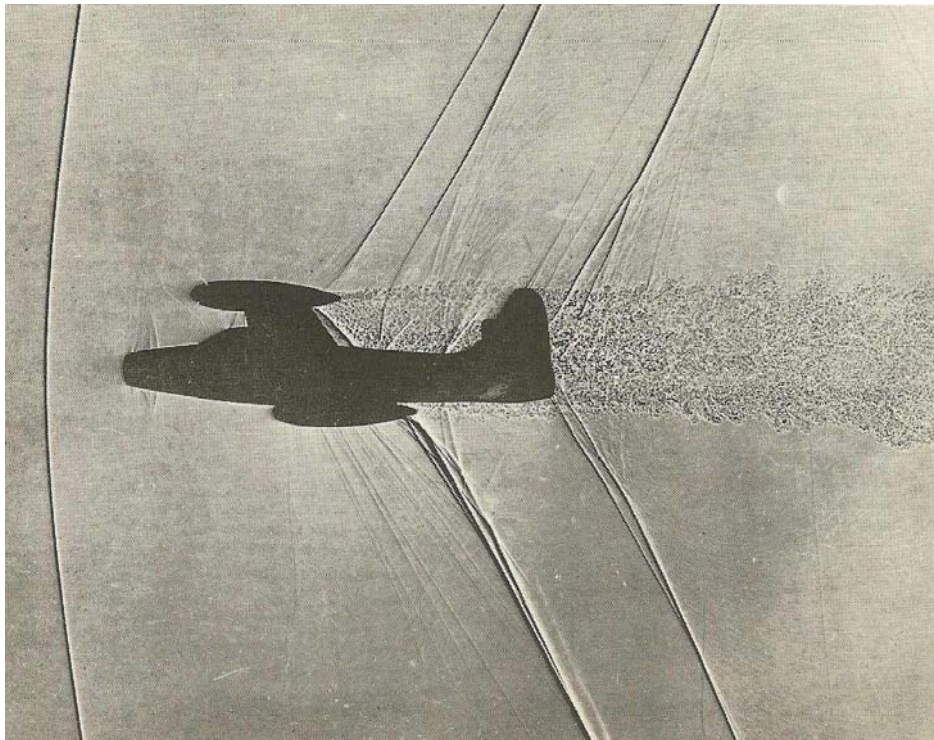
Va, peraltro, rilevato che *l'oggetto deve, in ogni caso, passare e che l'aria si deve comunque aprire* per farlo passare.

Da ciò deriva la presenza di *superfici di discontinuità (onde d'urto)* che, rendendo la corrente subsonica, e/o deviando la corrente supersonica, consentono al fluido di aprirsi per lasciar passare il corpo.

Occorre, comunque, osservare che le onde d'urto non sono presenti solo nel caso appena descritto, ma anche in *altre situazioni fluidodinamiche.*

Velocità delle molecole nel caso supersonico





Shadowgraph del modello in scala 1/200 del *Thunderjet F 84* a $M = 1.05$
osservato con il metodo delle ombre (*Shadowgraph*).

Si noti l'onda d'urto davanti all'aereo, che viaggia a $M \cong 1$, praticamente normale



ONDE D'URTO NORMALI E OBLIQUE

Si vedrà tra poco che, *in un sistema di riferimento nel quale l'oggetto è fermo, la corrente deve essere supersonica* e, se la sua velocità è costante nel tempo, *l'onda d'urto resta anch'essa ferma (onda stazionaria)*.

Intuitivamente ne consegue che: onde d'urto stazionarie (ferme rispetto al sistema di riferimento) sono possibili solo se la corrente a monte (prima) di esse è supersonica (nello stesso sistema di riferimento).

Se la corrente fosse subsonica, non ci sarebbe la necessità di un'onda d'urto, in quanto i piccoli disturbi di pressione riuscirebbero a risalire la corrente e a farla aprire per tempo.

Va rilevato che ciò non è strettamente vero in campo transonico.

Si vedrà anche che, onde d'urto instazionarie (in moto rispetto al sistema di riferimento adottato) possono originarsi anche *in una corrente non necessariamente supersonica* ma, al limite, ferma.

Le onde d'urto si chiamano normali, quando sono perpendicolari al vettore velocità a monte dell'onda, altrimenti si dicono oblique.

ONDE D'URTO NORMALI E OBLIQUE

Le onde d'urto possono essere, in generale, di vario tipo.

E' stato già detto che le onde d'urto si chiamano normali, se perpendicolari al vettore velocità a monte dell'onda, altrimenti si dicono oblique.

E' stato anche detto che esse possono essere stazionarie (se ferme rispetto al sistema di riferimento) o instazionarie (se si muovono).

Nel seguito saranno considerate solo le onde d'urto adiabatiche, nel senso che il fluido che le attraversa non scambia energia nel modo calore tra i suoi diversi punti. Ovviamente, il fluido non scambia lavoro per assenza di "eliche" nel campo di moto.

Va comunque osservato che, come si vedrà, onde d'urto molto forti possono provocare forti innalzamenti della temperatura del fluido e, di conseguenza, scambi termici per irraggiamento, ovvero reazioni chimiche, esotermiche od endotermiche, le quali possono essere tenute in conto con una non adiabaticità del moto.

L'ipotesi di assenza di scambi di energia nel modo lavoro, unitamente all'adiabaticità, fa sì che attraverso l'onda d'urto si può assumere la trasformazione come omoenergetica ($H = cost$).

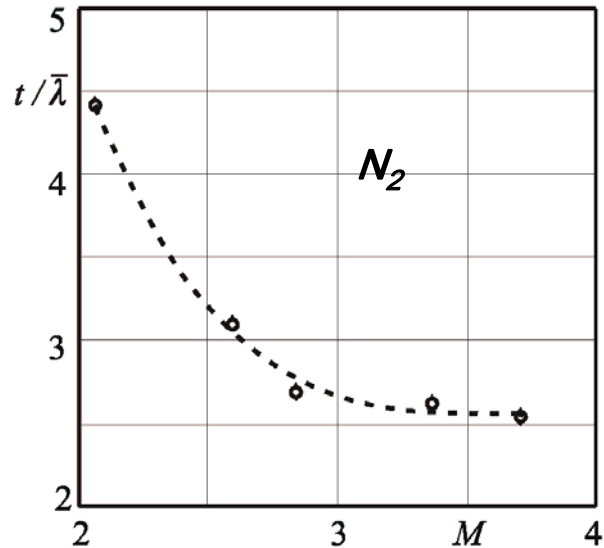
SPESSORE DI UN'ONDA D'URTO

Nei campi di moto qui esaminati, le onde d'urto possono essere generalmente considerate come superfici di discontinuità. Infatti, **il loro spessore risulta dell'ordine di qualche cammino libero medio molecolare**.

Nella figura a lato è riportato lo **spessore di un'onda d'urto** t , espresso in termini di cammino libero medio molecolare $\bar{\lambda}$, al variare del numero di Mach M .

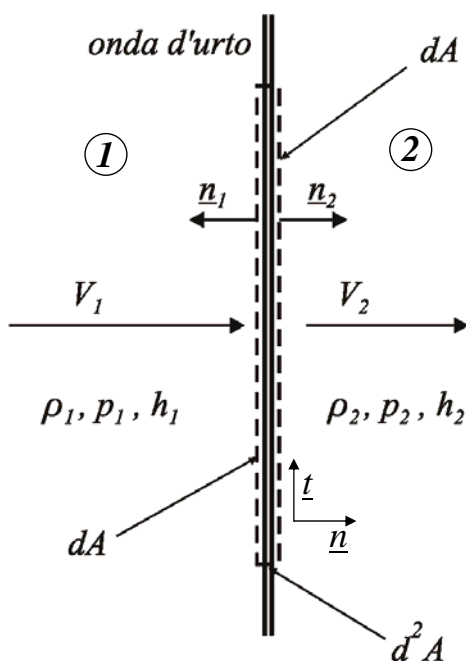
Lo spessore t è stato misurato sperimentalmente nel caso specifico di onde d'urto in una corrente di azoto N_2 .

Si ricordi che $\bar{\lambda}$, per aria in condizioni normali, è dell'ordine di $10^{-7}m$ e che l'aria è costituita prevalentemente da azoto.



ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA

Volume di controllo



Eq. Bilancio Quantità di moto

$$\dot{m}(V_2 - V_1) + p_1 A_1 n_1 + p_2 A_2 n_2 + \cancel{\dot{m}g} = \cancel{\dot{m}g}$$

$$A_1 = A_2 = dA \gg \bar{\lambda}^2; \quad \mathcal{M} = 0 \text{ e}$$

$$\underline{S} = 0 \quad \text{perchè: } d^2 A \ll dA$$

$$\dot{m}(V_2 - V_1) + dA(p_1 n_1 + p_2 n_2) = 0$$

$$V_{t1} = V_{t2} = 0 \quad \text{quindi: } \boxed{V_2 \parallel V_1}$$

Eq. Conservazione della massa

$$\rho_1 A_1 V_1 \cdot n_1 + \rho_2 A_2 V_2 \cdot n_2 = 0$$

$$\text{poichè: } A_1 = A_2 = dA$$

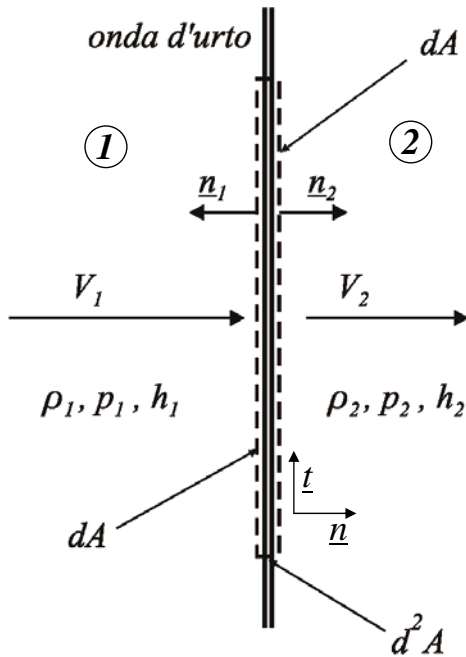
$$V_1 \cdot n_1 = -V_1; \quad V_2 \cdot n_2 = V_2$$

$$\text{si ha: } \boxed{\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = G = \text{cost}}$$

ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = G = \text{cost}$$

Volume di controllo



Eq. Bilancio Quantità di moto

Sostituendo: $d\dot{m} = \rho_1 V_1 dA = \rho_2 V_2 dA$ nella:

$$d\dot{m}(\underline{V}_2 - \underline{V}_1) + dA(p_1 \underline{n}_1 + p_2 \underline{n}_2) = 0$$

poichè: $\underline{V}_1 \cdot \underline{n}_1 = -V_1$; $\underline{V}_2 \cdot \underline{n}_2 = V_2$

e proiettando normalmente all'onda, si ottiene:

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 = I = \text{cost}$$

Eq. Conservazione dell'energia

$$\dot{m} \Delta H = \dot{Q} - \dot{L}$$

tenendo conto che: $\dot{Q} = \dot{L} = 0$, si ha:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = H = \text{cost}$$

Quindi l'onda d'urto è una trasformazione termofluidodinamica che avviene attraverso una superficie (volume sottilissimo), per la quale ciascuna delle grandezze G , I ed H resta costante.

ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA IN UN GAS PIU' CHE PERFETTO

Si ricorda che l'equazione di bilancio della quantità di moto è la seguente:

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 = I = \text{cost}$$

che può anche essere scritta nella forma:

$$\rho_1 V_1^2 - \rho_2 V_2^2 = p_2 - p_1$$

Dividendo per $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = G = \text{cost}$, si ottiene:

$$V_1 - V_2 = \frac{p_2}{\rho_2 V_2} - \frac{p_1}{\rho_1 V_1}$$

Ricordando poi che $a^2 = \gamma RT = \gamma p/\rho \rightarrow p/\rho = a^2/\gamma$, si perviene a:

$$\gamma(V_1 - V_2) = \frac{a_2^2}{V_2} - \frac{a_1^2}{V_1}$$

ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA IN UN GAS PIU' CHE PERFETTO

La $H = h + V^2/2$, in condizioni omoenergetiche, può essere scritta anche nella forma:

$$a^2 = a_o^2 - \frac{\gamma - 1}{2} V^2 \quad \leftarrow h = \gamma RT/(\gamma - 1) = a^2/(\gamma - 1)$$

che sostituita nella relazione precedentemente trovata:

$$\gamma(V_1 - V_2) = \frac{a_2^2}{V_2} - \frac{a_1^2}{V_1} \quad \rightarrow \quad \gamma(V_1 - V_2) = a_o^2 \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) + \frac{\gamma - 1}{2} (V_1 - V_2)$$

e tenendo conto della: $V^* = a^* = \sqrt{\frac{2H(\gamma - 1)}{\gamma + 1}} = V_\ell \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} = a_o \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}$

da luogo alla:

$$\boxed{V_1 V_2 = \frac{2}{\gamma + 1} a_o^2 = a^{*2}} \quad (V_1 - V_2)/V_1 V_2$$

Relazione di Prandtl per l'onda d'urto normale

La velocità critica del suono è la media geometrica tra quella a monte e quella a valle dell'onda d'urto.

ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA IN UN GAS PIU' CHE PERFETTO

Introducendo un numero di Mach riferito alla velocità critica: $M^* = \frac{V}{a^*}$
(questa è l'unica eccezione al simbolo *)

la relazione: $V_1 V_2 = \frac{2}{\gamma + 1} a_o^2 = a^{*2}$

Per $H = \text{cost}$
si ha: $a^* = \text{cost}$

diventa semplicemente: $M_1^* M_2^* = 1$

Poiché si può scrivere:

$$M^{*2} = \frac{V^2}{a^2} \frac{a^2}{a^{*2}} = M^2 \frac{T}{T_o} \frac{T_o}{T^*} = \frac{M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{\gamma + 1}{2}$$

quadrando, sostituendo e risolvendo in M_2 , si ottiene infine la relazione che lega il numero di Mach a valle M_2 a quello a monte M_1 dell'onda:

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}$$

ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA IN UN GAS PIU' CHE PERFETTO

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}$$

Poiché per la stabilità termodinamica è $\gamma \geq 1$, **ad ogni valore di $M_1 > 1$, corrisponde un valore di $M_2 < 1$ e, quasi, viceversa.**

Il caso $M_1 = 1$ conduce a $M_2 = 1$, nulla succede alla corrente.

Per $M_1 \rightarrow \infty$, il valore limite di M_2 risulta essere:

$$M_{2\ell} = \lim_{M_1 \rightarrow \infty} M_2 = \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right)^{1/2}$$

che per il caso particolare di $\gamma = 1.4 \rightarrow M_{2\ell} = 0.3780$

Per $M_1 \rightarrow M_{2\ell}$, il denominatore della frazione vale zero e $M_2 \rightarrow \infty$.

Il quasi deriva dal fatto che, per valori subsonici di M_1 inferiori a $M_{2\ell}$, il denominatore della frazione è negativo e il valore di M_2 risulta un numero complesso.

ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA IN UN GAS PIU' CHE PERFETTO

Utilizzando la relazione tra M_1 e M_2 , è possibile ricavare allora:

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}$$

$$T_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right) = T_2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 \right) = \frac{H}{c_p}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = (\gamma + 1)^{-2} (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) (\gamma - 1 + 2M_1^2)$$

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_1 (1 + \gamma M_1^2) = p_2 (1 + \gamma M_2^2) = I$$

$$\frac{p_2}{p_1} = (\gamma + 1)^{-1} (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1)$$

$$\rho_2 / \rho_1 = p_2 T_1 / p_1 T_2$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = (\gamma + 1) M_1^2 [2 + (\gamma - 1) M_1^2]^{-1}$$

Questi sono alcuni dei rapporti caratteristici per un'onda d'urto normale.

ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA IN UN GAS PIU' CHE PERFETTO

Essendo l'onda d'urto omoenergetica, si ha: $\frac{T_{o2}}{T_{o1}} = 1$

Il rapporto tra le pressioni di ristagno si può scrivere: $p_o = p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}$$

$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \frac{p_{o2}}{p_2} \frac{p_2}{p_1} \frac{p_1}{p_{o1}} \quad \frac{p_2}{p_1} = (\gamma + 1)^{-1} (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1)$$

Sostituendo le relazioni per la pressione di ristagno, il M_2 in funzione del M_1 e l'espressione di p_2/p_1 precedentemente trovata, si ottiene il rapporto tra le pressioni di ristagno:

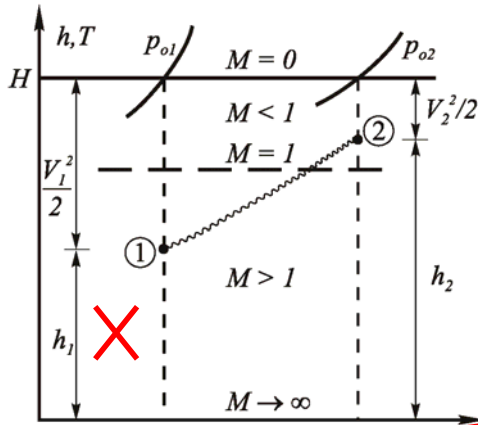
$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \left[(\gamma + 1)^{-(\gamma+1)} (\gamma - 1 + 2M_1^2)^\gamma (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

che, per $M_1 > 1$, conduce sempre a:

$$p_{o2} / p_{o1} < 1$$

per tutti i valori possibili di $\gamma > 1$.

ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA IN UN GAS PIU' CHE PERFETTO



Si ricordi che l'entropia è data da:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

In termini delle grandezze di ristagno

si può scrivere ($T_{o2} = T_{o1}$):

$$s_2 - s_1 = -R \ln \frac{p_{o2}}{p_{o1}}$$

Utilizzando, poi, la appena trovata:

$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \left[(\gamma + 1)^{-(\gamma + 1)} (\gamma - 1 + 2/M_1^2)^\gamma (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) \right]^{1/\gamma}$$

si ottiene, infine, la **variazione di entropia attraverso l'onda d'urto**:

$$\Delta s / R = (s_2 - s_1) / R = \left[-(\gamma + 1) \ln(\gamma + 1) + \ln(2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) + \gamma \ln(\gamma - 1 + 2/M_1^2) \right] / (\gamma - 1)$$

relazione il cui diagramma nella figura in alto mostra quali sono **i soli urti possibili** ($M_1 > 1$), perché deve essere $\Delta s \geq 0$.

ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA IN UN GAS PIU' CHE PERFETTO

Espandendo in serie di Taylor, nell'intorno di $M_1^2 = 1$, la relazione:

$$\Delta s / R = (s_2 - s_1) / R = \left[-(\gamma + 1) \ln(\gamma + 1) + \ln(2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) + \gamma \ln(\gamma - 1 + 2/M_1^2) \right] / (\gamma - 1)$$

si ottiene la seguente espressione:

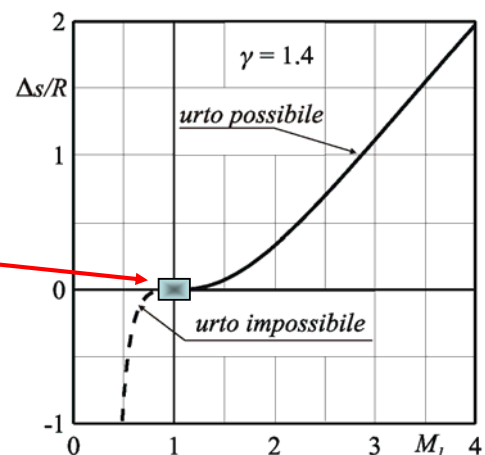
$$\frac{\Delta s (M_1^2 \rightarrow 1)}{R} = \frac{2}{3} \frac{\gamma}{(\gamma + 1)^2} (M_1^2 - 1)^3$$

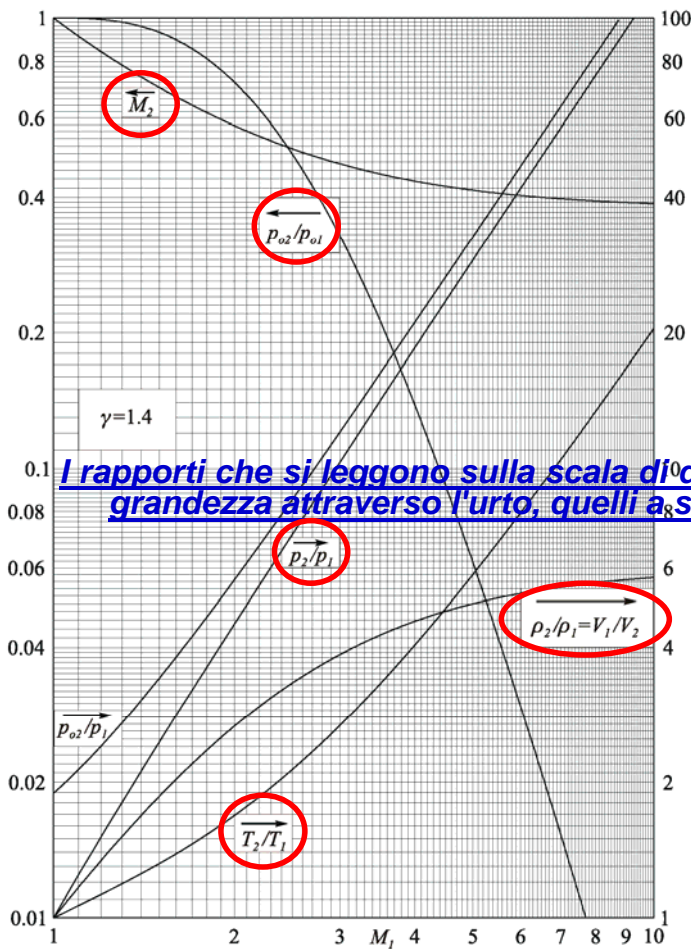
che per $M_1^2 = 1$ risulta nulla insieme alle sue derivate prima e seconda rispetto a M_1^2 (**punto di flesso della curva**).

Questo fatto fa sì che **le onde d'urto che avvengono per $M_1 \rightarrow 1$ (onde di Mach) siano praticamente isoentropiche, cioè reversibili**.

Quindi, **solo l'onda di Mach che si ha per $M_1 \rightarrow 1$ può essere sia di compressione che di espansione** poiché la trasformazione è reversibile, essendo $\Delta s = 0$.

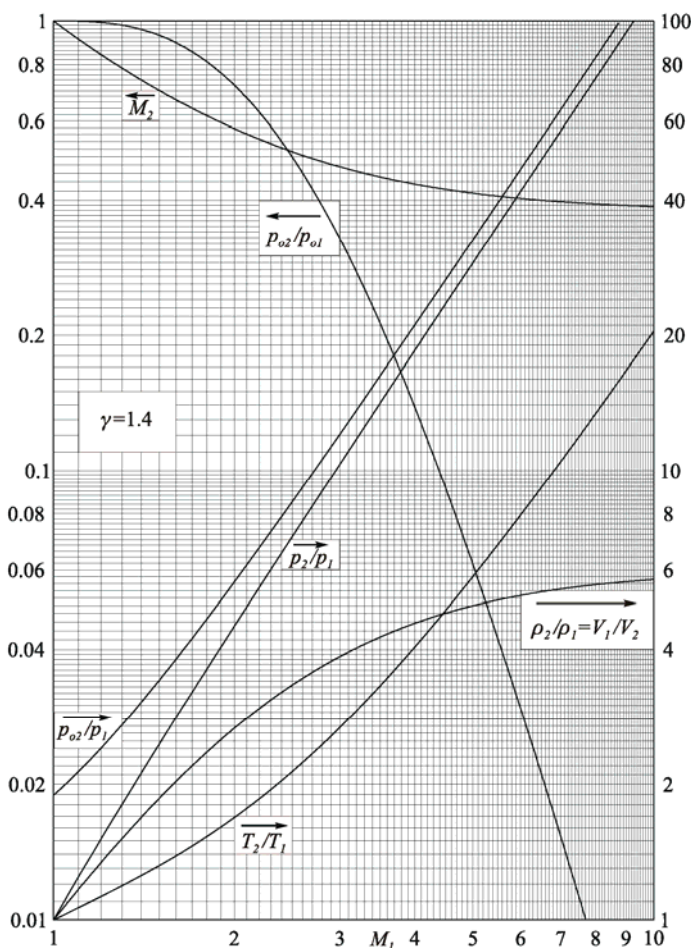
$$\ln(1 + x) = x - x^2/2 + x^3/3 -$$





All' aumentare del numero di Mach a monte dell'onda M_1 da 1 in su (il Mach deve essere almeno sonico), si hanno i seguenti comportamenti:

- diminuisce il numero di Mach a valle M_2 , sino ad un valore asintotico;
- diminuisce continuamente il rapporto tra le pressioni di ristagno (aumenta l'entropia);
- aumenta continuamente il rapporto tra le pressioni statiche;
- aumenta il rapporto tra le densità statiche sino ad un valore asintotico;
- aumenta continuamente il rapporto tra le temperature statiche (quelle di ristagno non variano);
- aumenta il rapporto p_{o2}/p_{o1} .



