Corso di Laurea e di Diploma in Informatica
- Prova scritta di Algebra (III gruppo) -
31 gennaio 2002

1) Verificare che l'applicazione

$$\psi\colon x \in \mathbb{Q} \rightarrow \frac{x+1}{2} \in \mathbb{Q}$$

è biettiva, e determinarne la funzione inversa.

2) Per ogni x appartenente all'insieme $X = \{x \in \mathbb{N} : 0 \le x \le 1000\}$ si indichi con C(x) l'insieme delle cifre di x in notazione decimale (p.e. C(10) = {0,1} = C(100), C(11) = {1}).

i) Si verifichi che la relazione così definita in X:

$$x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow C(x) = C(y)$$

è di equivalenza, e si determinino le classi [1], [0], [21].

ii) Posto $Y = \{ x \in \mathbb{N} : 0 \le x \le 9\}$, sia $\mathcal{W}$ l'insieme delle parti non vuote di Y di ordine minore o uguale a 3.
Verificare che ha senso definire l'applicazione

$$\varphi\colon [x] \in X/\mathcal{R} \rightarrow C(x) \in \mathcal{W}$$

e che tale applicazione è biettiva. Dedurne che $X/\mathcal{R}$ è costituito da esattamente $\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\binom{10}{3}$ classi di equivalenza.

iii) Definita in X la seguente relazione:

$$x\, \Sigma\, y \Leftrightarrow C(x) \subset C(y) \text{ oppure } x = y$$

si verifichi che Σ è una relazione d'ordine in X, non totale, e si determinino in X gli elementi minimali, massimali, eventuali minimo e massimo. Considerato poi il sottoinsieme T = {10, 20, 201, 30} dell'insieme ordinato (X,Σ), se ne disegni il diagramma di Hasse (rispetto alla relazione d'ordine indotta da Σ) e se ne determinino eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali, maggioranti, minoranti, estremo superiore, estremo inferiore in X.

3) Nell'insieme $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ si definisca la seguente operazione:

$$(a,b) \lozenge (c,d) = (ac, b+d)$$

Verificare se tale operazione è associativa, commutativa, se esiste elemento neutro e, in caso di risposta affermativa, determinare gli elementi invertibili. Che tipo di struttura risulta essere $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, \lozenge)$?

4) Nell'anello $(\mathbb{Z}_{15},+,\cdot)$ si determinino gli elementi invertibili e i divisori dello 0. Si determini infine, utilizzando una opportuna equazione congruenziale, l'inverso di [11].

5) i) Si determinino le radici in $\mathbb{R}$ del polinomio $f(x) = x^3-1 \in \mathbb{R}[x]$, e se ne deduca una decomposizione di f(x) in prodotto di polinomi irriducibili.
ii) Si determini per quale primo p il polinomio $g(x) = x^3-\overline{1} \in \mathbb{Z}_p[x]$ ammette $\overline{2}$ come radice in $\mathbb{Z}_p$, e se ne deduca una decomposizione di g(x) in prodotto di fattori irriducibili.