Valori limite per $M_1 \rightarrow \infty$ ($\gamma = 1.4$)

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} M_2 = \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right)^{1/2} = 0.3780$$

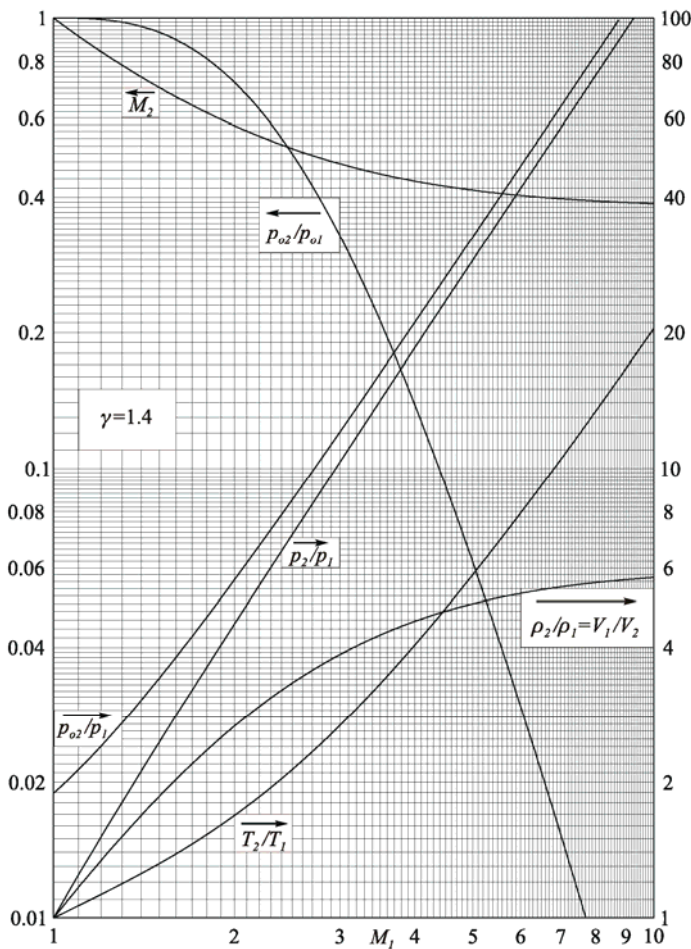
$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{T_2}{T_1} = \frac{2\gamma(\gamma - 1)M_1^2}{\gamma + 1} = \infty$$

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)} = 6$$

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2}{\gamma + 1} = \infty$$

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \text{cost} (M_1^2)^{1-\gamma} = 0$$

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{p_{o2}}{p_1} = \text{cost} M_1^2 = \infty$$



In una corrente (con $\gamma = 1.4$) ad elevatissimo numero di Mach (*ipersonica*), la **densità a valle** di una onda d'urto normale è pari a **sei volte quella a monte** e la **velocità** della corrente diventa **un sesto di quella a monte**.

In questo caso resta comunque da controllare se è ancora valida l'ipotesi di **gas più che perfetto** a causa dell'elevato aumento di temperatura della corrente che può provocare fenomeni di **dissociazione**.

Il diagramma dimostra anche che, per **bassi valori del numero di Mach**, si ha $p_{02}/p_{01} \cong 1$ e che quindi l'onda d'urto può essere considerata praticamente **isoentropica**.

$$s_2 - s_1 = -R \ln \frac{p_{02}}{p_{01}}$$

TABELLE DELLE ONDE D'URTO NORMALI

Una più dettagliata descrizione dell'andamento dei rapporti caratteristici è riportata nelle tabelle (per $M_1 = M > 1$) così come mostrato di seguito

Moto Isentropico ($\gamma=1.4$)										Prandtl e Meyer		Onde d'urto normali ($\gamma=1.4$)					
M	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	a/a_0	A/A^*	M^*	$v(^{\circ})$	$\mu(^{\circ})$			M_2	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	p_1/p_{02}	
1.00	.5283	.6339	.8333	1.0000	1.0000	1.0000	.0000	9.0000	-1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.5283	
1.01	.5221	.6287	.8306	.9998	1.000	1.008	.4472	8.193	-1	.9901	1.023	1.017	1.007	1.000	1.000	.5221	
1.02	.5160	.6234	.8278	.9996	1.000	1.017	.1257	7.864	-1	.9805	1.047	1.033	1.013	1.000	1.000	.5160	
1.03	.5099	.6181	.825	.9994	1.001	1.025	.3294	7.614	-1	.9712	1.071	1.050	1.020	1.000	1.000	.5100	
1.04	.5039	.6129	.822	.9992	1.001	1.033	.3510	7.406	-1	.9620	1.095	1.067	1.026	.9999	1.000	.5039	

Onde d'urto normali ($\gamma=1.4$)						
M	M_2	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	p_1/p_{02}
1.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.5283
1.01	.9901	1.023	1.017	1.007	1.000	.5221
1.02	.9805	1.047	1.033	1.013	1.000	.5160
1.03	.9712	1.071	1.050	1.020	1.000	.5100
1.04	.9620	1.095	1.067	1.026	.9999	.5039

A questo punto, si può pensare di definire l'onda d'urto come una superficie di discontinuità attraverso la quale avviene una brusca conversione di energia cinetica ordinata in energia cinetica disordinata ad entalpia totale costante. La brusca diminuzione di velocità dà luogo ad un brusco innalzamento della densità:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = G = \text{cost}$$

della pressione:

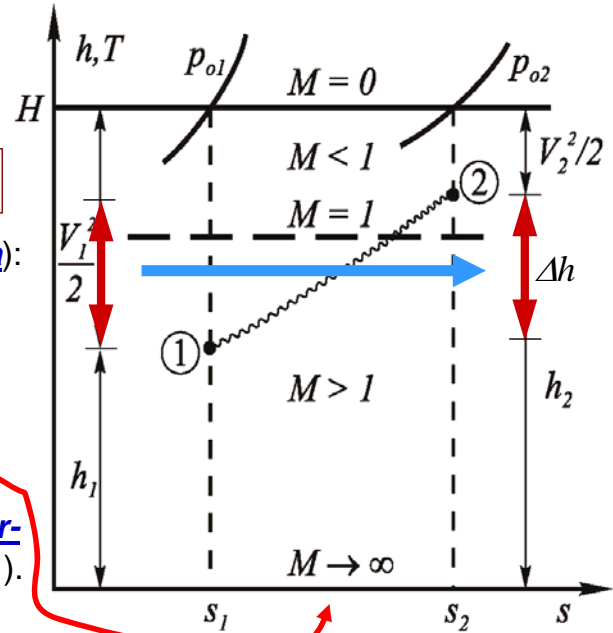
$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 = I = \text{cost}$$

dell'entalpia (e quindi della temperatura):

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = H = \text{cost}$$

e, ovviamente, dell'entropia.

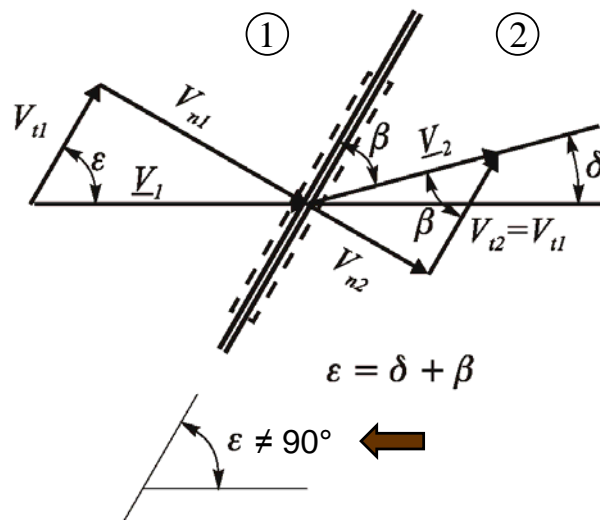
Invece, la pressione di ristagno attraverso l'onda d'urto, diminuisce ($p_{o2}/p_{o1} < 1$).



ONDA D'URTO OBLIQUA STAZIONARIA

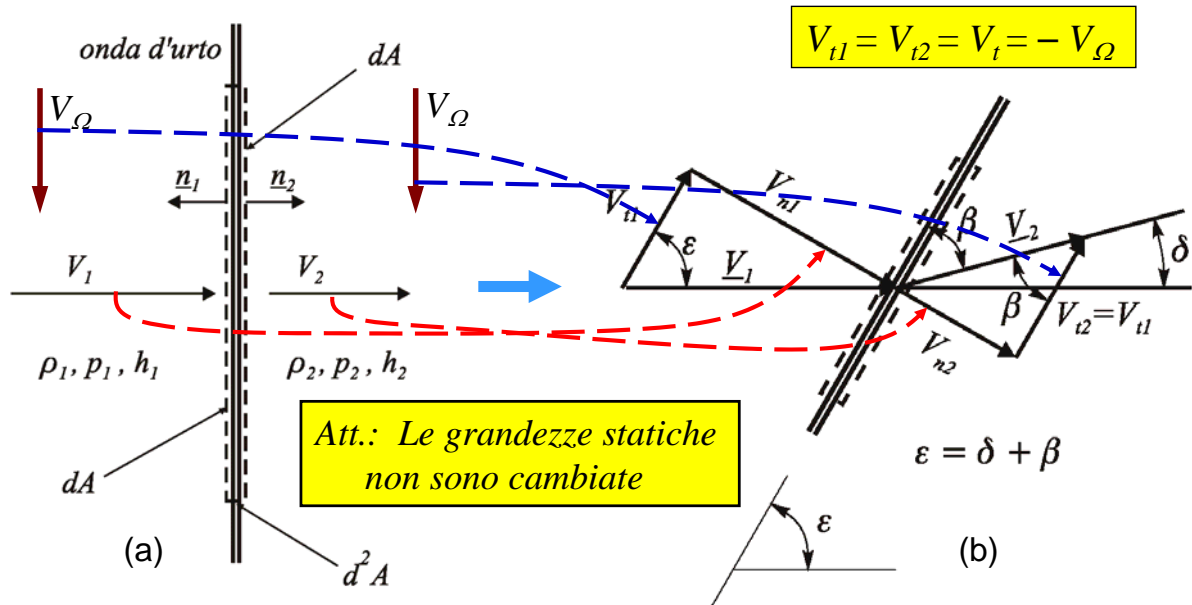
Nella figura è mostrato il volume di controllo relativo al caso di un'onda d'urto obliqua stazionaria inclinata di un angolo $\varepsilon \neq 90^\circ$ (detto angolo d'urto) rispetto alla direzione della corrente a monte. L'onda d'urto obliqua non è più normale rispetto alla V_1 .

Questo caso si può derivare da quello dell'onda d'urto normale stazionaria, cambiando il sistema di riferimento inerziale rispetto al quale si scrivono le equazioni del bilancio.



Si consideri nuovamente il volume di controllo dell'onda d'urto normale
 Se, ora, un nuovo sistema di riferimento si muove rispetto a quella inerziale di Fig.(a) dall'alto verso il basso (parallelamente all'onda d'urto) con velocità V_Ω costante, **anche questo sistema sarà inerziale**.

Per l'osservatore solidale a questo nuovo sistema, sia il fluido a monte che quello a valle dell'onda appariranno dotati, oltre che delle preesistenti rispettive velocità V_1 e V_2 , normali all'onda, **anche di una velocità parallela all'onda che è la stessa per entrambi i fluidi** ed è pari a:



L'equazione di conservazione della massa per un'onda d'urto obliqua risulta pertanto:

$$\rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2}$$

L'equazione del bilancio della quantità di moto dà luogo a:

$$p_1 + \rho_1 V_{n1}^2 = p_2 + \rho_2 V_{n2}^2$$

che ovviamente rappresenta la **proiezione, in direzione normale** all'onda d'urto, dell'equazione vettoriale:

$$dm(\underline{V}_2 - \underline{V}_1) + dA(p_1 \underline{n}_1 + p_2 \underline{n}_2) = 0$$

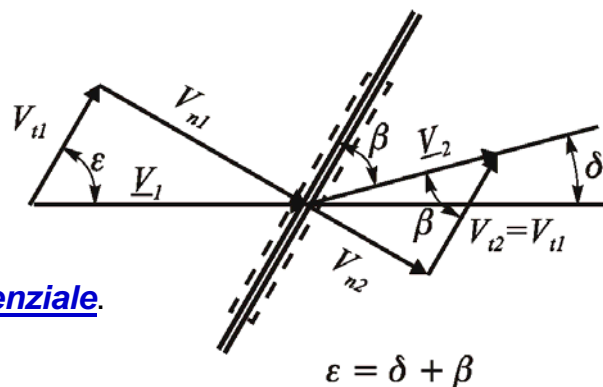
L'altra proiezione, nella direzione tangenziale all'onda d'urto, dà luogo invece alla:

$$\rho_1 V_{n1} V_{t1} = \rho_2 V_{n2} V_{t2}$$

che, per l'equazione di continuità, mostra:

$$V_{t1} = V_{t2}$$

costanza della componente tangenziale.



La costanza della componente tangenziale della velocità, associata alla riduzione della componente normale, genera la deviazione della corrente di un angolo δ (detto **angolo di deviazione della corrente**).

La sostituzione di V_{n1} e V_{n2} rispettivamente al posto di V_1 e V_2 nella:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = H = \text{cost}$$

conduce ad una **forma strana** dell'equazione di conservazione dell'energia (l'energia cinetica non ha componenti !) e in particolare:

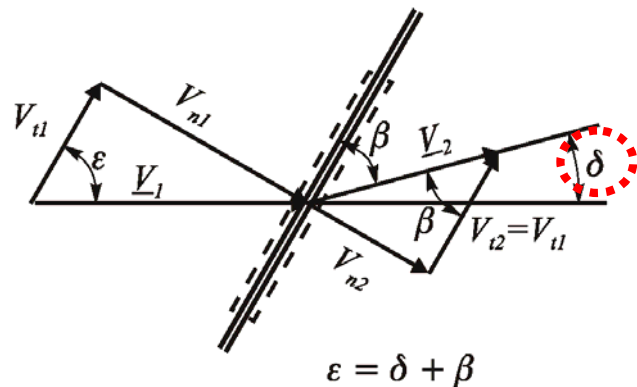
$$h_1 + \frac{V_{n1}^2}{2} = h_2 + \frac{V_{n2}^2}{2}$$

ma: $V_{t1} = V_{t2}$

$$\rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2}$$

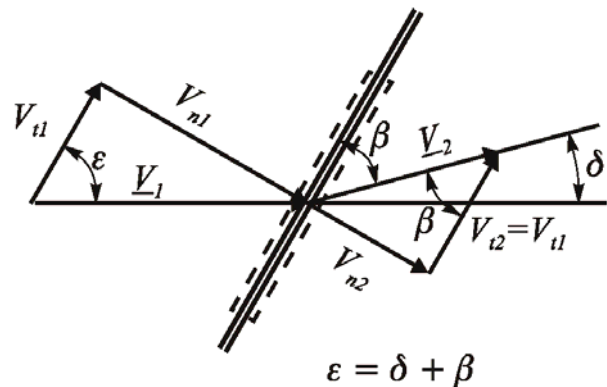
$$p_1 + \rho_1 V_{n1}^2 = p_2 + \rho_2 V_{n2}^2$$

Un'onda d'urto obliqua è quindi riconducibile ad un'onda d'urto normale purché si considerino le sole componenti normali della velocità V_{n1} e V_{n2} .



Per poter calcolare un'onda d'urto obliqua, si introduce quindi **la componente normale del numero di Mach a monte dell'onda d'urto** definita come:

$$M_{n1} = \frac{V_{n1}}{a_1} = \frac{V_1 \sin \epsilon}{a_1} = M_1 \sin \epsilon$$



L'introduzione di M_{n1} , che ovviamente deve essere maggiore o uguale ad 1, risulta particolarmente utile perché **i parametri** termofluidodinamici a valle dell'onda d'urto obliqua (inclinata rispetto alla corrente con un angolo ϵ) **risultano identici a quelli a valle di un'onda d'urto normale** ($\epsilon = 90^\circ$) **per la quale il numero di Mach a monte sia proprio uguale a M_{n1} .**

Ovviamente, **anche il numero di Mach a valle andrà riguardato come componente normale del numero di Mach a valle** dell'onda d'urto obliqua:

$$M_{n2} = \frac{V_{n2}}{a_2} = \frac{V_2 \sin \beta}{a_2} = M_2 \sin \beta = M_2 \sin (\epsilon - \delta)$$

Ne consegue che tutte le relazioni viste per le onde d'urto normali stazionarie sono ancora valide, purché M_1 e M_2 siano rispettivamente sostituiti con le quantità $M_{n1} = M_1 \sin \varepsilon$ e $M_{n2} = M_2 \sin \beta$:

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \quad \rightarrow \quad M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \varepsilon + 2}{(2\gamma M_1^2 \sin^2 \varepsilon - \gamma + 1)\sin^2 \beta}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = (\gamma + 1)^{-1} (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) \quad \rightarrow \quad \frac{P_2}{P_1} = (\gamma + 1)^{-1} (2\gamma M_1^2 \sin^2 \varepsilon - \gamma + 1)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = (\gamma + 1)^{-2} (2\gamma M_1^2 \sin^2 \varepsilon - \gamma + 1) [\gamma - 1 + 2/(M_1^2 \sin^2 \varepsilon)]$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_{n1}}{V_{n2}} = (\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \varepsilon [2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \varepsilon]^{-1}$$

$$\frac{P_{o2}}{P_{o1}} = \left[(\gamma + 1)^{-(\gamma+1)} (\gamma - 1 + 2/M_1^2 \sin^2 \varepsilon)^\gamma (2\gamma M_1^2 \sin^2 \varepsilon - \gamma + 1) \right]^{1-\gamma}$$

$$\frac{P_{o2}}{P_{o1}} = \left[(\gamma + 1)^{-(\gamma+1)} (\gamma - 1 + 2/M_1^2 \sin^2 \varepsilon)^\gamma (2\gamma M_1^2 \sin^2 \varepsilon - \gamma + 1) \right]^{1-\gamma}$$

Occorre qui osservare esplicitamente che **non è formalmente corretto ricavare il rapporto delle pressioni di ristagno, dalla relazione relativa alle onde d'urto normali** poiché questa non tiene conto della componente tangenziale della velocità.

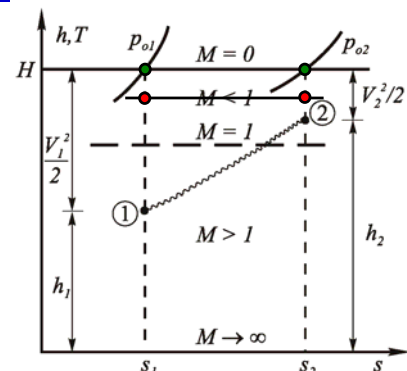
Tuttavia, se sul piano h - s si individuano i due stati di ristagno normali (in rosso), essi risulteranno allineati in orizzontale, così come lo saranno i due stati totali (in verde) i quali si ottengono aggiungendo ai primi lo stesso contributo entalpico relativo all'uguale componente tangenziale della velocità.

Gli stati totali avranno, ovviamente, lo stesso salto entropico di quelli normali.

La relazione precedente è quindi giustificata dalla:

$$s_2 - s_1 = -R \ln \frac{P_{o2}}{P_{o1}}$$

Per un gas più che perfetto si ha: stesso salto entropico, stesso rapporto delle pressioni di ristagno.



$$\frac{p_2}{p_1} = (\gamma + 1)^{-1} (2\gamma M_1^2 \sin^2 \varepsilon - \gamma + 1)$$

Si nota che, per dati M_1 e p_1 , l'aumento di pressione attraverso l'onda d'urto dipende dall'angolo ε che l'onda forma con la direzione della corrente a monte.

In particolare, l'onda d'urto normale dà luogo al massimo aumento di pressione attraverso l'urto ($\sin^2 \varepsilon = 1$). Al diminuire di ε , la quantità $\sin^2 \varepsilon$ diminuisce anch'essa, e quindi il rapporto p_2/p_1 diminuisce.

Il valore limite (inferiore) dell'angolo d'urto:

$$\varepsilon_{min} = \mu = \arcsin(1/M_1)$$

dà luogo a $p_2/p_1 = 1$, che corrisponde al caso di un'onda di Mach che non produce alcun aumento di pressione della corrente.

Valori di $\varepsilon < \mu$ non sono possibili perché la componente normale del numero di Mach a monte dell'onda risulterebbe inferiore all'unità.

Si ricordi a tal proposito la relazione già vista:

$$M_{n1} = \frac{V_{n1}}{a_1} = \frac{V_1 \sin \varepsilon}{a_1} = M_1 \sin \varepsilon$$

Resta ora da determinare l'espressione che lega M_1 , ε e δ . Si ha:

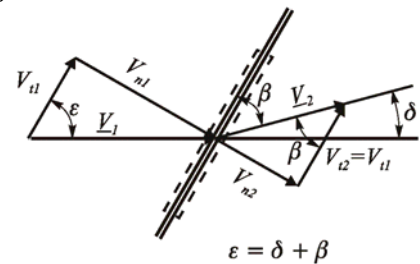
$$V_{t1} = V_{t2} \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{\cancel{V_{t2}} \cos \varepsilon}{\cancel{V_{t1}} \cos \beta} = \frac{\cos \varepsilon}{\cos \beta}$$

e ricordando:

$$\rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2}$$

si ottiene:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_{n1}}{V_{n2}} = \frac{V_1 \sin \varepsilon}{V_2 \sin \beta} = \frac{\cos \beta \sin \varepsilon}{\cos \varepsilon \sin \beta} = \frac{\tan \varepsilon}{\tan \beta} = \frac{\tan \varepsilon}{\tan(\varepsilon - \delta)}$$



Sostituendo nella:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_{n1}}{V_{n2}} = (\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \varepsilon \left[2 + (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \varepsilon \right]^{-1}$$

$$\tan(x - y) = (\tan x - \tan y) / (1 + \tan x \tan y)$$

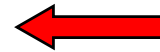
si ricava:

$$\frac{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \varepsilon}{2 + (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \varepsilon} = \frac{\tan \varepsilon}{\tan(\varepsilon - \delta)}$$

da cui sviluppando e semplificando si ottiene, infine, l'angolo di deviazione δ :

$$\tan \delta = \left(\frac{\gamma + 1}{2(\sin^2 \varepsilon - 1/M_1^2)} - 1 \right)^{-1} \cot \varepsilon$$

$$\tan \delta = \left(\frac{\gamma + 1}{2(\sin^2 \varepsilon - 1/M_1^2)} - 1 \right)^{-1} \cot \varepsilon$$



Da questa relazione, è interessante notare che la deviazione della corrente è nulla sia nel caso per il quale:

$$\cot \varepsilon = 0 \rightarrow \varepsilon = 90^\circ$$

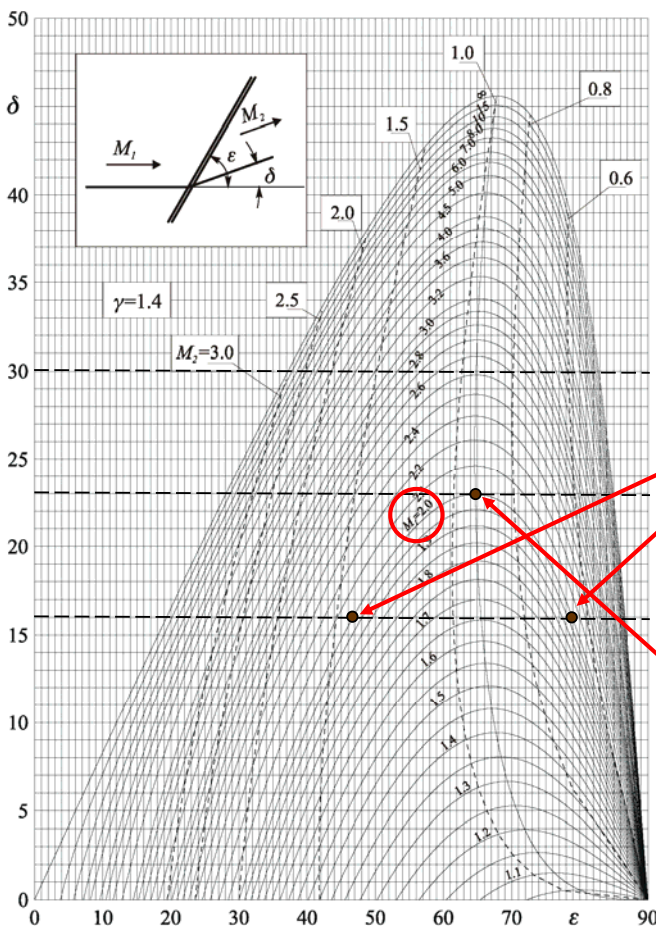
corrispondente all'onda d'urto normale, così come nel caso in cui:

$$\sin^2 \varepsilon_{min} - 1/M_1^2 = 0$$

relativo a quella che è stata già definita onda di Mach, la cui inclinazione (nel seguito sempre indicata con il simbolo μ) risulta come già scritto pari a:

$$\varepsilon_{min} = \mu = \arcsin(1/M_1)$$

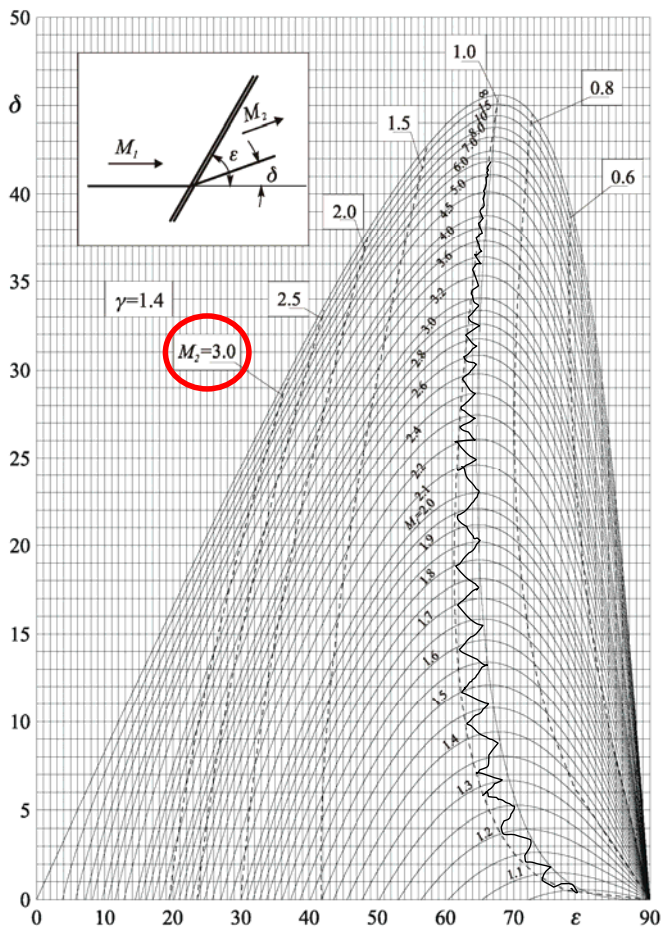
L'onda di Mach, dunque, è quella per la quale il numero di Mach normale è pari ad 1 per cui essa non comporta alcuna variazione finita delle proprietà termofluidodinamiche del fluido.



Per un dato numero di Mach, al crescere del valore di δ , si hanno tre possibilità: due soluzioni con valori distinti dell'angolo di inclinazione dell'onda d'urto ε ; una sola soluzione (all'apice della curva corrispondente al numero di Mach assegnato); nessuna soluzione.

Nel caso delle due soluzioni, la prima (valore di ε più basso) è detta soluzione debole mentre l'altra soluzione forte. Ciò perchè, per un dato numero di Mach a monte dell'onda d'urto, valori maggiori di ε corrispondono ad un più elevato numero di Mach normale e di conseguenza ad una più alta intensità di urto.

La soluzione unica corrisponde al caso di massima deviazione possibile della corrente δ_{max} per un dato numero di Mach.



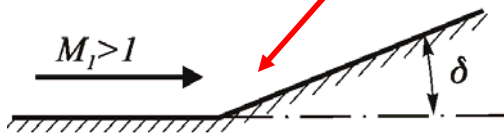
L'assenza di soluzioni per $\delta > \delta_{max}$ sta a significare che, se alla corrente è imposta una deviazione maggiore di quella massima possibile per quel dato numero di Mach, non si può deviare la corrente con una semplice onda d'urto obliqua. Si vedrà poi cosa succede.

Nella figura sono anche indicati (curve tratteggiate) alcuni valori di M_2 . In particolare la curva $M_2 = 1$ mostra che: la soluzione forte conduce sempre ad un valore di $M_2 < 1$, la soluzione debole dà luogo quasi sempre ad un valore di $M_2 > 1$, salvo che nella piccola zona in prossimità dell'angolo di deviazione massima della corrente per la quale $M_2 < 1$. L'angolo ϵ varia tra μ e 90° .

MOTO SUPERSONICO SU UN DIEDRO

Si consideri un flusso supersonico uniforme (per semplicità considerato **non viscoso**) su una parete che ad un certo punto devia bruscamente di un angolo δ per la presenza di una **concavità**, ovvero di un **diedro infinito** con angolo di semiapertura anche esso uguale a δ .

In dipendenza dai valori di M_1 e di δ , sono possibili i tre comportamenti prima descritti: due soluzioni con valori distinti dell'angolo ϵ ; una sola soluzione nessuna soluzione.

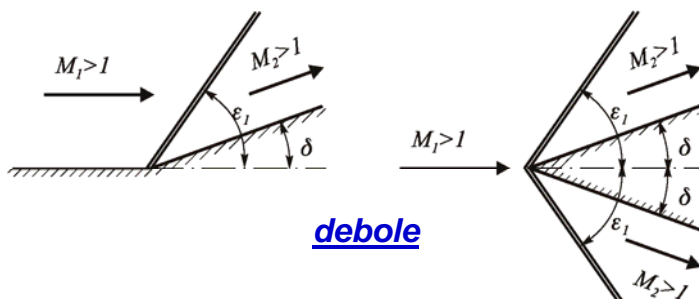


a)

Concavità angolosa

Diedro (bidimensionale piano)

Una prima possibilità è quella in cui l'angolo di deviazione δ cui la corrente deve essere soggetta risulta **minore dell'angolo di deviazione massima** corrispondente al valore di M_1 . In questo caso sono teoricamente possibili entrambe le soluzioni, **debole e forte**. L'esperienza mostra che la **soluzione che fisicamente accade in questi casi è quella debole**.



All'aumentare dell'angolo di deviazione δ , e/o al diminuire del numero di Mach a monte, i due angoli di inclinazione ϵ delle onde d'urto, relativi alla soluzione debole e a quella forte, tendono ad avvicinarsi sino a che coincidono e la soluzione diventa unica.

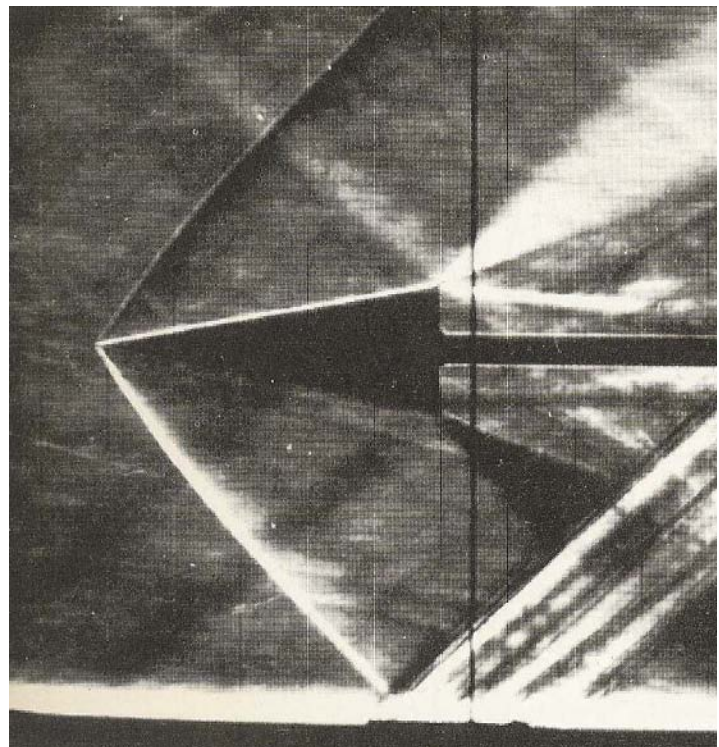
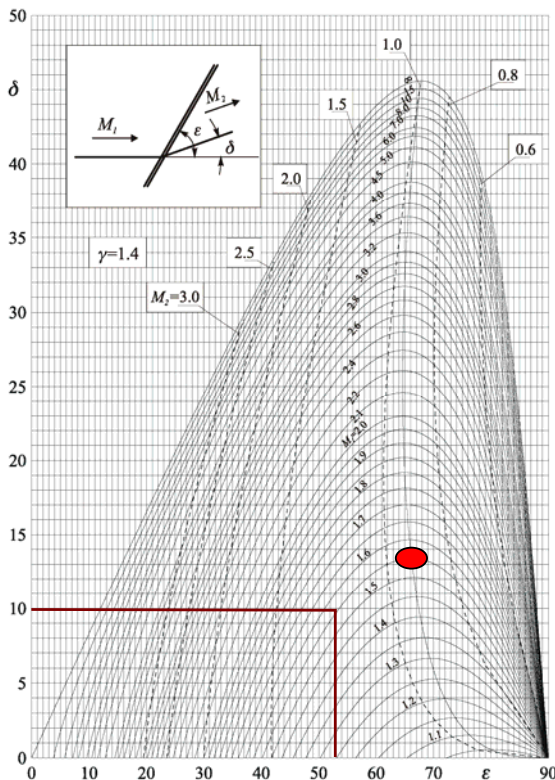
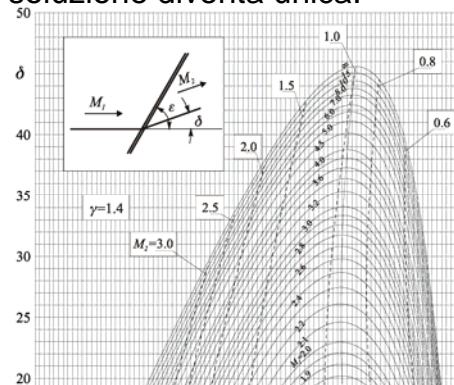
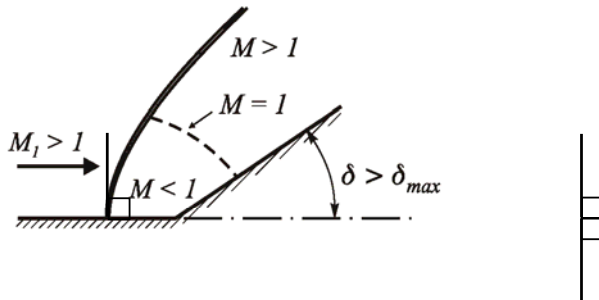


Immagine Schlieren di un flusso supersonico di aria su un diedro con $M_1 = 1.56$ e $\delta = 10^\circ (< \delta_{max})$

Per $\delta > \delta_{max}$ non esiste un'onda d'urto obliqua in grado di deviare la corrente dell'angolo δ . Nel caso di $\gamma = 1.4$, ciò accade, ad es., qualunque sia il numero di Mach a monte della corrente, se $\delta > 45.58^\circ$ (limite per $M \rightarrow \infty$).

L'onda d'urto allora si stacca dal punto angoloso e si sposta a monte di quest'ultimo (**onda d'urto staccata**).

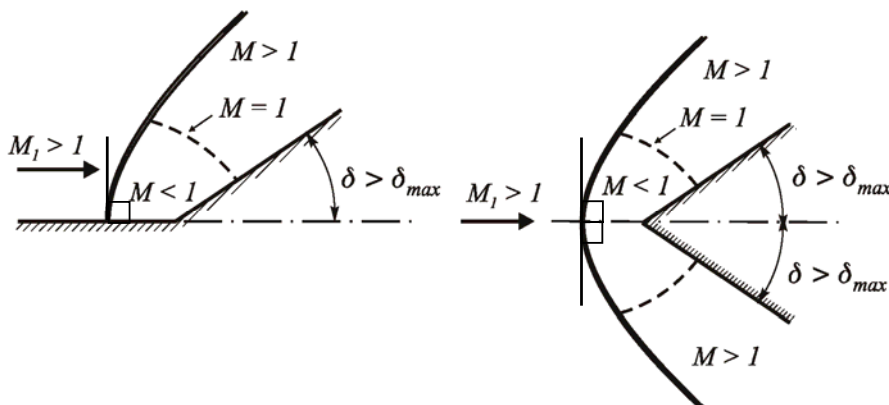
Poiché nel caso di flusso su parete, su questa (o sul piano di mezzeria del diedro nel caso del diedro) **la corrente non deve essere deviata**, e poiché le uniche onde che non deviano la corrente sono quelle normali o quelle di Mach, l'onda d'urto sulla parete (o sul piano di mezzeria del diedro) deve essere **necessariamente normale** alla direzione della corrente.



L'onda d'urto, che sulla parete, o sul piano di mezzeria, è normale alla corrente e presenta alti valori di ε nelle sue vicinanze, rende il moto subsonico permettendo, perciò, al flusso di deviare di un angolo maggiore di δ_{max} .

Man mano che ci si allontana dalla parete (o dal piano di mezzeria) l'onda d'urto diventa progressivamente meno verticale (ε diminuisce), e quindi meno forte, ed il numero di Mach, a valle di essa, tende ad aumentare sino a poter diventare supersonico.

Le linee tratteggiate rappresentano le **linee soniche** (sulle quali $M = 1$).



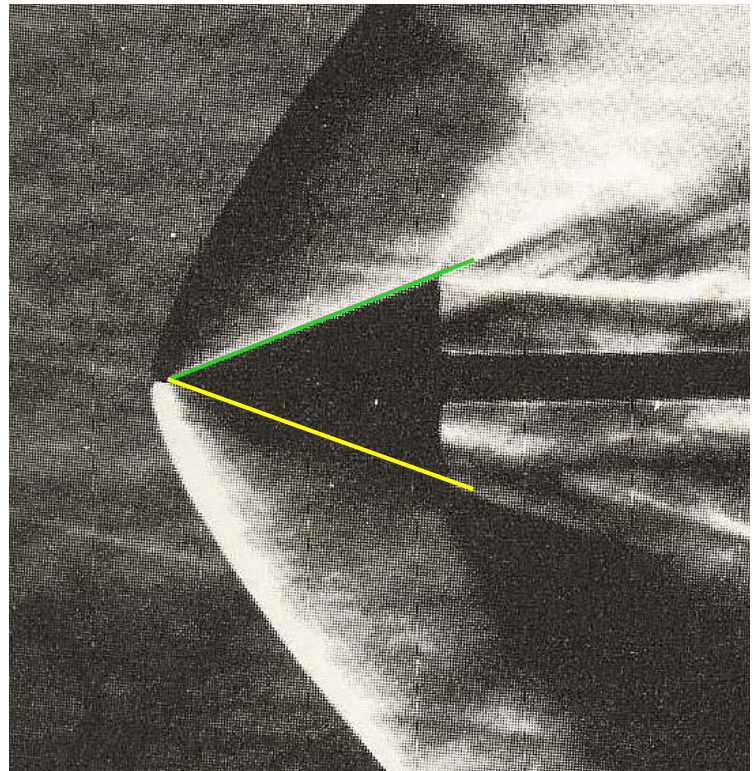
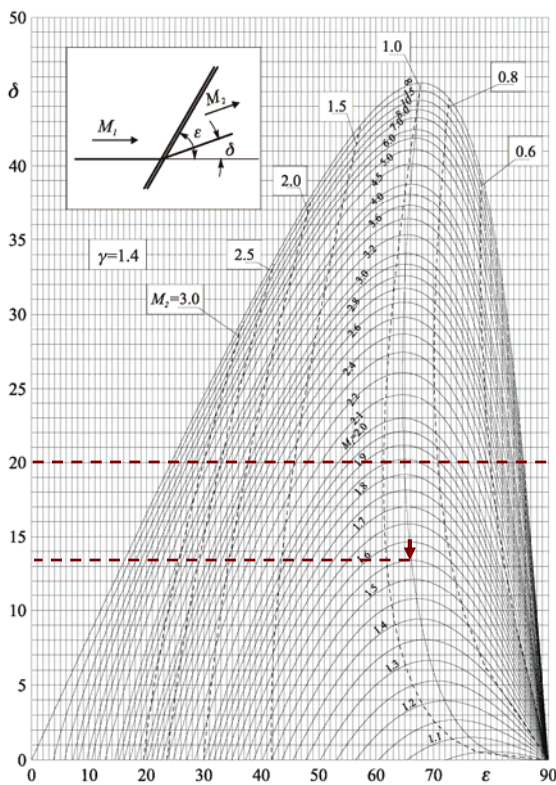
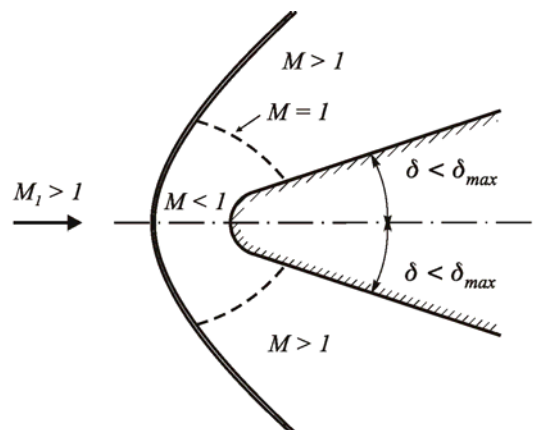
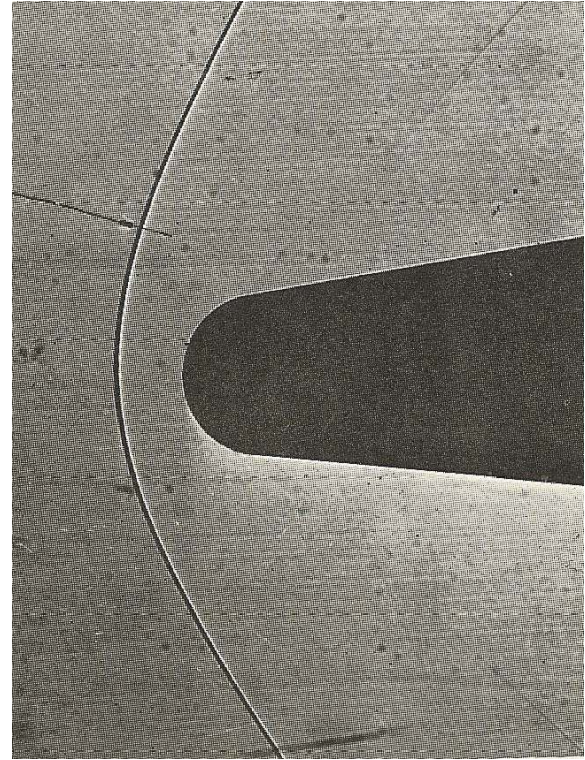
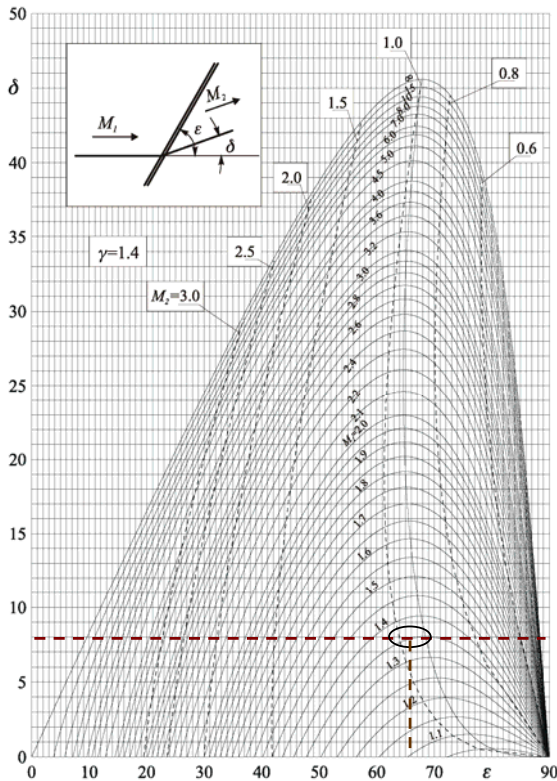


Immagine Schlieren di un flusso supersonico di aria su un cuneo con $M_1 = 1.56$ e $\delta = 20^\circ (> \delta_{max})$. *Si noti l'onda d'urto staccata al vertice.*

Va poi fatto osservare che un corpo definito **tozzo (non affilato)**, in una corrente supersonica, anche nel caso in cui l'angolo di inclinazione delle sue pareti a valle del bordo di attacco risulta minore dell'angolo di deviazione massimo, comporterà senz'altro la presenza di un'onda d'urto staccata dal corpo in quanto l'angolo di deviazione sull'asse risulta maggiore di δ_{max} .

In ogni caso, **se un corpo in regime supersonico deve avere un basso coefficiente di resistenza, è preferibile che il suo bordo di attacco sia quanto più possibile affilato in modo da non generare elevate deviazioni della corrente che lo investe e alte compressioni della stessa in una estesa zona frontale del corpo.** Tale è il caso del bordo di attacco di profili alari degli aerei supersonici.



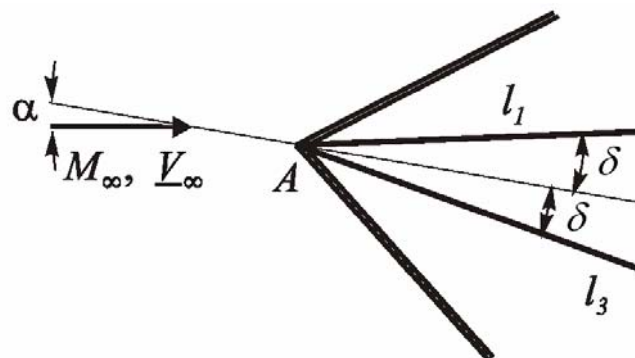


Shadowgraph di un'onda d'urto nel flusso supersonico su un cono smussato, $\delta = 8^\circ$, a $M_1 = 1.36$.

Notare che l'onda d'urto sull'asse risulta ben staccata.

Si deve infine porre in evidenza che, nel caso di un diedro con angolo di semiapertura δ posto ad un angolo di attacco α rispetto alla direzione della corrente supersonica, se i due angoli di deviazione della corrente (rispettivamente $\delta - \alpha$ per la zona superiore e $\delta + \alpha$ per la zona inferiore) sono entrambi inferiori a δ_{max} , le due soluzioni per i campi di moto superiore ed inferiore sono indipendenti una dall'altra, cioè, a differenza di quanto accade in moto subsonico, i due moti non si influenzano.

Nel caso in cui, invece, la deviazione fosse più elevata (ad es. se $\delta + \alpha$ per $\alpha > 0$ risultasse maggiore dell'angolo δ_{max}), l'onda d'urto si staccerebbe dal diedro ed il campo di moto inferiore influenzerebbe il superiore e viceversa.



Moto Isentropico ($\gamma=1.4$)						
M	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	$\rho V^2/2p_0$	A/A^*	M^*
.00	1.000	1.000	1.000	.0000	∞	.0000
.01	.9999	1.000	1.000	.7000 -4	5.787 +1	1.095 -1
.02	.9997	.9998	.9999	2.799 -3	2.894 +1	2.191 -1
.03	.9994	.9996	.9998	6.296 -3	1.930 +1	3.286 -1
.04	.9989	.9992	.9997	1.119 -2	1.448 +1	4.381 -1
.05	.9983	.9988	.9995	1.747 -2	1.159 +1	5.476 -1
.06	.9975	.9982	.9993	2.514 -2	9.666	6.570 -1
.07	.9966	.9976	.9990	3.418 -2	8.292	7.664 -1
.08	.9955	.9968	.9987	4.460 -2	7.262	8.758 -1
.09	.9944	.9960	.9984	5.638 -2	6.461	9.851 -1
.10	.9930	.9950	.9980	6.951 -2	5.822	1.094
.11	.9916	.9940	.9976	8.399 -2	5.299	1.204
.12	.9900	.9928	.9971	9.979 -2	4.864	1.313
.13	.9883	.9916	.9966	1.169 -1	4.497	1.422
.14	.9864	.9903	.9961	1.353 -1	4.182	1.531
.15	.9844	.9888	.9955	1.550 -1	3.910	1.639
.16	.9823	.9873	.9949	1.760 -1	3.673	1.748
.17	.9800	.9857	.9943	1.983 -1	3.464	1.857
.18	.9776	.9840	.9936	2.217 -1	3.278	1.965
.19	.9751	.9822	.9928	2.464 -1	3.112	2.074
.20	.9725	.9803	.9921	2.723 -1	2.964	2.182
.21	.9697	.9783	.9913	2.994 -1	2.829	2.290
.22	.9668	.9762	.9904	3.276 -1	2.708	2.398
.23	.9638	.9740	.9895	3.569 -1	2.597	2.506
.24	.9607	.9718	.9886	3.874 -1	2.496	2.614
.25	.9575	.9694	.9877	4.189 -1	2.403	2.722
.26	.9541	.9670	.9867	4.515 -1	2.317	2.829
.27	.9506	.9645	.9856	4.851 -1	2.238	2.936
.28	.9470	.9619	.9846	5.197 -1	2.166	3.043
.29	.9433	.9592	.9835	5.553 -1	2.098	3.150
.30	.9395	.9564	.9823	5.919 -1	2.035	3.257
.31	.9355	.9535	.9811	6.293 -1	1.977	3.364
.32	.9315	.9506	.9799	6.677 -1	1.922	3.470
.33	.9274	.9476	.9787	7.069 -1	1.871	3.576
.34	.9231	.9445	.9774	7.470 -1	1.823	3.682
.35	.9188	.9413	.9761	7.878 -1	1.778	3.788
.36	.9143	.9380	.9747	8.295 -1	1.736	3.893
.37	.9098	.9347	.9733	8.719 -1	1.696	3.999
.38	.9052	.9313	.9719	9.149 -1	1.659	4.104
.39	.9004	.9278	.9705	9.587 -1	1.623	4.209
.40	.8956	.9243	.9690	1.003	1.590	4.313
.41	.8907	.9207	.9675	1.048	1.559	4.418
.42	.8857	.9170	.9659	1.094	1.529	4.522
.43	.8807	.9132	.9643	1.140	1.501	4.626
.44	.8755	.9094	.9627	1.186	1.474	4.729
.45	.8703	.9055	.9611	1.234	1.449	4.833
.46	.8650	.9016	.9594	1.281	1.425	4.936
.47	.8596	.8976	.9577	1.329	1.402	5.038
.48	.8541	.8935	.9559	1.378	1.380	5.141
.49	.8486	.8894	.9542	1.426	1.359	5.243

Moto Isentropico ($\gamma=1.4$)						
M	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	$\rho V^2/2p_0$	A/A^*	M^*
.50	.8430	.8852	.9524	.1475	1.340	.5345
.51	.8374	.8809	.9506	.1525	1.321	.5447
.52	.8317	.8766	.9487	.1574	1.303	.5548
.53	.8259	.8723	.9468	.1624	1.286	.5649
.54	.8201	.8679	.9449	.1674	1.270	.5750
.55	.8142	.8634	.9430	.1724	1.255	.5851
.56	.8082	.8589	.9410	.1774	1.240	.5951
.57	.8022	.8544	.9390	.1825	1.226	.6051
.58	.7962	.8498	.9370	.1875	1.213	.6150
.59	.7901	.8451	.9349	.1925	1.200	.6249
.60	.7840	.8405	.9328	.1976	1.188	.6348
.61	.7778	.8357	.9307	.2026	1.177	.6447
.62	.7716	.8310	.9286	.2076	1.166	.6545
.63	.7654	.8262	.9265	.2127	1.155	.6643
.64	.7591	.8213	.9243	.2177	1.145	.6740
.65	.7528	.8164	.9221	.2226	1.136	.6837
.66	.7465	.8115	.9199	.2276	1.127	.6934
.67	.7401	.8066	.9176	.2326	1.118	.7031
.68	.7338	.8016	.9153	.2375	1.110	.7127
.69	.7274	.7966	.9131	.2424	1.102	.7223
.70	.7209	.7916	.9107	.2473	1.094	.7318
.71	.7145	.7865	.9084	.2521	1.087	.7413
.72	.7080	.7814	.9061	.2569	1.081	.7508
.73	.7016	.7763	.9037	.2617	1.074	.7602
.74	.6951	.7712	.9013	.2664	1.068	.7696
.75	.6886	.7660	.8989	.2711	1.062	.7789
.76	.6821	.7609	.8964	.2758	1.057	.7883
.77	.6756	.7557	.8940	.2804	1.052	.7975
.78	.6691	.7505	.8915	.2849	1.047	.8068
.79	.6625	.7452	.8890	.2894	1.043	.8160
.80	.6560	.7400	.8865	.2939	1.038	.8251
.81	.6495	.7347	.8840	.2983	1.034	.8343
.82	.6430	.7295	.8815	.3026	1.030	.8433
.83	.6365	.7242	.8789	.3069	1.027	.8524
.84	.6300	.7189	.8763	.3112	1.024	.8614
.85	.6235	.7136	.8737	.3155	1.021	.8704
.86	.6170	.7083	.8711	.3195	1.018	.8793
.87	.6106	.7030	.8685	.3235	1.015	.8882
.88	.6041	.6977	.8659	.3275	1.013	.8970
.89	.5977	.6924	.8632	.3314	1.011	.9058
.90	.5913	.6870	.8606	.3352	1.009	.9146
.91	.5849	.6817	.8579	.3390	1.007	.9233
.92	.5785	.6764	.8552	.3427	1.006	.9320
.93	.5721	.6711	.8525	.3464	1.004	.9407
.94	.5658	.6658	.8498	.3499	1.003	.9493
.95	.5595	.6604	.8471	.3534	1.002	.9578
.96	.5532	.6551	.8444	.3569	1.001	.9663
.97	.5469	.6498	.8416	.3602	1.001	.9748
.98	.5407	.6445	.8389	.3635	1.000	.9833
.99	.5345	.6392	.8361	.3667	1.000	.9916

Moto Isentropico ($\gamma=1.4$)							Prandtl e Meyer		Onde d'urto normali ($\gamma=1.4$)					
M	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	$\rho V^2/2p_0$	A/A^*	M^*	$\nu(^{\circ})$	$\mu(^{\circ})$	M_2	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	P_{o2}/P_{o1}	P_1/P_{o2}
1.00	.5283	.6339	.8333	.3698	1.000	1.000	.0000	9.000 +1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.5283
1.01	.5221	.6287	.8306	.3728	1.000	1.008	.4472 -1	8.193 +1	.9901	1.023	1.017	1.007	1.000	.5221
1.02	.5160	.6234	.8278	.3758	1.000	1.017	1.257	7.864 +1	.9805	1.047	1.033	1.013	1.000	.5160
1.03	.5099	.6181	.8250	.3787	1.001	1.025	2.294	7.614 +1	.9712	1.071	1.050	1.020	1.000	.5100
1.04	.5039	.6129	.8222	.3815	1.001	1.033	3.510	7.406 +1	.9620	1.095	1.067	1.026	.9999	.5039
1.05	.4979	.6077	.8193	.3842	1.002	1.041	4.874	7.225 +1	.9531	1.120	1.084	1.033	.9999	.4979
1.06	.4919	.6024	.8165	.3869	1.003	1.049	6.367	7.063 +1	.9444	1.144	1.101	1.039	.9998	.4920
1.07	.4860	.5972	.8137	.3895	1.004	1.057	7.973	6.916 +1	.9360	1.169	1.118	1.046	.9996	.4861
1.08	.4800	.5920	.8108	.3919	1.005	1.065	9.680	6.781 +1	.9277	1.194	1.135	1.052	.9994	.4803
1.09	.4742	.5869	.8080	.3944	1.006	1.073	1.148	6.655 +1	.9196	1.219	1.152	1.059	.9992	.4746
1.10	.4684	.5817	.8052	.3967	1.008	1.081	1.336	6.538 +1	.9118	1.245	1.169	1.065	.9989	.4689
1.11	.4626	.5766	.8023	.3990	1.010	1.089	1.532	6.428 +1	.9041	1.271	1.186	1.071	.9986	.4632
1.12	.4568	.5714	.7994	.4011	1.011	1.097	1.735	6.323 +1	.8966	1.297	1.203	1.078	.9982	.4576
1.13	.4511	.5663	.7966	.4032	1.013	1.105	1.944	6.225 +1	.8892	1.323	1.221	1.084	.9978	.4521
1.14	.4455	.5612	.7937	.4052	1.015	1.113	2.160	6.131 +1	.8820	1.350	1.238	1.090	.9973	.4467
1.15	.4398	.5562	.7908	.4072	1.017	1.120	2.381	6.041 +1	.8750	1.376	1.255	1.097	.9967	.4413
1.16	.4343	.5511	.7879	.4090	1.020	1.128	2.607	5.955 +1	.8682	1.403	1.272	1.103	.9961	.4360
1.17	.4287	.5461	.7851	.4108	1.022	1.136	2.839	5.873 +1	.8615	1.430	1.290	1.109	.9953	.4307
1.18	.4232	.5411	.7822	.4125	1.025	1.143	3.074	5.794 +1	.8549	1.458	1.307	1.115	.9946	.4255
1.19	.4178	.5361	.7793	.4141	1.028	1.151	3.314	5.718 +1	.8485	1.485	1.324	1.122	.9937	.4204
1.20	.4124	.5311	.7764	.4157	1.030	1.158	3.558	5.644 +1	.8422	1.513	1.342	1.128	.9928	.4154
1.21	.4070	.5262	.7735	.4171	1.033	1.166	3.806	5.574 +1	.8360	1.541	1.359	1.134	.9918	.4104
1.22	.4017	.5213	.7706	.4185	1.037	1.173	4.057	5.505 +1	.8300	1.570	1.376	1.141	.9907	.4055
1.23	.3964	.5164	.7677	.4198	1.040	1.181	4.312	5.439 +1	.8241	1.598	1.394	1.147	.9896	.4006
1.24	.3912	.5115	.7648	.4211	1.043	1.188	4.569	5.375 +1	.8183	1.627	1.411	1.153	.9884	.3958
1.25	.3861	.5067	.7619	.4223	1.047	1.195	4.830	5.313 +1	.8126	1.656	1.429	1.159	.9871	.3911
1.26	.3809	.5019	.7590	.4233	1.050	1.202	5.093	5.253 +1	.8071	1.686	1.446	1.166	.9857	.3865
1.27	.3759	.4971	.7561	.4244	1.054	1.210	5.359	5.194 +1	.8016	1.715	1.463	1.172	.9842	.3819
1.28	.3708	.4923	.7532	.4253	1.058	1.217	5.627	5.138 +1	.7963	1.745	1.481	1.178	.9827	.3774
1.29	.3658	.4876	.7503	.4262	1.062	1.224	5.898	5.082 +1	.7911	1.775	1.498	1.185	.9811	.3729
1.30	.3609	.4829	.7474	.4270	1.066	1.231	6.170	5.028 +1	.7860	1.805	1.516	1.191	.9794	.3685
1.31	.3560	.4782	.7445	.4277	1.071	1.238	6.445	4.976 +1	.7809	1.835	1.533	1.197	.9776	.3642

ONDE D'URTO NORMALI

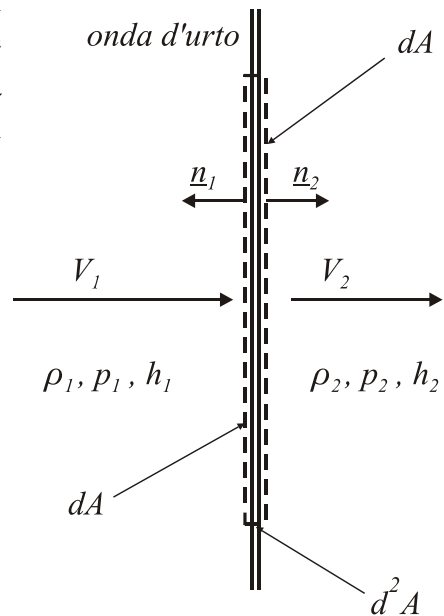
La pressione statica a monte di un'onda d'urto normale stazionaria è $50000 Pa$, la temperatura statica è $250 K$ e la velocità è $500 m/s$.

Se il gas è aria determinare il numero di Mach a monte e a valle dell'onda d'urto, le rimanenti grandezze statiche e di ristagno a monte e a valle dell'urto e la variazione di pressione di ristagno.

Aria $\rightarrow \gamma = 1.4 ; R = 287 J/kg/K$

Si indicheranno con 1 le condizioni a monte e con 2 le condizioni a valle

$$M_1 = V_1 / a_{L1} = 500 / \sqrt{1.4 \times 287 \times 250} = 1.58$$



Moto Isentropico ($\gamma=1.4$)							Prandtl e Meyer		Onde d'urto normali ($\gamma=1.4$)					
M	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	$\rho V^2/2p_0$	A/A^*	M^*	$v(^{\circ})$	$\mu(^{\circ})$	M_2	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{o2}/p_{o1}	p_1/p_{o2}
1.50	.2724	.3950	.6897	.4290	1.176	1.365	1.191 +1	4.181 +1	.7011	2.458	1.862	1.320	.9298	.2930
1.51	.2685	.3909	.6868	.4285	1.183	1.371	1.220 +1	4.147 +1	.6976	2.493	1.879	1.327	.9266	.2898
1.52	.2646	.3869	.6840	.4279	1.190	1.377	1.249 +1	4.114 +1	.6941	2.529	1.896	1.334	.9233	.2866
1.53	.2608	.3829	.6811	.4273	1.197	1.383	1.279 +1	4.081 +1	.6907	2.564	1.913	1.340	.9200	.2835
1.54	.2570	.3789	.6783	.4266	1.204	1.389	1.309 +1	4.049 +1	.6874	2.600	1.930	1.347	.9166	.2804
1.55	.2533	.3750	.6754	.4259	1.212	1.395	1.338 +1	4.018 +1	.6841	2.636	1.947	1.354	.9132	.2773
1.56	.2496	.3710	.6726	.4252	1.219	1.402	1.368 +1	3.987 +1	.6809	2.673	1.964	1.361	.9097	.2743
1.57	.2459	.3672	.6698	.4243	1.227	1.408	1.397 +1	3.956 +1	.6777	2.709	1.981	1.367	.9062	.2714
1.58	.2423	.3633	.6670	.4235	1.234	1.414	1.427 +1	3.927 +1	.6746	2.746	1.998	1.374	.9026	.2685
1.59	.2388	.3595	.6642	.4226	1.242	1.419	1.456 +1	3.897 +1	.6715	2.783	2.015	1.381	.8989	.2656

$$M_1 = 1.58 \rightarrow NSW \rightarrow M_2 = 0.67 ; p_2/p_1 = 2.75 ; T_2/T_1 = 1.37 ; p_{o2}/p_{o1} = 0.90$$

$$\rho_1 = p_1 / RT_1 = 50000 / 287 / 250 = 0.70 kg/m^3$$

$$p_1 = 50000 Pa ; p_2/p_1 = 2.75 ; p_2 = 50000 \times 2.75 = 137500 Pa$$

$$T_1 = 250 K ; T_2/T_1 = 1.37 ; T_2 = 250 \times 1.37 = 342 K$$

$$\rho_2 = p_2 / RT_2 = 137500 / 287 / 342 = 1.40 kg/m^3$$

$$V_2 = M_2 \times \sqrt{\gamma R T_2} = 0.67 \times \sqrt{1.4 \times 287 \times 342} = 248 m/s$$

Moto Isentropico ($\gamma=1.4$)							Prandtl e Meyer		Onde d'urto normali ($\gamma=1.4$)					
M	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	$\rho V^2/2p_0$	A/A^*	M^*	$\nu(^{\circ})$	$\mu(^{\circ})$	M_2	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{o2}/p_{o1}	p_1/p_{o2}
1.50	.2724	.3950	.6897	.4290	1.176	1.365	1.191 +1	4.181 +1	.7011	2.458	1.862	1.320	.9298	.2930
1.51	.2685	.3909	.6868	.4285	1.183	1.371	1.220 +1	4.147 +1	.6976	2.493	1.879	1.327	.9266	.2898
1.52	.2646	.3869	.6840	.4279	1.190	1.377	1.249 +1	4.114 +1	.6941	2.529	1.896	1.334	.9233	.2866
1.53	.2608	.3829	.6811	.4273	1.197	1.383	1.279 +1	4.081 +1	.6907	2.564	1.913	1.340	.9200	.2835
1.54	.2570	.3789	.6783	.4266	1.204	1.389	1.309 +1	4.049 +1	.6874	2.600	1.930	1.347	.9166	.2804
1.55	.2533	.3750	.6754	.4259	1.212	1.395	1.338 +1	4.018 +1	.6841	2.636	1.947	1.354	.9132	.2773
1.56	.2496	.3710	.6726	.4252	1.219	1.402	1.368 +1	3.987 +1	.6809	2.673	1.964	1.361	.9097	.2743
1.57	.2459	.3672	.6698	.4243	1.227	1.408	1.397 +1	3.956 +1	.6777	2.709	1.981	1.367	.9062	.2714
1.58	.2423	.3633	.6670	.4235	1.234	1.414	1.427 +1	3.927 +1	.6746	2.746	1.998	1.374	.9026	.2685
1.59	.2388	.3595	.6642	.4226	1.242	1.419	1.456 +1	3.897 +1	.6715	2.783	2.015	1.381	.8989	.2656

$$M_1 = 1.58 \rightarrow IF \rightarrow p_1/p_{o1} = 0.24$$

$$p_1 = 50000 Pa ; p_1/p_{o1} = 0.24 \rightarrow p_{o1} = 50000/0.24 = 208333 Pa$$

$$p_{o2}/p_{o1} = 0.90 \rightarrow p_{o2} = 0.90 \times 208333 = 187500 Pa$$

$$p_{o2} - p_{o1} = 187500 - 208333 = -20833 Pa$$

ONDE D'URTO NORMALI

La pressione statica a monte di un onda d'urto normale stazionaria è 100 kPa.

La pressione statica a valle è 400 kPa. Fluido: aria.

Determinare il numero di Mach a monte e a valle dell'onda d'urto e la variazione di pressione di ristagno.

$$\text{Aria} \rightarrow \gamma = 1.4 \quad R = 287 J/kg K$$

1 condizioni a monte, 2 condizioni a valle

$$p_2/p_1 = 400/100 = 4.0 \rightarrow NSW \rightarrow$$

$$M_1 = 1.8898 ; M_2 = 0.5976 ; p_{o2}/p_{o1} = 0.7720 ; T_2/T_1 = 1.6$$

$$M_1 = 1.8898 \rightarrow IF \rightarrow p_1/p_{o1} = 0.1516 ; p_{o1} = 659.63 kPa$$

$$p_{o2} - p_{o1} = -p_{o1} (1 - p_{o2}/p_{o1}) = -659.63 (1 - 0.772) = -150.4 kPa$$

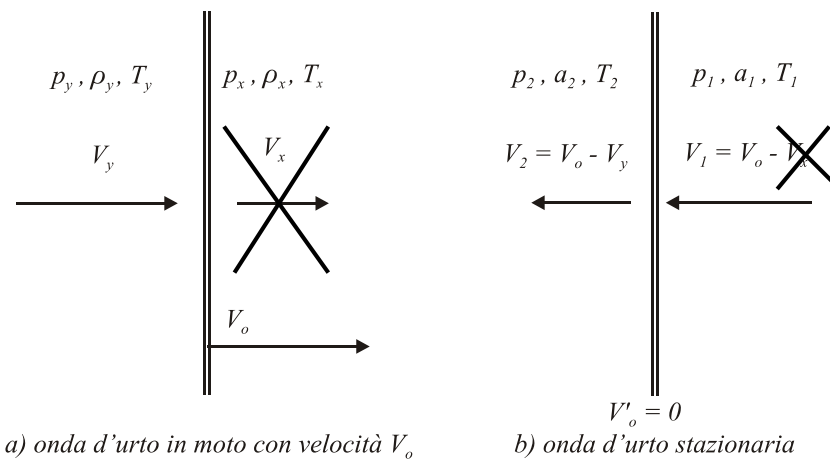
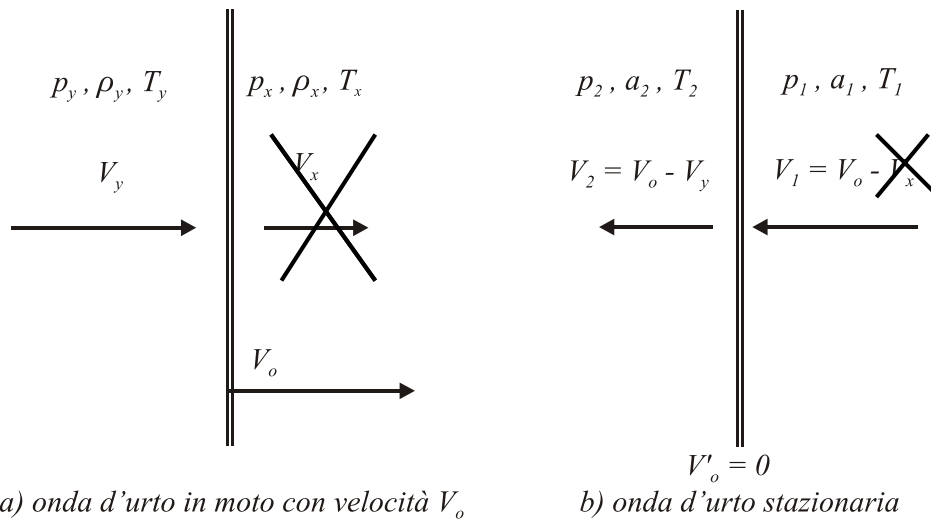
ONDE D'URTO NORMALI

Un'onda d'urto si muove alla velocità di 600m/s in aria in quiete ($\gamma = 1.4$; $R = 287\text{J/kg/K}$; $T = 300\text{K}$; $p = 101\text{kPa}$).

Determinare la velocità dell'aria dopo il passaggio dell'onda.

y condizioni a monte, x condizioni a valle

1 condizioni a monte, **2** condizioni a valle nel sistema di riferimento solidale onda



$$V_x = 0 ; \quad V_o = 600\text{m/s} ; \quad T = 300\text{K} ; \quad p = 101\text{kPa}$$

$$V_1 = V_o - V_x = 600\text{m/s} ; \quad M_1 = V_1 / \sqrt{\gamma R T_1} = 600 / \sqrt{1.4 \times 287 \times 300} = 1.73$$

$$M_1 = 1.73 \rightarrow \text{NSW} \rightarrow p_2/p_1 = 3.32 ; \quad T_2/T_1 = 1.48 ; \quad r_2/r_1 = V_1/V_2 = 2.24$$

$$V_2 = 600 / 2.24 = 267\text{m/s}$$

$$V_2 = V_o - V_y ; \quad V_y = V_o - V_2 = 600 - 267 = 333\text{m/s}$$

ONDE D'URTO OBLIQUE

Una rampa con un angolo $\delta=15^\circ$ è investita da una corrente d'aria a $M = 3$. La pressione statica della corrente è $50kPa$ e la temperatura statica è $300K$. Determinare il numero di Mach e la velocità a monte e valle dell'onda d'urto, i rapporti di pressione statica e pressione di ristagno attraverso l'onda, e la variazione della pressione di ristagno.

Aria $\rightarrow \gamma = 1.4$; $R = 287J/kg K$

Soluzione debole

$$\delta = 15^\circ \rightarrow \varepsilon = 32,2^\circ$$

$$M_{In} = M_1 \times \sin(\varepsilon) = 3 \times \sin(32.2) = 1.6$$

$$M_{In} = 1.6 \rightarrow \text{NSW} \rightarrow M_{2n} = 0.67; p_2/p_1 = 2.82; T_2/T_1 = 1.39; p_{02}/p_{01} = 0.89$$

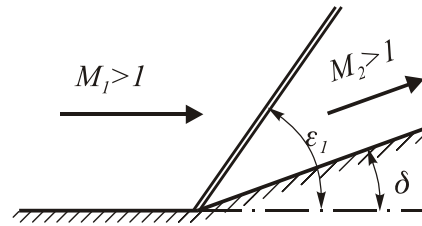
$$M_2 = M_{2n}/\sin(\varepsilon-\delta) = 0.67/\sin(32.2-15) = 2.26$$

$$V_1 = M_1 \times \text{sqrt}(\gamma R T_1) = 3 \times \text{sqrt}(1.4 \times 287 \times 300) = 1041,6m/s$$

$$V_2 = M_2 \times \text{sqrt}(\gamma R T_2) = 2.26 \times \text{sqrt}(1.4 \times 287 \times 300 \times 1.39) = 925m/s$$

$$M_1 = 3 \rightarrow \text{IF} \rightarrow p_1/p_0 = 0,0272; p_0 = p_1/0,0272 = 50/0,0272 = 1837kPa$$

$$P_{02} - P_{01} = -P_{01} (1 - p_{02}/p_{01}) = -1837 (1 - 0.89) = -202kPa$$

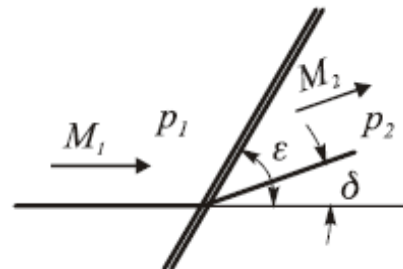


ONDE D'URTO OBLIQUE

Una corrente d'aria a $M = 2.5$ attraversa un'onda d'urto obliqua. La pressione statica della corrente a monte è $50kPa$ e la pressione statica a valle è $314kPa$.

Determinare il l'angolo di inclinazione dell'onda ε e l'angolo di deviazione della corrente δ .

Aria $\rightarrow \gamma = 1.4$; $R = 287J/kg K$



$$p_2/p_1 = 314/50 = 6,28 \rightarrow \text{NSW} \rightarrow M_{In} = 2.35$$

$$M_{In} = M_1 \sin(\varepsilon) \rightarrow \sin(\varepsilon) = M_{In}/M_1 \rightarrow \varepsilon = 70^\circ$$

$$\text{Dal diagramma } \varepsilon - \delta \rightarrow \delta = 28,9^\circ$$

ONDA D'URTO CONICA IN UNA PRESA D'ARIA

$M = 2$
 $\delta = 24^\circ$

